



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361

EDN: WYVDDH

УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Упругопластический расчет оболочек вариационным методом на основе полиномов высокой степени

 Ф.С. Хайруллин , О.М. Сахбиев  

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация

✉ somkazan@yandex.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 7 января 2023 г.

Доработана: 24 мая 2023 г.

Принята к публикации: 27 мая 2023 г.

### Для цитирования

Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Упругопластический расчет оболочек вариационным методом на основе полиномов высокой степени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 349–361. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361>

**Аннотация.** Цель исследования — развитие вариационного метода расчета трехмерных конструкций на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации. В ранних работах авторов метод представлялся в линейной постановке, причем была показана возможность расчета, как трехмерных составных конструкций, так и тонких оболочек. Предложен алгоритм расчета на прочность толстых и тонких оболочек, в которых возникают упругопластические деформации. Геометрия оболочек описывается в криволинейной ортогональной системе координат; в цилиндрической, сферической или конической. В методике расчета использованы основные соотношения малых упругопластических деформаций для криволинейной системы координат. В алгоритм расчета закладывалась модель материала с линейным упрочнением. Для получения разрешающей системы нелинейных уравнений используется вариационный принцип Лагранжа. Задача решается итерационно. Первая итерация соответствует линейной задаче. На каждой итерации после разрешения системы уравнений подсчитываются интенсивности деформаций в каждой точке интегрирования. Эти интенсивности деформации подставляются в матрицы упругости на последующих итерациях. Итерационный процесс характеризуется пересчетом матрицы упругости на каждой итерации в каждой точке интегрирования. Исследования показали устойчивую сходимость итерационного процесса. Производилось тестовое решение задач упругопластического деформирования толстой трубы и тонкой оболочки. Результаты расчетов хорошо согласовывались с результатами, полученными как по классическим формулам для упругопластического деформирования, так и с результатами расчетов в программе Ansys Mechanical.

**Ключевые слова:** упругопластические деформации, трехмерное тело, конечные носители, конечные элементы

Хайруллин Фарид Сагитович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-5455-6659; E-mail: x\_farid@mail.ru

Сахбиев Олег Миргасимович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-1670-4013; E-mail: somkazan@yandex.ru

© Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Elastic-plastic analysis of shells by variational method on the basis of high-degree polynomials

Farid S. Khayrullin , Oleg M. Sakhbiev  

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation

 somkazan@yandex.ru

## Article history

Received: January 7, 2023

Revised: May 24, 2023

Accepted: May 27, 2023

## For citation

Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Elastic-plastic analysis of shells by variational method on the basis of high-degree polynomials. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):349–361. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361>

**Abstract.** The purpose of the research is to develop a variational method for calculation of three-dimensional structures based on approximating functions with finite carriers of an arbitrary degree of approximation. In the early papers of the authors, the method was presented in a linear formulation, and the possibility of calculating both three-dimensional compound structures and thin shells was shown. This paper proposes an algorithm for strength calculation of thick and thin shells with elastic-plastic deformations. The geometry of shells is described in a curvilinear orthogonal coordinate system, e.g., in cylindrical, spherical, or conical ones. The calculation method uses the basic equations of small elastic-plastic deformations for the curvilinear coordinate system. The calculation algorithm was based on a model of material with linear strengthening. To obtain a resolving system of nonlinear equations, the Lagrange variational principle is used. The problem is solved by means of iteration. The first iteration corresponds to a linear problem. At each iteration, after solving the system of equations, the intensities of deformations at each point of integration are calculated. These intensities of deformations are substituted into the matrices of elasticity at the following iterations. The process of iteration is characterized by recalculation of the elasticity matrix at each iteration in each integration point. The researches have shown a stable convergence of the process of iteration. A testing solution of elastic-plastic deformation problems of a thick pipe and a thin shell was carried out. The calculation results were in good agreement with the results obtained both by classical formulas for elastic plastic deformation and with the results of calculations in the Ansys Mechanical program.

**Keywords:** elastic-plastic deformations, three-dimensional solid, finite carriers, finite elements

## 1. Введение

В [1–3] авторами был представлен метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций. При выводе основных соотношений предполагалось, что перемещения и деформации малы. Как было показано в этих работах представленную методику возможно использовать как для трехмерных конструкций, так и для расчета тонких пластин и оболочек. Однако круг задач, решаемых вариационным методом расчета, основанным на функциях произвольной степени аппроксимации с конечными носителями, ограничивался лишь решением линейных задач. Это ограничение было преодолено в [4], где была показана возможность применения представленной методики для расчета на прочность массивных тел с учетом физической нелинейности материала. В данной работе представлен алгоритм расчета, в котором определяющие уравнения задаются в криволинейной ортогональной системе координат, что дает возможность удобного описания геометрии оболочек, в частности, цилиндрических, сферических и конических.

