

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177

EDN: LUJBRU

УДК 69.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Модели нелинейного деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии и их реализация в вычислительном комплексе ПРИНС

В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{1,2}, К.Р. Айдемиров³

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

³Дагестанский государственный технический университет, Махачкала, Российская Федерация

✉ agapovpb@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 15 января 2023 г.

Доработана: 25 марта 2023 г.

Принята к публикации: 30 марта 2023 г.

Аннотация. Современные строительные нормы и правила предписывают проводить расчеты бетонных и железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. При этом большинство отечественных конечноэлементных программных комплексов не позволяют выполнять такие расчеты в нелинейной постановке с учетом пластических деформаций бетона и арматуры. Для устранения этой проблемы разработана методика и построен объемный конечный элемент, адаптированный к вычислительному комплексу ПРИНС, позволяющий выполнять расчеты железобетонных конструкций с учетом их действительной работы. Цель исследования – разработка и реализация методики расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния с учетом как хрупкого разрушения, так и упругопластического деформирования бетона. Представлены конечноэлементная методика, алгоритм и программа расчета массивных железобетонных конструкций с учетом пластических деформаций бетона. В своей основе методика использует модифицированный критерий прочности Виллама и Варнке, дополненный критерием течения. Рассмотрены две модели объемного деформирования бетона: упругая модель при хрупком разрушении и идеально упругопластическая модель. Построен восьмиузловой конечный элемент с линейными аппроксимирующими функциями перемещений, реализующий указанные модели деформирования. Верификационные расчеты массивной бетонной конструкции в условиях трехосного сжатия свидетельствуют о точности и сходимости разработанных конечных элементов. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач, связанных с расчетами строительных конструкций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, строительные конструкции, массивные железобетонные сооружения, физическая нелинейность, пластичность, теория течения, механика деформируемых тел

Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С., Айдемиров К.Р. Модели нелинейного деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии и их реализация в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 162–177. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177>

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-1749-5797; agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, кандидат технических наук, доцент, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-3967-2114; markovich-as@rudn.ru

Айдемиров Курбан Рабаданович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теоретической и строительной механики, Дагестанский государственный технический университет, Махачкала, Российская Федерация; ORCID:0009-0005-1474-4275; kyrayd@mail.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., Айдемиров К.Р., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Models of nonlinear deformation of concrete in a triaxial stress state and their implementation in the PRINS computational complex

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{1,2}, Kurban R. Aidemirov³

¹RUDN University, Moscow, Russian Federation

²National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

³Daghestan State Technical University, Makhachkala, Russian Federation

✉ agapovpb@mail.ru

Article history

Received: January 15, 2023

Revised: March 25, 2023

Accepted: March 30, 2023

For citation

Agapov V.P., Markovich A.S., Aidemirov K.R. Models of nonlinear deformation of concrete in a triaxial stress state and their implementation in the PRINS computational complex. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):162–177. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177>

Abstract. Modern construction standards and regulations prescribe to carry out calculations of concrete and reinforced concrete structures in a nonlinear formulation with account of the real properties of concrete and reinforcement. However, the most of finite-element program complexes cannot perform such calculations in a nonlinear formulation with account of plastic deformations of concrete and reinforcement. To solve this problem, a methodology has been developed and a solid finite element adapted to the PRINS computing complex has been created, which made it possible to perform calculations of reinforced concrete structures considering their actual work. The aim of the study – development and implementation of a method for calculating reinforced concrete structures under conditions of a three-dimensional stress state, considering both brittle fracture and elastic-plastic deformation of concrete. A finite-element methodology, algorithm, and program for calculation of massive reinforced concrete structures with account of plastic deformations of concrete have been presented. The methodology is based on the modified Willam and Warnke strength criterion supplemented with the flow criterion. Two models of volumetric deformation of concrete have been regarded: the elastic model at brittle failure and the ideal elastoplastic model. An eight-node finite element with linear approximating functions of displacements implementing the mentioned deformation models is created. Verification calculations of a massive concrete structure in three-axial compression testify to the accuracy and convergence of the developed finite elements. The PRINS can be effectively used by engineers of designing and scientific organizations to solve a wide class of engineering problems related to calculations of building structures.

Keywords: finite element method, building structures, solid reinforced concrete structures, physical nonlinearity, plasticity, flow theory, mechanics of deformable solids

1. Введение

Современные строительные нормы и правила, принятые в Российской Федерации¹ и за рубежом², предписывают проводить расчеты железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. С одной стороны, проблема разработки методики расчета железобетонных конструкций с учетом трехосного напряженного состояния связана с необходимостью проведения дорогостоящих экспериментов [1–5]. С другой – предпосылки для успешного выполнения таких расчетов обусловлены развитием компьютерных технологий и разработкой численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов [6–10]. В результате такого развития нелинейные методы расчета были реализованы в ряде компьютерных программ, таких как NASTRAN [11], ANSYS [12], ABAQUS [13], ADINA [14], DIANA [15] и др. Общим для всех этих программ является использование

Vladimir P. Agapov, Doctor of Engineering, Professor, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1749-5797; agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3967-2114; markovich-as@rudn.ru

Kurban R. Aidemirov, PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Theoretical and Structural Mechanics, Dagestan State Technical University, Makhachkala, Russian Federation; ORCID: 0009-0005-1474-4275; kyrayd@mail.ru

¹ СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (утв. и введен в действие Приказом Минстрой России от 22.11.2019 № 717/пр) (ред. от 21.01.2022).

² CEB-FIP Model Code 1990. CEB Bulletin d'Information № 213/214. Lausanne: Comité Euro-International du Béton, 1993. 437 p.

шаговых методов. Система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона – Рафсона в полной или модифицированной форме. Уравнения равновесия на этапе нагружения записываются в виде

$$\mathbf{K}_j^i \Delta \mathbf{u}_j^i = \mathbf{P}_j - \mathbf{F}_j^{i-1}, \quad (1)$$

где \mathbf{K}_j^i – матрица касательной жесткости; $\Delta \mathbf{u}_j^i$ – вектор узловых перемещений; \mathbf{P}_j – вектор приложенных извне узловых нагрузок; \mathbf{F}_j^{i-1} – вектор узловых сосредоточенных сил, эквивалентных напряжениям элемента; j – номер шага; i – номер итерации.

Особенностью решения уравнения (1) методом Ньютона – Рафсона является вычисление и факторизация касательной матрицы жесткости на каждой итерации. В случае систем большого порядка такие вычисления могут быть довольно дорогостоящими.

При использовании модифицированного метода Ньютона матрица жесткости вычисляется и факторизуется только один раз в начале шага. Это упрощает вычисления, но требует большего количества итераций для достижения указанной точности. Поэтому для ускорения сходимости используются разные подходы, основанные на коррекции вектора перемещений на текущей итерации. Сделать это можно с помощью энергетических отношений. Такие методы принято называть квазиньютонами [16–18].

Следует, однако, отметить, что расчеты физически нелинейных конструкций в вышеупомянутых программах выполняются с использованием физических соотношений, основанных на определенных экспериментах, а полученные уравнения для конструкции в целом решаются приближенными методами. Для повышения достоверности результатов такие расчеты следует проводить с использованием нескольких программ. Поэтому конструкторы должны иметь в своем арсенале несколько доступных расчетных инструментов. В связи с этим разработка альтернативных вычислительных методов и соответствующих программ до сих пор остается актуальной задачей.

2. Материалы и методы

В данном исследовании рассматривается конечноэлементная методика расчета массивных железобетонных сооружений с учетом трещинообразования в растянутой и пластических деформаций в сжатой зонах бетона и в арматуре. Методика реализована в вычислительном комплексе (ВК) ПРИНС.

Расчет физически нелинейных конструкций с помощью ВК ПРИНС ведется методом конечных элементов в приращениях [8] по уравнению

$$\mathbf{K}_{NL} \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P}, \quad (2)$$

где \mathbf{K}_{NL} – полная нелинейная матрица жесткости, связывающая приращения узловых сил и перемещений; $\Delta \mathbf{u}$ и $\Delta \mathbf{P}$ – приращения узловых перемещений и узловых сил конечноэлементной модели соответственно.

Матрица \mathbf{K}_{NL} в интервале нагружения непрерывно изменяется, поэтому, чтобы получить точное решение, необходимо в формуле (2) перейти к интегрированию:

$$\int_{u_0}^{u_k} \mathbf{K}_{NL} d\mathbf{u} = \Delta \mathbf{P}, \quad (3)$$

где u_0 и u_k – значения перемещений в начале и конце интервала нагружения соответственно.

Однако вести вычисления по формуле (3) практически невозможно, так как не существует аналитического выражения для \mathbf{K}_{NL} , а верхняя граница интервала интегрирования неизвестна. Вычисляя вышеупомянутый интеграл по правилу трапеций, получаем

$$\frac{1}{2}(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1)\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P}, \quad (4)$$

где \mathbf{K}_0 и \mathbf{K}_1 – матрицы жесткости, вычисляемые в начале и конце шага нагружения соответственно.

Запишем уравнение (4) в виде

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P}, \quad (5)$$

где $\Delta\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0)$.

Уравнение (5) решается итерационным способом:

$$\mathbf{K}_0\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\mathbf{P} - \Delta\mathbf{K}_{i-1}\Delta\mathbf{u}_{i-1}, \quad (6)$$

где i – номер итерации.

При достижении сходимости итерационного процесса находятся полные значения перемещений и напряжений по формулам

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma}. \quad (7)$$

Приращения напряжений находятся по формуле

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8)$$

где \mathbf{C}_{ep} – упругопластическая матрица характеристик материала.

На каждом этапе нагружения анализируется напряженное состояние, и при возникновении пластических деформаций и трещин производится корректировка напряжений с учетом принятых диаграмм деформирования материалов. Это требует проведения процесса уравнивания конструкции. Равновесные итерации выполняются в программе ПРИНС по формуле (1), которая модифицируется к виду

$$\mathbf{K}_j\Delta\mathbf{u}_j^i = \mathbf{P}_j - \mathbf{F}_j^{i-1}. \quad (1a)$$

Различие между формулами (1) и (1a) состоит в том, что в формуле (1) матрица жесткости от итерации к итерации изменяется (имеются в виду итерации равновесия), а в формуле (1a) – не изменяется и берется равной матрице жесткости, найденной в конце шага при итерациях по формуле (6).

Таким образом, в формуле (6) итерируется матрица жесткости, а в формуле (1a) – вектор узловых сил, эквивалентный внутренним напряжениям.