Совершенствование методик упругопластических расчетов является актуальной и важной задачей, что подтверждается множеством свежих работ по данной тематике [5–7]. Внимание исследователей уделяется расчетам тонкостенных элементов конструкций в нелинейной постановке [8], расчетам больших прогибов [9], а также расчетам железобетонных элементов конструкций с учетом физической нелиней-

*Farid S. Khayrullin*, Doctor in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Fundamentals of Structural Engineering and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5455-6659, E-mail: x\_farid@mail.ru

*Oleg M. Sakhbiev*, PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Department of Fundamentals of Structural Engineering and Applied Mechanics Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-1670-4013; E-mail: somkazan@yandex.ru

ности [10]. Оценка прочностных характеристик с учетом нелинейности поведения материалов позволяет более точно определять предельные допустимые нагрузки для проектируемых изделий. Существенное увеличение прочности деталей из металлов можно добиться методами интенсивного пластического деформирования. Вопросам оптимального формирования сверхтонких материалов методами пластического деформирования посвящены работы [11; 12]. Такие материалы, как правило, обладают субультрамелкозернистой структурой [13]. В таких задачах очень важны методики оценки пластического деформирования. В [14] оцениваются величины начальной пластической деформации, и изучается влияние начальной деформации на последующее упрочнение. В [15] рассматриваются некоторые аспекты компьютерного моделирования развития мелкозернистых структур в материале. Достаточно подробный анализ методик интенсивного пластического деформирования приводится в [16]. В [17] разработан подход к определению напряженного состояния шарообразных заготовок в закрытой матрице при пластическом деформировании. Таким образом, разработка и совершенствование методики упругопластических расчетов для произвольной формы конструкции и деталей является актуальной задачей и позволяет получать более экономичные решения.

## 2. Методы исследования

Деформации  $\varepsilon_{ij}$ , заданные в ортогональной криволинейной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , определяются по формулам [4]:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_{ij} u_j + k_{il} u_l,$$

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - k_{ij} u_i - k_{ji} u_j, \quad i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

где  $u_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) — компоненты перемещения;  $k_{ij}$  — главные кривизны;  $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$  — углы сдвига,  $A_i$  — коэффициенты Ляме, в левой части соотношений нет суммирования по индексам, индексы  $j, l$  получают круговой перестановкой индексов  $i, j, l$ .

Для получения разрешающих уравнений воспользуемся известными гипотезами из теории малых упругопластических деформаций [18].

Девиатор напряжений  $D_\sigma$  выражается через девиатор деформаций  $D_\varepsilon$  следующим образом:

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} \cdot D_\varepsilon, \quad (2)$$

где  $\sigma_o$  — интенсивность напряжений;  $\varepsilon_o$  — интенсивность деформаций, которые определяются по формулам:

$$\sigma_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)},$$

$$\varepsilon_o = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6 \cdot (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)},$$

где  $\sigma_{ii}, \varepsilon_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$  — соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Запишем равенство (2) в компонентном виде:

$$(\sigma_{ii} - \sigma_c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_c),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_o}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{ij}, \quad i \neq j. \quad (3)$$

Здесь нет суммирования  $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ,  $\sigma_c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$  — среднее нормальное напряжение,  $\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}$  — средняя деформация, которые связаны известным соотношением [18]:

$$\sigma_c = K \cdot \theta = K \cdot 3 \cdot \varepsilon_c, \quad (4)$$

$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$  — модуль объёмной деформации;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

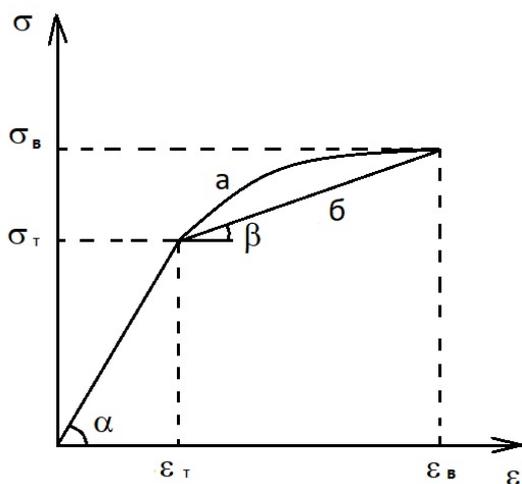
Интенсивность напряжений  $\sigma_o$  является функцией интенсивности деформаций  $\varepsilon_o$  при любых видах напряженного состояния [18]:

$$\sigma_o = \Phi(\varepsilon_o). \quad (5)$$

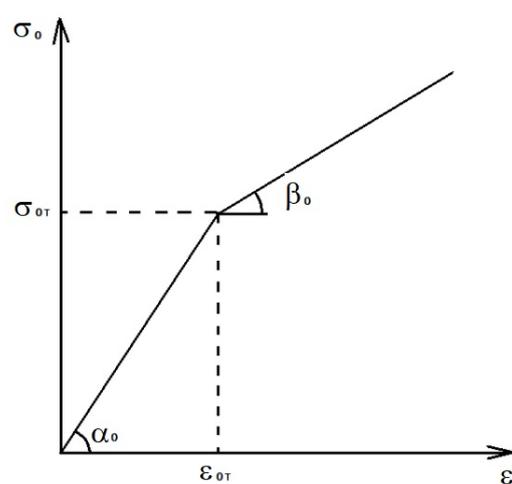
Используя соотношения (4), (5) соотношения (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_c) + 3 \cdot K \cdot \varepsilon_c, \\ \sigma_{22} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_c) + 3 \cdot K \cdot \varepsilon_c, \\ \sigma_{33} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_c) + 3 \cdot K \cdot \varepsilon_c, \\ \sigma_{12} &= \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{12}, \quad \sigma_{23} = \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{23}, \quad \sigma_{13} = \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{13}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматривается упругопластический материал с линейным упрочнением (рис. 1, 2). Нелинейная часть диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  для такого материала заменяется линейной частью (рис. 1) с целью упрощения расчетов. Для такого материала также и расчетная диаграмма в осях  $\sigma_o - \varepsilon_o$  имеет аналогичный кусочно-линейный вид (рис. 2) по тем же причинам.