Матрица жесткости \mathbf{K} для отдельного конечного элемента находится по формуле [7]

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_e \mathbf{B} dV, \quad (9)$$

где \mathbf{B} – матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица); \mathbf{C}_e – матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций (физическая матрица).

Методика вычисления геометрической матрицы \mathbf{B} хорошо известна (см., например, [8]).

При построении физической матрицы принято две модели деформирования бетона:

- 1) упругая модель при хрупком разрушении;
- 2) идеально упругопластическая модель.

Для арматуры принимается гипотеза идеального упругопластического поведения. Ниже приводятся характеристики каждой из рассматриваемых моделей.

Упругая модель при хрупком разрушении (модель 1). Поведение бетона считается линейно-упругим вплоть до достижения поверхности разрушения.

Матрица C_e при этом содержит коэффициенты обобщенного закона Гука и имеет следующий вид:

$$C_e = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{\mu(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В качестве поверхности разрушения принята пятипараметрическая модель, предложенная Вилломом и Варнке [19]. Схематическое изображение поверхности разрушения в пространстве главных напряжений показано на рис. 1. На рис. 2 приведено девиаторное сечение этой поверхности, а на рис. 3 – главные меридианы растяжения и сжатия.

Условие прочности определяется формулой

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \frac{1}{\bar{r}(\sigma_m, \theta)} \frac{\tau_m}{R_b} - 1 = 0, \quad (11)$$

где σ_m и τ_m – средние значения нормальных и касательных напряжений в окрестности точки; θ – угол вида напряженного состояния; $\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{r}{\sqrt{5}R_b}$ – радиус-вектор точки на поверхности разрушения в девиаторном сечении (рис. 2).

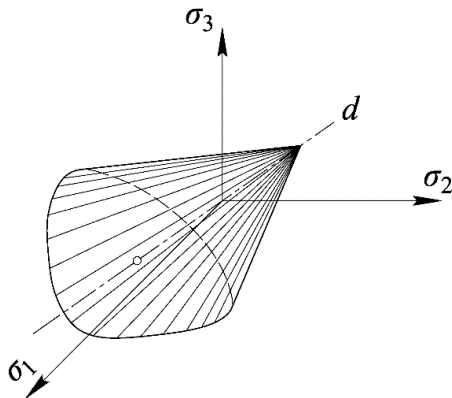


Рис. 1. Поверхность разрушения в пространстве главных напряжений:
 d – гидростатическая ось

Figure 1. Fracture surface in the space of principal stresses:
 d – hydrostatic axis

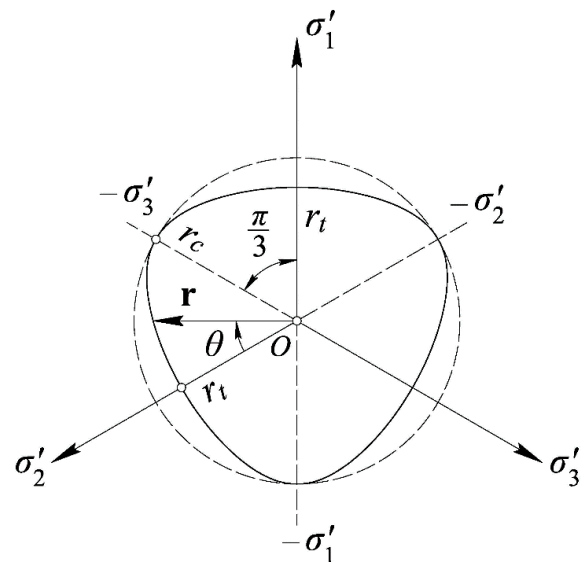


Рис. 2. Девиаторное сечение поверхности разрушения:
 r_t и r_c – меридианы растяжения и сжатия;

θ – угол вида напряженного состояния

Figure 2. Deviatoric section of the fracture surface:

r_t and r_c – the meridians of tension and compression;

θ – the angle of the type of the stress state

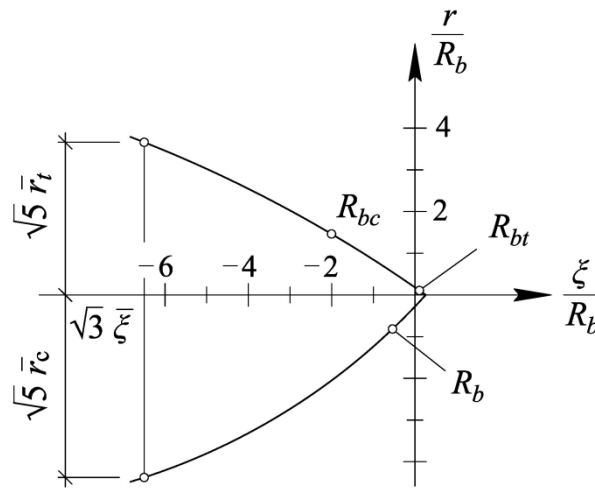


Рис. 3. Меридианы растяжения и сжатия поверхности разрушения:

R_b и R_{bt} – пределы прочности бетона на осевое сжатие и растяжение; R_{bc} – предел прочности бетона на равномерное двухосное сжатие;

$$r = \sqrt{5}\tau_m; \quad \xi = \sqrt{3}\sigma_m$$

Figure 3. The meridians of tension and compression of the fracture surface:

R_b and R_{bt} – ultimate strength of concrete for axial compression and tension; R_{bc} – ultimate strength of concrete for uniform biaxial compression;

$$r = \sqrt{5}\tau_m; \quad \xi = \sqrt{3}\sigma_m$$

Следовательно, при напряжениях, соответствующих разрушению бетона в сжатой зоне,

$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{\tau_m}{R_b}. \quad (12)$$

Радиус-вектор $\bar{r}(\sigma_m, \theta)$ определяется формулой

$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c)\left[4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c\right]^{1/2}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2}. \quad (13)$$

Угол вида напряженного состояния θ находится по формуле

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\left[2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2}}. \quad (14)$$

Радиус-векторы r_t и r_c (рис. 2) определяют меридианы растяжения ($\theta = 0$) и сжатия ($\theta = \pi/3$). В модели Виллама – Варнке эти меридианы представляются квадратными параболлами:

$$\frac{\tau_{m,t}}{R_b} = r_t = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + a_2 \left(\frac{\sigma_m}{R_b}\right)^2; \quad \frac{\tau_{m,c}}{R_b} = r_c = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + b_2 \left(\frac{\sigma_m}{R_b}\right)^2. \quad (15)$$

Коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и b_0 , b_1 , b_2 определяются на основе экспериментальных данных для конкретных марок бетона. Необходимые данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Определение параметров модели Виллама – Варнке

Вид напряженного состояния	Критерий	Напряжения	Угол θ
1. Одноосное сжатие	R_b	$\sigma_3 = -R_b; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$	0
2. Одноосное растяжение	R_{bt}	$\sigma_1 = R_{bt};$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bt} = \frac{R_{bt}}{R_b}$	0
3. Равномерное двухосное сжатие	R_{bc}	$\sigma_1 = \sigma_2 = -R_{bc}; \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_b} = 1,2$	0
4. Трехосное сжатие в режиме высокой компрессии ($\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_1;$ $\bar{\xi}_1 > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_1$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_1 = 3,67^*; \bar{r}_1 = 1,59^*$	0
5. Трехосное сжатие в режиме низкой компрессии ($\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_2;$ $\bar{\xi}_2 > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_c = 3,67^*; \bar{r}_c = 1,94^*$	$\pi/3$

Примечание: * согласно результатам экспериментов Лоне и Гашона [20].

Table 1

Determination of the parameters of the Willam – Warnke model

Type of stress state	Criterion	Stresses	Angle θ
1. Uniaxial compression	R_b	$\sigma_3 = -R_b; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$	0
2. Uniaxial tension	R_{bt}	$\sigma_1 = R_{bt};$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bt} = \frac{R_{bt}}{R_b}$	0
3. Uniform biaxial compression	R_{bc}	$\sigma_1 = \sigma_2 = -R_{bc}; \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_b} = 1,2$	0
4. Triaxial compression in high compression mode ($\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_1;$ $\bar{\xi}_1 > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_1$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_1 = 3,67^*; \bar{r}_1 = 1,59^*$	0
5. Triaxial compression in low compression mode ($\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_2;$ $\bar{\xi}_2 > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_c = 3,67^*; \bar{r}_c = 1,94^*$	$\pi/3$

Note: * according to the experimental results of Launay and Gachon [20].

Подставляя, приведенные в табл. 1 значения, отвечающие пяти различным напряженным состояниям, в первое уравнение (15) для меридиана растяжения ($\theta = 0$), получим систему трех квадратных уравнений, решение которой позволяет найти значения параметров a_0 , a_1 , a_2 для данного меридиана:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} a_1 - \frac{4}{9} \bar{R}_{bc}^2 a_2 + \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{R}_{bc}; \\ a_1 &= \frac{1}{3} (2\bar{R}_{bc} - \bar{R}_{bt}) a_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}}{2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}}; \\ a_2 &= \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} \bar{\xi}_t (\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}) - \sqrt{\frac{6}{5}} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} + \bar{r}_t (2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt})}{(2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}) \left(\bar{\xi}_t^2 - \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} \bar{\xi}_t + \frac{1}{3} \bar{R}_{bt} \bar{\xi}_t - \frac{2}{9} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} \right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Вершина поверхности разрушения находится из условия $r(\sigma_m) = 0$. Следовательно, $a_2 \rho^2 + a_1 \rho + a_0 = 0$. Откуда ее координата равна

$$\rho = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}. \quad (17)$$

Аналогичным образом можно получить значения параметров b_0 , b_1 , b_2 для меридиана сжатия при $\theta = \pi/3$:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\rho b_1 - \rho^2 b_2; \quad b_1 = \left(\bar{\xi}_c + \frac{1}{3} \right) b_2 + \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} - 3r_c}{3\bar{\xi}_c - 1}; \\ b_2 &= \frac{r_c \left(\rho + \frac{1}{3} \right) - \sqrt{\frac{2}{15}} (\bar{\xi}_c + \rho)}{(\bar{\xi}_c + \rho) \left(\bar{\xi}_c - \frac{1}{3} \right) \left(\rho + \frac{1}{3} \right)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Поверхность разрушения является выпуклой, если соблюдаются условия

$$a_0 > 0; \quad b_0 > 0; \quad a_1 \leq 0; \quad b_1 \leq 0; \quad a_2 \leq 0; \quad b_2 \leq 0 \quad (19)$$

и

$$\frac{r_t(\sigma_m)}{r_c(\sigma_m)} > \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Идеально упругопластическая модель (модель 2). Поведение бетона считается линейно-упругим вплоть до достижения предельной поверхности. В качестве предельной поверхности принимается пяти-параметрическая поверхность Виллама – Варнке, описанная выше. При достижении этой поверхности поведение бетона становится упругопластическим.