**Рис. 1.** Схематичная диаграмма растяжения материала:  
 а — условная диаграмма; б — расчетная диаграмма  
**Figure 1.** Schematic diagram of the material tension:  
 а — conditional diagram; б — calculation diagram



**Рис. 2.** Диаграмма деформирования материала  
**Figure 2.** Material deformation diagram

Между углами наклона  $\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0$ , модулем упругости  $E$ , модулем пластического упрочнения при растяжении  $E_T$ , модулем пластического упрочнения  $E_0'$  и упругой постоянной  $E_0$  существуют зависимости:

$$E = tg(\alpha), \quad E_T = tg(\beta), \quad E_0 = tg(\alpha_0), \quad E_0' = tg(\beta_0), \quad E_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(1+\nu)} E, \quad E_0' = \frac{E_T}{1 - \frac{1-2 \cdot \nu}{3} \cdot \frac{E_T}{E}}.$$

С учетом этих соотношений для материала с линейным упрочнением соотношение (5) можно записать в следующем виде [19]:

$$\sigma_o = \Phi(\varepsilon_o) = E_0 \cdot \varepsilon_o \cdot [1 - \omega(\varepsilon_o)]. \quad (7)$$

Здесь

$$\omega(\varepsilon_o) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon_o \leq \varepsilon_{0T} \\ \lambda_0 \cdot (1 - \frac{\varepsilon_{0T}}{\varepsilon_o}), & \text{если } \varepsilon_o > \varepsilon_{0T} \end{cases},$$

$$\lambda_0 = 1 - \frac{E_0'}{E_0}, \quad \varepsilon_{0T} = \frac{2}{3} \cdot (1 + \nu) \cdot \varepsilon_T, \quad \sigma_{0T} = \sigma_T,$$

где  $\varepsilon_{0T}$  и  $\sigma_{0T}$  — соответственно интенсивности деформаций и напряжений, при которых возникают пластические деформации.

В качестве условия пластичности используется условие пластичности Губера – Мизеса. Согласно этой гипотезе, в материале возникают пластические деформации, когда интенсивность напряжений достигает величины, равной пределу текучести:

$$\sigma_o = \sigma_T.$$

Трехмерная конструкция разбивается на подобласти  $V_k$  (рис. 3), которые представляют собой криволинейные шестигранники с гранями в виде кусочно-гладких поверхностей ( $\Omega_i, i = \overline{1,6}$ ).

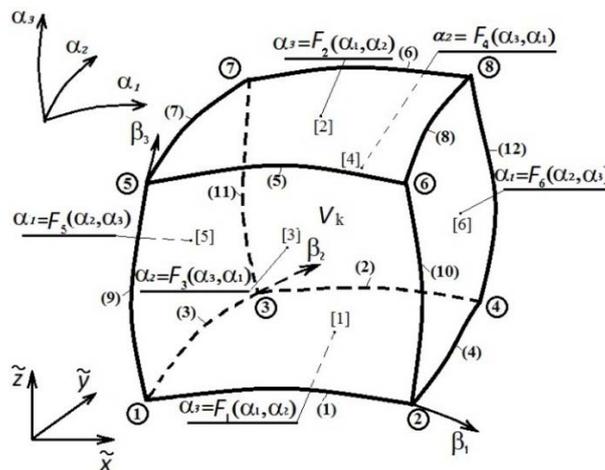


Рис. 3. Нумерация узлов подобласти  
Figure 3. Numbering of nodes in the subsection

Узлы, грани и стороны нумеруются, как указано на рис. 3. Вводятся глобальная декартова система координат  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  и ортогональная криволинейная система координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  так, чтобы уравнения граней можно было задать относительно соответствующих координатных плоскостей в следующем виде [4]:

$$\alpha_3 = F_1(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_3 = F_2(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_2 = F_3(\alpha_3, \alpha_1), \alpha_2 = F_4(\alpha_3, \alpha_1),$$

$$\alpha_1 = F_5(\alpha_2, \alpha_3), \alpha_1 = F_6(\alpha_2, \alpha_3),$$

где  $F_i, i = \overline{1,6}$  — однозначные функции класса  $C^1$ .

Для тонких оболочек системы координат обычно выбираются таким образом, чтобы две противоположные грани подобласти совпадали с поверхностями оболочки.

Для каждой подобласти  $V_k$  вводится криволинейная система координат  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . В общем случае эта система координат не является ортогональной и задается с помощью соотношений:

$$\alpha_1 = F_5(\alpha_{25}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{35}(\beta_2, \beta_3))(1 - \beta_1) + F_6(\alpha_{26}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{36}(\beta_2, \beta_3))\beta_1 + \alpha_{10}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$\alpha_2 = F_3(\alpha_{33}(\beta_1, \beta_3), \alpha_{13}(\beta_1, \beta_3))(1 - \beta_2) + F_4(\alpha_{34}(\beta_1, \beta_3), \alpha_{14}(\beta_1, \beta_3))\beta_2 + \alpha_{20}(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (8)$$

$$\alpha_3 = F_1(\alpha_{11}(\beta_1, \beta_2), \alpha_{21}(\beta_1, \beta_2))(1 - \beta_3) + F_2(\alpha_{12}(\beta_1, \beta_2), \alpha_{22}(\beta_1, \beta_2))\beta_3 + \alpha_{30}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

где функции  $\alpha_{25}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{35}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{10}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  специально подобранные функции [4].

Соотношения (8) заданы так, чтобы в подобласти  $V_k$  выполнялись условия  $0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 1$ , грани  $\Omega_i$  задавались уравнениями  $\beta_l = 0$  или  $\beta_l = 1, l = \overline{1,3}$ , граничные линии  $\gamma_i$  задавались только одной координатой  $\beta_j, j = \overline{1,3}$ .

Перемещения, заданные в глобальной системе координат  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ , в границах подобласти  $V_k$  запишем с помощью аппроксимации:

$$\tilde{u}_i = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{inml}^k t_l(\beta_1) t_m(\beta_2) t_n(\beta_3), \quad i = \overline{1,3}, \quad (9)$$

где  $t_l(\beta_1)$  — функции формы, имеющие следующий вид:  $t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, t_2(\beta_1) = \beta_1, t_l(\beta_1) = t_1(\beta_1)[t_2(\beta_1)]^{l-2}, (l = \overline{3, L}), D_{inml}^k$  — неизвестные константы.

Аппроксимацию (9) можно записать в матричной форме:

$$\{\tilde{u}^k\} = [D^k] \{t^k\}, \quad (10)$$

где  $\{t^k\}^T = \{t_1^k, t_2^k, \dots, t_J^k\}$  — функции форм, заданные в локальной системе координат  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ;  $\{\tilde{u}^k\}^T = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ ,  $[D^k]$  — матрица неизвестных постоянных размерностью  $3 \times J, J = N \cdot M \cdot L$ .

Перемещения в локальной криволинейной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  выражаются с помощью матрицы направляющих косинусов  $[C^k]$  через перемещения в глобальной декартовой системе координат  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  [20]:

$$\{u^k\} = [C^k] \cdot \{\tilde{u}^k\}, \quad (11)$$

В дальнейшем индекс  $k$ , который указывает на принадлежность к области  $V_k$ , будем упускать для удобства изложения.

Компоненты тензора деформации записываем через перемещения в известном матричном виде [21]:

$$\{\varepsilon\} = [A]\{u\}, \quad (12)$$

где  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}\}$ ;  $\{u\}^T = \{u_1, u_2, u_3\}$ ;  $\gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12}$ ;  $\gamma_{23} = 2 \cdot \varepsilon_{23}$ ;  $\gamma_{13} = 2 \cdot \varepsilon_{13}$ ;  $\gamma_{23} = 2 \cdot \varepsilon_{23}$ ;  $[A]$  – известная дифференциальная матрица [4].

Подставляя в соотношения (6) соотношения (7), записываем напряжения в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [E']\{\varepsilon\}, \quad (13)$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}\}$ .

Матрица  $[E']$  для каждой конкретной точки имеет следующий вид:

$$[E'] = \begin{bmatrix} \frac{4}{9}E_1 + K & E_2 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & \frac{4}{9}E_1 + K & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & E_2 & \frac{4}{9}E_1 + K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{3} \end{bmatrix},$$

где  $E_1 = E_0 \cdot [1 - \omega(\varepsilon_0)]$ ,  $E_2 = -\frac{2}{9}E_1 + K$ . Легко заметить, что при отсутствии пластических деформаций в точке, то есть при  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{0T}$ , матрица  $E'$  совпадает с матрицей упругости  $E$ , которая приводится в [4].

Для получения основных разрешающих уравнений используется вариационный принцип Лагранжа [22]. Согласно этому принципу, должно выполняться условие

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{k=1}^K \int_{V_k} (\delta \Pi_k - \delta A_k) dV = 0, \quad (14)$$

где  $\mathcal{E}$  — полная энергия всей конструкции;  $\Pi_k$ ,  $\delta A_k$ , — удельная потенциальная энергия деформации и вариация работы внешних сил на единице объема подобласти  $V_k$ .

Удельная потенциальная энергия деформации, записанная в матричном виде:

$$\Pi_k = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}. \quad (15)$$

Последовательно подставляя (10)→(11)→(12)→(13)→(15), получаем удельную потенциальную энергию деформации, записанную через функции формы и матрицу констант  $[D^k]$ :

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \{t^k\} [D^k]^T [C^k]^T [A]^T [E'] [A] [C^k] [D^k] \{t^k\} \quad (16)$$

Из уравнения (14) следует условие  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_{ij}^k} = 0$ , что позволяет с учетом (16) получить нелинейную систему уравнений

$$[K] D = P, \quad (17)$$

где  $[K]$  — матрица жесткости всей конструкции,  $P = \sum_{k=1}^K \int_{V_k} \frac{\partial A_k}{\partial D_{ij}^k} dV$  — вектор правой части, который включает работу внешних сил  $A_k$ ,  $D$  — вектор неизвестных постоянных.

Нелинейность системы (17) обусловлена наличием в матрице  $[E']$  интенсивности деформаций. Матрица жесткости всей конструкции собирается на основе матриц жесткостей подобластей  $V_k$ , которые имеют вид

$$K_{nl} = \int_{V_k} (\{R\}[A]^T [E'] [A] \{c_{*i} t_j\}) dV; \quad (18)$$

здесь

$$n = (i-1) \cdot J + j; l = (m-1) \cdot J + r,$$

$$i = \overline{1,3}; j = \overline{1,J}; m = \overline{1,3}; r = \overline{1,J};$$

$$\{R\} = \{t_r \cdot c_{1m}, t_r \cdot c_{2m}, t_r \cdot c_{3m}\};$$

$$\{c_{*i} t_j\} = \begin{Bmatrix} c_{1i} t_j \\ c_{2i} t_j \\ c_{3i} t_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ t_j \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{в } i\text{-й строке } i = \overline{1,3}.$$

Интегрирование в соотношении (18) производится численно методом Гаусса.

Нелинейная система (17) решается итерационно. На первой итерации решается упругая задача, поэтому система (17) в этом случае становится линейной и возможно найти вектор неизвестных постоянных  $D$ . Линейная система решается методом Холетского [23]. С помощью найденных неизвестных определяются перемещения, деформации, напряжения и интенсивности напряжений в расчетных точках (точки Гаусса и дополнительные точки) подобластей конструкции. Далее в каждой расчетной точке проверяется условие пластичности и в зависимости от условий формируется матрица  $[E']$ . Эта матрица используется на последующей итерации.

Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока разность между двумя последующими решениями не достигает необходимой точности.

### 3. Результаты и обсуждение

С целью проверки предложенной методики был произведен упругопластический расчет двух задач, в которых в качестве криволинейной ортогональной системы координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  выбрана цилиндрическая система координат. Порядок аппроксимации в соотношении (9) брался следующим:  $N=M=L=6$ .

Первая задача представляет собой толстую цилиндрическую трубу под внутренним равномерным давлением. Предполагалось, что материал трубы идеально-пластичный (без упрочнения). В силу симметрии рассматривалась четверть трубы (рис. 4). Внешний радиус трубы 0,5 м, внутренний радиус 0,3 м, длина трубы 1 м. Модуль упругости  $2 \times 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона 0,3, предел текучести 300 МПа,  $E_T = 0$ . Граничные условия: при  $z = 1$  м и при  $z = 0$  — перемещения вдоль оси  $z$  равны нулю, с внешней

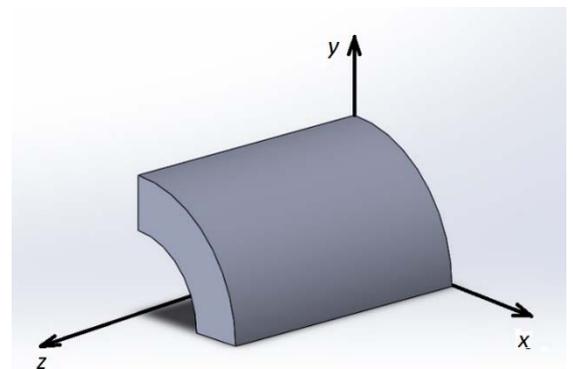


Рис. 4. Толстая цилиндрическая труба  
Figure 4. Thick cylindrical tube

стороны трубы — свободный край, на поверхности  $y = 0$  — перемещения вдоль оси  $y$  равны нулю, на поверхности  $x = 0$  — перемещения вдоль оси  $x$  равны нулю, на внутренней поверхности — равномерное давление 170 МПа.

Для аналогичной задачи, в которой материал несжимаем (коэффициент Пуассона 0,5) известно аналитическое решение. Также известно, что при сжатии материала, как в нашем случае при коэффициенте Пуассона 0,3, известные аналитические формулы могут быть использованы с пренебрежительно малой погрешностью. Результаты, которые получены по известным формулам, можно сравнивать с результатами расчетов, полученных по представленной методике. Также результаты, полученные по представленной методике, сравнивались с результатами расчета в Ansys Mechanical APDL.

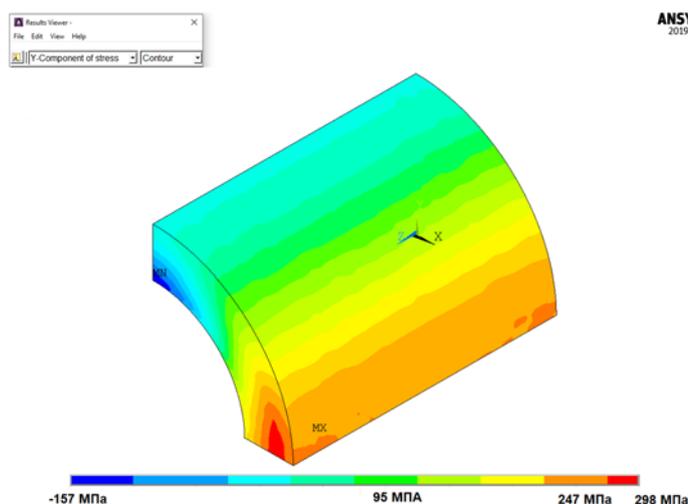
При расчете в Ansys использовался трехмерный 8-узловой конечный элемент (solid 185) в количестве 57 624 штуки.

При расчете по представленной методике использовалась одна подобласть, которая ограничивалась криволинейными координатами

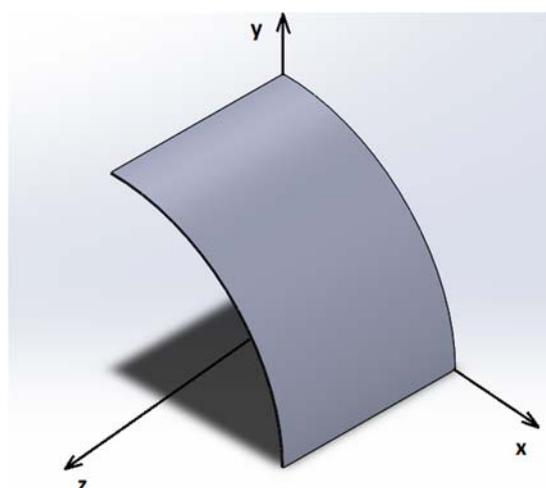
$$r = 30 \text{ см}; r = 50 \text{ см}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}; z = 0 \text{ см}; z = 100 \text{ см}.$$

В обоих случаях материал брался без упрочнения.