Если поверхность текучести ассоциирована с предельной поверхностью, то закон пластического течения записывается в виде

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (21)$$

где $d\lambda$ – положительный скалярный коэффициент, который отличен от нуля при наличии пластических деформаций.

Как известно, приращение упругих деформаций равно

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (22)$$

Согласно обобщенному закону Гука, приращения напряжений связаны с приращением упругих деформаций соотношением

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e. \quad (23)$$

Подставляя (22) в уравнение (23) с учетом соотношения (21), находим вектор приращения напряжений:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}), \quad (24)$$

где $\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ представляет собой вектор нормали к поверхности текучести (вектор течения).

Для случая идеальной упругопластичности справедливо уравнение

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \mathbf{C}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}) = 0. \quad (25)$$

Откуда получим значение множителя $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e \mathbf{a}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (26)$$

В этом случае формула (8) принимает вид

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \left(\mathbf{C}_e - \mathbf{C}_e \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{C}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e \mathbf{a}} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \mathbf{C}_e \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{C}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e \mathbf{a}} \quad (28)$$

есть упругопластическая матрица бетона.

Для вычисления матрицы \mathbf{C}_{ep} необходимо определить вектор течения \mathbf{a} .

Таким образом, задача сводится к дифференцированию функции (11). Используя правило дифференцирования сложных функций, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \tau_m} \frac{\partial \tau_m}{\partial \sigma} \quad (29)$$

Найдем производные, входящие в формулу (29).

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = -\frac{\tau_m}{R_b} \frac{1}{\bar{r}^2}. \quad (30)$$

Формулу (13) представим в виде

$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{s+t}{v}, \quad (31)$$

где

$$s(\sigma_m, \theta) = 2(r_c^3 - r_c r_t^2) \cos \theta;$$

$$t(\sigma_m, \theta) = r_c (2r_t - r_c) \left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2};$$

$$v(\sigma_m, \theta) = 4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + (r_c - 2r_t)^2. \quad (32)$$

Тогда

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \sigma_m} = \frac{v \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial t}{\partial \sigma_m} \right) - (s+t) \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma_m} \right)}{v^2}, \quad (33)$$

где

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma_m} = 2 \cos \theta \left[(3r_c^2 - r_t^2) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m} - 2r_c r_t \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} \right]; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \sigma_m} = & \left[2r_c \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} + 2(r_t - r_c) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m} \right] \left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2} + \\ & + \frac{(2r_t r_c - r_c^2) \left[(-8r_t \cos^2 \theta + 10r_t - 4r_c) \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} + (8r_c \cos^2 \theta - 4r_t) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m} \right]}{2 \left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (35)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma_m} = (8r_t \sin^2 \theta - 4r_c) \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} + (8r_c \cos^2 \theta + 2r_c - 4r_t) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m}. \quad (36)$$

Найденные производные – скаляры.

Кроме того,

$$\frac{d\sigma_m}{d\sigma} = \frac{1}{3} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (37)$$

Найдем второе и третье слагаемое формулы (29).

Для вычисления $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}$ радиус-вектор точки в девиаторной плоскости представим в виде

$$\bar{r}(\theta) = \frac{u(\theta)}{v(\theta)}, \quad (38)$$

где

$$u(\theta) = 2r_c (r_c^2 - r_t^2) \cos \theta + r_c (2r_t - r_c) \left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2} \quad (39)$$

и

$$v(\theta) = 4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + (r_c - 2r_t)^2. \quad (40)$$

Угол вида напряженного состояния определяется формулой (14):

$$\cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\left[2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{30}\tau_m} = \frac{p}{q} \quad (41)$$

при $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Производную $\frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$ представим в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}. \quad (42)$$

Производная отношения (38) равна

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = \frac{v(\partial u / \partial \theta) - u(\partial v / \partial \theta)}{v^2}, \quad (43)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r_c (r_c^2 - r_t^2) \sin \theta - r_c (2r_t - r_c) \frac{4(r_c^2 - r_t^2) \cos \theta \sin \theta}{\left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2}} \quad (44)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -8(r_c^2 - r_t^2) \cos \theta \sin \theta. \quad (45)$$

Производную $\partial\theta/\partial\sigma$ найдем, используя формулу (41):

$$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = \frac{\partial[\arccos(p/q)]}{\partial\sigma} = -\frac{1}{[1-(p/q)^2]^{1/2}} \frac{q(\partial p/\partial\sigma) - p(\partial q/\partial\sigma)}{q^2}. \quad (46)$$

Производные в числителе формулы (41) равны

$$\frac{\partial p}{\partial\sigma} = [2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{и} \quad \frac{\partial q}{\partial\sigma} = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{1}{\tau_m} \mathbf{s}. \quad (47)$$

Причем

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3} [2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 \quad 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 \quad 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (48)$$

Найдем третье слагаемое формулы (29):

$$\frac{\partial f}{\partial\tau_m} \frac{\partial\tau_m}{\partial\sigma} = \frac{1}{5} \frac{1}{\bar{r}(\sigma_m, \theta) R_b \tau_m} \mathbf{s}. \quad (49)$$

Таким образом, вектор течения \mathbf{a} найден.

Для реализации поставленной задачи разработана программа, адаптированная к ВК ПРИНС.

3. Результаты и обсуждение

В качестве примера рассмотрим расчет на прочность фундаментного блока (рис. 4), подвергнутого осевому давлению и находящегося в условиях трехосного напряженного состояния. Расчетная схема блока при различных значениях параметра сетки конечных элементов приведена на рис. 5. Материал блока – бетон класса В25. Характеристики материала: предел прочности при осевом сжатии $R_b = 18,5$ МПа, предел прочности при осевом растяжении $R_{bt} = 1,55$ МПа, начальный модуль упругости $E_0 = 3 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$. Интенсивность давления принята равной $p = 2$ МПа.

В результате расчета определялась предельная (разрушающая) нагрузка $p_{ult} = kp$, где k – множитель (параметр) нагрузки.

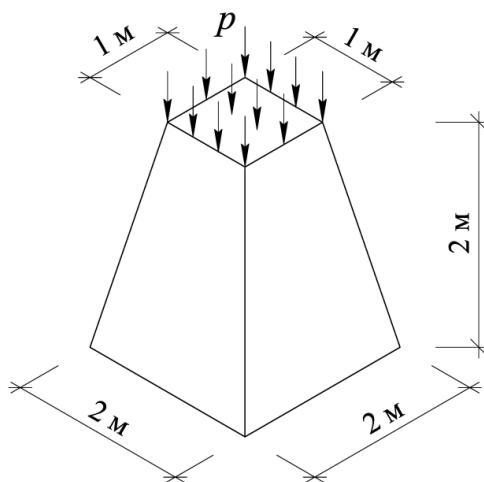


Рис. 4. Расчет фундаментного блока
Figure 4. Calculation of the foundation block

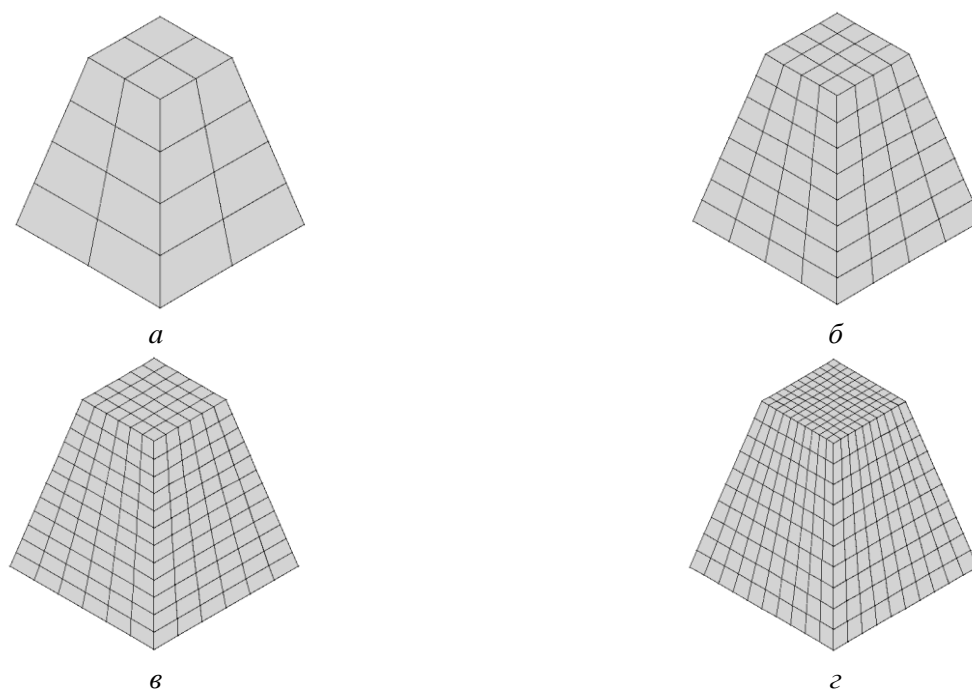


Рис. 5. Конечноэлементные схемы фундаментного блока:
a – схема 2×4; *б* – схема 4×8; *в* – схема 8×16; *г* – схема 16×32
Figure 5. Finite element schemes of the foundation block:
a – scheme 2×4; *б* – scheme 4×8; *в* – scheme 8×16; *г* – scheme 16×32

Расчеты выполнялись шагово-итерационным методом. Коэффициенты к нагрузке на первых семи шагах принимались равными 1,00, на последующих шагах – 0,5 и 0,25 соответственно.

Результаты расчета представлены в табл. 2.

Таблица 2

Значение параметра критической нагрузки

Конечноэлементная схема	Модель деформирования бетона	
	1	2
2×4	14,50	22,25
4×8	15,50	20,00
8×16	13,00	19,00
16×32	12,50	18,50

Table 2

Value of critical load parameter

Finite-element scheme	Model of concrete deformation	
	1	2
2×4	14.50	22.25
4×8	15.50	20.00
8×16	13.00	19.00
16×32	12.50	18.50

Как видно из табл. 2, имеет место сходимость результатов при сгущении сетки конечных элементов, а удовлетворительная точность достигается при размере конечных элементов, равном 1/6 минимального линейного размера конструкции. При этом предельная нагрузка, составляя 25 МПа при хрупком и 37 МПа при пластичном разрушении, оказывается выше предела прочности бетона при осевом сжатии.

Полученные данные вполне соответствует многочисленным экспериментам, показывающим увеличение прочности бетона при трехмерном напряженном состоянии по сравнению с осевым сжатием³ [21–24].