На рис. 5 приведено распределение напряжений  $\sigma_{yy}$ , которые были получены путем расчета в Ansys. Из рисунка видно, что максимальные напряжения равны 298 МПа. Максимальные напряжения, полученные по представленной методике, также составили 297,99 МПа. Максимальные напряжения возникают в зоне пластичности, причем в точках, наиболее удаленных от центра трубы, то есть в точках, где зона пластичности переходит в зону упругости. Для данной задачи переход зоны пластичности в зону упругости согласно аналитическому решению происходит при  $r_T = 0,43096$  м, причем в этих точках возникают максимальные (окружные) напряжения, равные 301,88 МПа. Согласно расчету по представленной методике  $r_T = 0,432$  м. На рис. 5 видно, что согласно расчету в Ansys максимальные напряжения возникают как раз около  $r_T$ . Максимальные напряжения по представленной методике отличаются от аналитического решения в пределах 1 %. Граница между пластическими и упругими деформациями  $r_T$  отличается от аналитического решения на 0,2 %. Таким образом, можно сделать вывод, что расчет этой задачи по представленной методике совпал с Ansys с точностью до тысячных долей процента и совпал с известным аналитическим решением с точностью до 1 %.



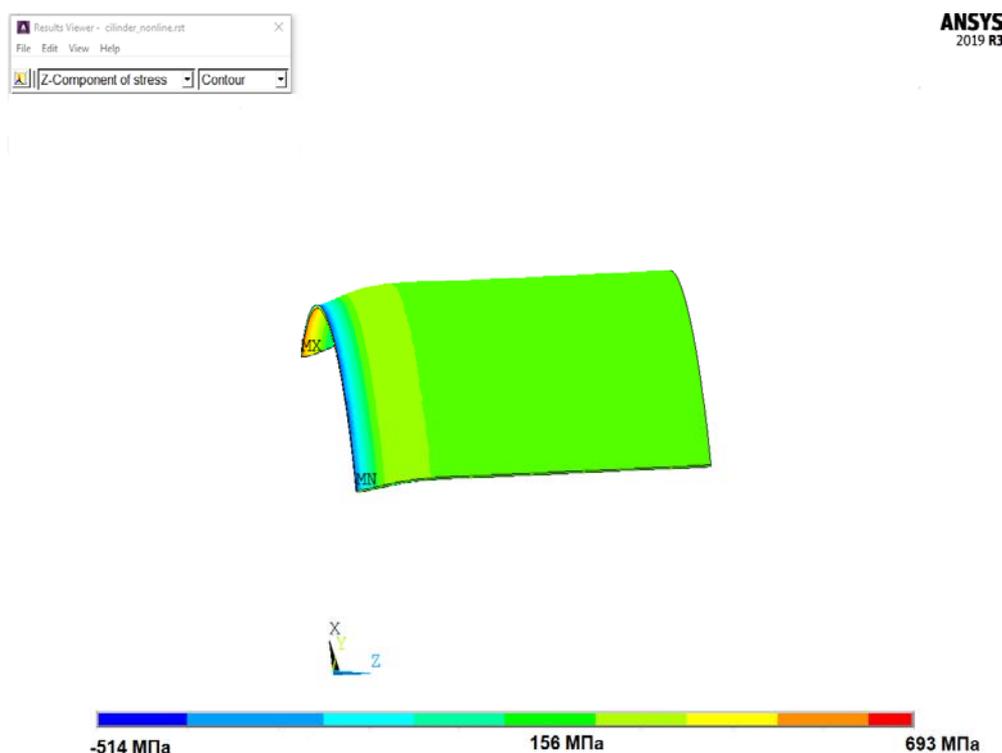
**Рис. 5.** Распределение напряжений в толстой цилиндрической трубе, полученное в Ansys  
**Figure 5.** Distribution of stresses in a thick cylindrical tube, generated in the Ansys



**Рис. 6.** Тонкая цилиндрическая оболочка  
**Figure 6.** Thin cylindrical shell

Во второй задаче рассчитывалась тонкая цилиндрическая оболочка, которая находится под равномерным внутренним давлением. Материал оболочки с упрочнением. Модуль упругости  $2 \times 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона 0,3, предел текучести 300 МПа,  $E_T = 10^5$  МПа. Рассматривалась четверть оболочки (рис. 6). Внешний радиус трубы 0,5 м, внутренний радиус 0,495 м, длина оболочки 0,5 м. Граничные условия: перемещения вдоль оси  $z$  равны нулю при  $z = 0,5$  м, заделка при  $z = 0$ , свободный край с внешней стороны оболочки, перемещения вдоль оси  $y$  равны нулю на поверхности  $y = 0$ , перемещения вдоль оси  $x$  равны нулю на поверхности  $x = 0$ , на внутренней стороне поверхности равномерное давление  $q = 3,5$  МПа.

При расчете в Ansys Mechanical использовался 8-узловой конечный элемент (solid 185) в количестве 6 699 945 штук. Результаты расчета, а именно характер распределения напряжений  $\sigma_{zz}$ , приведены на рис. 7. Из рисунка видно, что максимальные (MX = 693 МПа) и минимальные (MN) напряжения возникают в заделке.



**Рис. 7.** Распределение напряжений в тонкой цилиндрической оболочке, полученное в Ansys  
**Figure 7.** Distribution of stresses in a thin cylindrical shell, generated in Ansys

При расчете по представленной методике использовались две подобласти, которые ограничивались криволинейными координатами:

$$1\text{-я подобласть } r = 0,495 \text{ м}; r = 0,5 \text{ м}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}; z = 0 \text{ м}; z = 0,05 \text{ м},$$

$$2\text{-я подобласть } r = 0,495 \text{ м}; r = 0,5 \text{ м}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}; z = 0,05 \text{ м}; z = 0,5 \text{ м}.$$

Для этой задачи в заделке будет зона повышенных напряжений (зона концентрации напряжений), поэтому в соответствии с представленной методикой берется еще один конечный элемент как раз в том месте, где предполагается концентрация напряжений. Размер этого дополнительного элемента можно брать с размерами примерно 1 к 10 от размера всей подобласти. Порядок аппроксимации в соотношении (9) брался следующим:  $N = M = L = 8$ . Максимальные окружные напряжения, полученные по представленной методике, равны 711,47 МПа, что на 2,6% отличается от максимальных окружных напряжений, которые получены путем расчета этой задачи в Ansys.