На рис. 6 представлены равновесные кривые для двух моделей деформирования бетона.

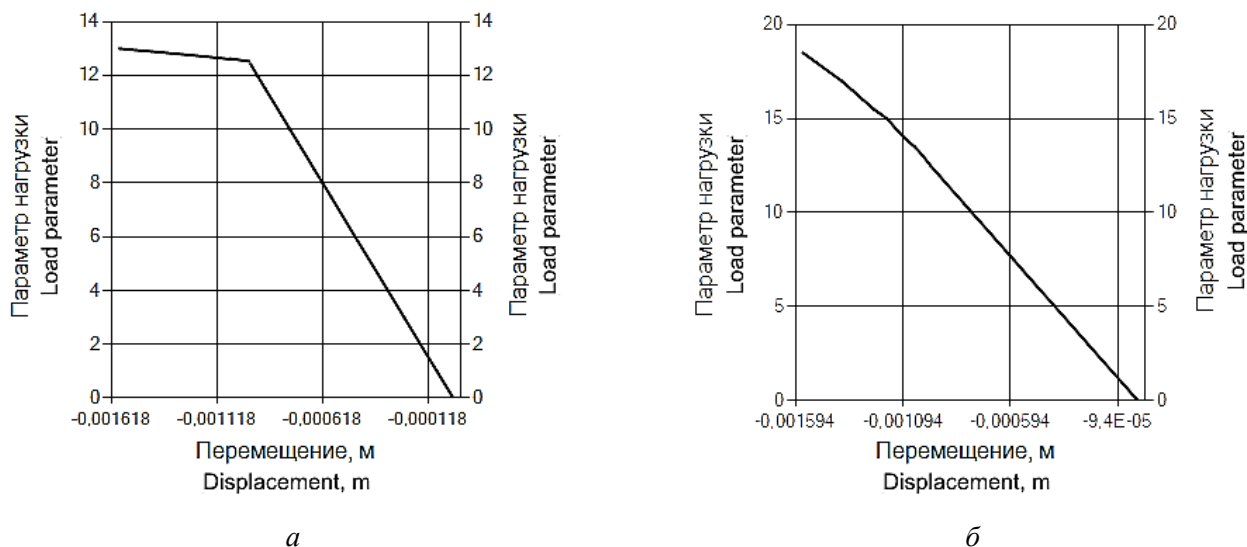


Рис. 6. Равновесные кривые «параметр нагрузки – перемещение» для срединного узла верхней поверхности блока: *a* – для модели 1; *б* – для модели 2

Figure 6. Equilibrium curves “load parameter – displacement” for the middle node of the upper surface of the block: *a* – for model 1; *б* – for model 2

В случае хрупкой модели деформирования разрушение конструкции происходит в результате раздавливания бетона верхней и средней частей фундаментного блока (рис. 7).

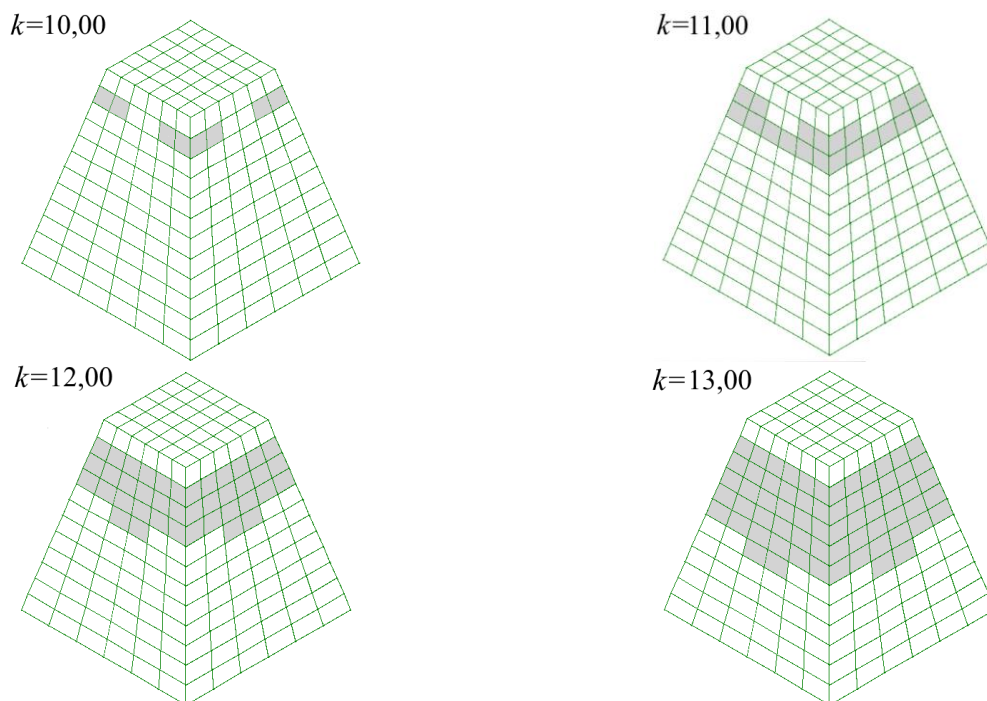


Рис. 7. Схемы разрушения фундаментного блока для модели 1
Figure 7. Schemes of destruction of the foundation block for model 1

³ Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях. М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1985. 72 с.

Поля нормальных напряжений σ_z в момент полного разрушения конструкции ($k = 13,00$) показаны на рис. 8.

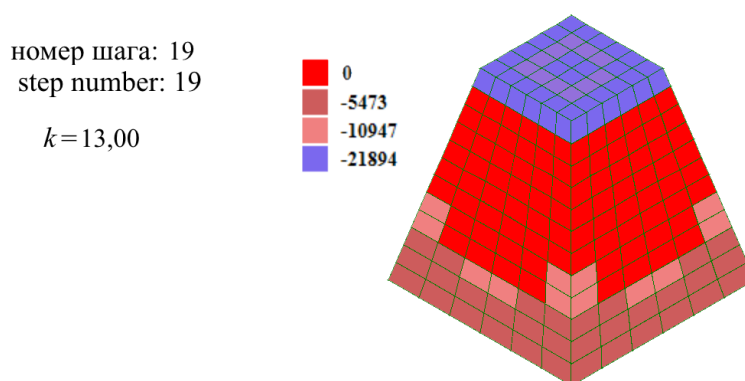


Рис. 9. Поля нормальных напряжений σ_z , МПа, для модели 1 в момент полного разрушения фундаментного блока
Figure 9. Normal stress fields σ_z , МПа, for model 1 at the moment of complete destruction of the foundation block

Таким образом, ВК ПРИНС может эффективно применяться специалистами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач [25–27].

4. Заключение

Рассматриваемые модели деформирования бетона реализованы в вычислительном комплексе ПРИНС. Первая модель ожидаемо показывает заниженное значение предельной нагрузки. Идеально упругопластическая модель деформирования бетона по сравнению с хрупкой моделью разрушения демонстрирует увеличение прочности на 40 %, что отвечает результатам многочисленных экспериментов. Поэтому для получения достоверных результатов расчета бетонных и железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, рекомендуется использовать модели деформирования, учитывающие пластическое деформирование бетона.

Список литературы / References

1. Mahmood M.R., Abbas M.M., Mahmood M.M. Linear and Nonlinear 3-d finite element analysis for mat foundations. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021;112:229–242. https://doi.org/10.1007/978-981-15-9399-4_20
2. Hu L., Li S., Zhu J., Yang X. Mathematical model of constitutive relation and failure criteria of plastic concrete under true triaxial compressive stress. *Materials*. 2021;14(1):102. <https://doi.org/10.3390/ma14010102>
3. Wang J., Xie F., Zhang C., Ruan J. Experimental study and failure criterion analysis on combined compression-shear performance of self-compacting concrete. *Materials*. 2020;13(3):713. <https://doi.org/10.3390/ma13030713>
4. Rakic D., Bodić A., Milivojevic N., Dunić V., Živković M. Concrete damage plasticity material model parameters identification. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2021;15:111–122. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11>
5. Al-Brees R.H., Abu Mahadi M.I., Al-Gasham T.S., Naji A.J. Three-dimensional finite element analysis of composite steel – concrete arches. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*. 2023;11(2):22–35. <http://doi.org/10.21533/pen.v11i2.3448>
6. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2005. (In Russ.)
Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2005. 245 с.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element for solid and structural mechanics*. 6th ed. McGraw-Hill; 2005.
8. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. New Jersey: Prentice-Hall; 1976.
9. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd.; 1977.
10. Oden J.T. *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw, Hill Book Company; 1972.
11. *MSC NASTRAN 2016. Nonlinear user's guide SOL 400*. MSC Software; 2016.
12. *ANSYS theory reference. Release 5.6*. Canonsburg, PA: ANSYS Inc.; 1999.
13. *ABAQUS 6.11. Theory manual*. DS Simulia; 2011.
14. *ADINA theory and modeling guide*. Watertown: ADINA R&D, Inc.; 1997.
15. Ferreira D. *DIANA FEA user's manual, release notes, DIANA documentation and verification report*. 31.05.2023.
16. Shanno D.F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*. 1970;24:647–656. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1970-0274029-X>

17. Dennis J.E., More J.J. Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Review*. 1977;19(1):46–89. <https://doi.org/10.1137/1019005>
18. Matthies H., Strang G. The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979;14:1613–1626.
19. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19*. 1975; III:1–30.
20. Launay P., Gachon H. Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress. *Prestressed Concrete Pressure Vessels. Mathematical-Physical Characterization of Concrete*. Berlin: IASMiRT; 1971. Available from: <http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.20/29024> (accessed: 22.02.2023).
21. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal, Proceedings*. 1969;66(8):656–666.
22. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. *ACI Journal*. 1970;67(10):802–807.
23. Korsun V.I. Comparative analysis of the strength criteria for concrete. *Modern Industrial and Civil Construction*. 2014;10(1):65–78. (In Russ.)
- Корсун В.И., Недорезов А.В., Макаренко С.Ю. Сопоставительный анализ критериев прочности для бетонов // Современное промышленное и гражданское строительство. 2014. Т. 10. № 1. С. 65–78.
24. Hansen T.C. *Triaxial test with concrete and cement paste. Report No. 319*. Lyngby: Technical University of Denmark; 1995.
25. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>
26. Agapov V.P., Markovich A.S. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):380–389. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
- Агапов В.П., Маркович А.С. Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 380–389. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
27. Agapov V.P., Markovich A.S. Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):617–627. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627>
- Агапов В.П., Маркович А.С. Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-671-627>