#### 4. Заключение

1. Предложенный авторами ранее метод расчета трехмерных конструкций был существенно доработан и появилась возможность расчета упругопластических деформаций тонких оболочек. Для описания геометрии оболочек используется криволинейная система координат.

2. Показано, что точность расчета труб и оболочек практически такая же, как и при расчете в Ansys, однако в представленной методике не требуется задание густой сетки конечных элементов. Например, тонкая оболочка по представленной методике была рассчитана двумя конечными элементами, в то время как в Ansys использовалось очень большое число конечных элементов.

3. Было продемонстрировано, что расчет по представленной методике полностью совпадает с классическим расчетом упругопластических деформаций толстой трубы.

#### Список литературы

1. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О методе расчета трехмерных конструкций сложной формы // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 23. С. 328–330. EDN: TCCWZJ

2. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Расчет ортотропных конструкций вариационным методом на основе трехмерных функций с конечными носителями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 195–207. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.11>

3. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Об использовании вариационного метода на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями для расчета трехмерных тонкостенных конструкций // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов: в 4-х томах. Уфа: Издательство: Башкирский государственный университет, 2019. С. 215–217. EDN: GNAXHE

4. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О расчете упругопластических деформаций вариационным методом на основе функций с конечными носителями // Вестник Технологического университета. 2021. Т. 24. № 4. С. 102–106. EDN: EPHBJZ

5. Ашкеев Ж.А., Андреященко В.А., Абишкенов М.Ж., Буканов Ж.У. Определение напряженного состояния и усилия деформации шарообразных заготовок в закрытой матрице // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 4. С. 5–12. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>

6. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 4. С. 60–70. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.07>

7. Богданов Н.П. Методика расчета упругопластического кручения цилиндрических стержней в сборнике: фундаментальная и прикладная наука: состояние и тенденции развития // Сборник статей XI Международной научно-практической конференции. Петрозаводск, 2021. С. 14–18. EDN: GEWJKU

8. Гуреева Н.А., Ключков Ю.В., Николаев А.П. Определяющие соотношения для нелинейно упругих тел и их реализация в расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе смешанного МКЭ // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 157. № 2. С. 28–39.

9. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У., Абдрахманова А.И. Об одном алгоритме расчета больших упруго-пластических деформаций МКЭ // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), Алушта, 25–31 мая 2016 года. М.: Изд-во МАИ, 2016. С. 324–326.

10. Рыбаков В.А., Купечков А.М., Бикбаева Н.А. Физическая нелинейность при расчете железобетонных элементов в сборнике: проблемы обеспечения функционирования и развития наземной инфраструктуры комплексов систем вооружения // Материалы всероссийской научно-технической конференции «Проблемы обеспечения функционирования и развития наземной инфраструктуры комплексов систем вооружения». СПб.: Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, 2018. С. 55–61.

11. Naizabekov A., Andreyachshenko V., Kliber J. Forming of microstructure of the Al-Si-Fe – Mn system alloy by equal channel angular pressing with backpressure // Conf. Proc. 21st International Conference on Metallurgy and Materials (Metal-2012), Brno, Czech Republic. 2012. P. 391–395.

12. Andreyachshenko V.A., Naizabekov A.B. Microstructural and mechanical characteristics of AlSiMnFe alloy processed by equal channel angular pressing // Metalurgija. 2016. Vol. 55. No. 3. P. 353–356.

13. Дорофеев О.В., Курдюмова Л.Н., Родин Н.Н. Формирование градиентных субмикро- и нанокристаллических структур в объемных конструкционных материалах // Труды 3-й Международной научно-технической конференции. Металлофизика, механика материалов, наноструктур и процессов деформирования. МЕТАЛЛДЕФОРМ – 2009. В 2 томах. Т. 1. Самара. 2009. С. 229–232.

14. De Faria C.G., Almeida N.G.S., Balzuweit K., Aguilar M.T.P., Cetlin P.R. The effect of initial strain in the severe plastic deformation of aluminum on the subsequent work hardening regeneration through low strain amplitude multi-directional forging // Materials Letters. 2021. Vol. 290(1). Article 129462. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.129462>

15. Syvetlichnyy D.S., Majta J., Kuziak R., Muszka K. Experimental and modelling study of the grain refinement of Fe-30wt % Ni-Nb austenite model alloy subjected to severe plastic deformation process // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 21(1). P. 1–14. <https://doi.org/10.1007/s43452-021-00178-7>
16. Segal V. Review: Modes and Processes of Severe Plastic Deformation (SPD) // *Materials*. 2018. Vol. 11 (7). Article 1175. <https://doi.org/10.3390/ma11071175>
17. Ашкеев Ж.А., Андрященко В.А., Абишкенов М.Ж., Буканов Ж.У. Определение напряженного состояния и усилия деформации шарообразных заготовок в закрытой матрице // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 4. С. 5–12. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>
18. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит. 2003. 704 с.
19. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Клочков Ю.В., Гуреева Н.А., Ищанов Т.Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений // *Известия саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022. Т. 22. № 1. С. 48–61. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>
20. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 371 с.
22. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
23. Фролов А.В., Воеводин В.В., Коньшин И.Н., Теплов А.М. Исследование структурных свойств алгоритма разложения Холецкого: от давно известных фактов до новых выводов // *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*. 2015. Т. 19. № 4(70). С. 149–162. EDN: WAHOER

### References

1. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. On the method of calculating three-dimensional structures of complex shape. *Bulletin of Kazan Technological University*. 2014;17(23):328–330. (In Russ.)
2. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Computing orthotropic constructions using the variation method based on three-dimensional functions with final carriers. *PNRPU mechanics bulletin*. 2017;2:195–207. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.11>
3. Khairullin F.S., Sakhbiev O.M. On the use of a variational method based on approximating functions with finite carriers for calculating three-dimensional thin-walled structures. *XII All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied Mechanics*. Collection of works. In 4 volumes. Ufa. Publisher: Bashkir State University. 2019;3: 215–217. (In Russ.)
4. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Calculation of the elastoplastic deformations by the variational method based on functions with finite carriers. *Herald of Technological University*. 2021;24(4):102–106. (In Russ.)
5. Ashkeev Zh.A., Andreyachshenko V.A., Abishkenov M.Zh., Bukanov Zh.U. Determination of the stress state and the force of deformation of ball-shaped billets in a closed matrix. *PNRPU mechanics bulletin*. 2021;4:5–12. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>
6. Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov VO. Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder with a coating based on the gradient model of thermoelasticity. *PNRPU mechanics bulletin*. 2021;4:60–70. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.07>
7. Bogdanov N.P. Method of calculation of elastic-plastic torsion of cylindrical rods. *Collection of articles of the XI International Scientific and practical Conference*. Petrozavodsk. 2021;3:14–18. (In Russ.) EDN: GEWJKU
8. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Defining relations for nonlinear elastic bodies and their implementation in the calculation of axisymmetrically loaded shells of rotation based on a mixed FEM. *Scientific notes of Kazan University. Series: Physical and mathematical Sciences*. 2015;157(2):28–39. (In Russ.) EDN: UBGLNX
9. Davydov R.L., Sultanov L.U., Abdrakhmanova A.I. On an algorithm for calculating large elastic-plastic deformations of FEM in the collection. *Proceedings of the XI International Conference on Nonequilibrium Processes in Nozzles and Jets (NPNJ'2016)*, Alushta, May 25–31, 2016. Moscow: MAI Publ.; 2016:324–326. (In Russ.)
10. Rybakov V.A., Kupchekov A.M., Bikbaeva N.A. Physical nonlinearity in the calculation of reinforced concrete elements in the collection: problems of ensuring the functioning and development of ground infrastructure of weapon systems complexes. *Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference "Problems of ensuring the functioning and development of the ground infrastructure of weapons systems complexes"*. Publishing house: Military Space Academy named after A.F. Mozhaisky. Saint-Petersburg. 2018;3:55–61. (In Russ.)
11. Naizabekov A., Andreyachshenko V., Kliber J. Forming of microstructure of the Al–Si–Fe – Mn system alloy by equal channel angular pressing with backpressure. In: *Conf. Proc. 21st International Conference on Metallurgy and Materials (Metal–2012)*, Brno, Czech Republic. 2012:391–395.
12. Andreyachshenko V.A., Naizabekov A.B. Microstructural and mechanical characteristics of AlSiMnFe alloy processed by equal channel angular pressing. *Metalurgija*. 2016;55 (3):353–356.
13. Dorofeev O.V., Kurdyumova L.N., Rodin N.N. Formation of gradient submicro- and nanocrystalline structures in bulk structural materials. *Proceedings of the 3rd International Scientific and Technical Conference. Metallophysics*,

*mechanics of materials, nanostructures and deformation processes. METALLDEFORM — 2009. In 2 volumes. Vol. 1. Samara; 2009:229–232. (In Russ.)*

14. De Faria C.G., Almeida N.G.S., Balzuweit K., Aguilar M.T.P., Cetlin P.R. The effect of initial strain in the severe plastic deformation of aluminum on the subsequent work hardening regeneration through low strain amplitude multi-directional forging. *Materials Letters*. 2021;290(1):129462. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.129462>

15. Svyetlichnyy D.S., Majta J., Kuziak R., Muszka K. Experimental and modelling study of the grain refinement of Fe-30wt % Ni-Nb austenite model alloy subjected to severe plastic deformation process. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2021;21(1):1–14. <https://doi.org/10.1007/s43452-021-00178-7>

16. Segal V. Review: Modes and Processes of Severe Plastic Deformation (SPD). *Materials*. 2018;11(7):1175. <https://doi.org/10.3390/ma11071175>

17. Ashkeev Z.A., Andreyashchenko V.A., Abishkenov M.Zh., Bukanov Zh.U. Determination of the stress state and the force of deformation of ball-shaped billets in a closed matrix. *PNRPU mechanics bulletin*. 2021;4:5–12. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>

18. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2003. (In Russ.)

19. Dzhabrailov A.Sh., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Gureeva N.A., Ishchanov T.R. Nonlinear deformation of axisymmetrically loaded rotation shell based on fem with different variants of definitional equations. *Izvestiya of Saratov university. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022;22(1):48–61. (In Russ.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

20. Novatsky V. *The Theory of elasticity*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)

21. Novozhilov V.V. *Theory of elasticity*. Leningrad: Sudpromgiz Publ.; 1958. (In Russ.)

22. Abovsky N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. *Variational principles of elasticity theory and shell theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. (In Russ.)

23. Frolov A.V., Voevodin V.V., Konshin I.N., Teplov A.M. Investigation of the structural properties of the Cholesky decomposition algorithm: from long-known facts to new conclusions. *Vestnik UGASTU*. 2015;19(4):149–162. (In Russ.) EDN: WAHOER