



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-149-161

EDN: MNXPBW

УДК 624.04:004

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Учет демпфирования в сплошной среде с использованием стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну

В.Б. Зылев , П.О. Платнов  

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация

 manuntdfan@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 17 февраля 2023 г.

Доработана: 12 апреля 2023 г.

Принята к публикации: 15 апреля 2023 г.

Для цитирования

Зылев В.Б., Платнов П.О. Учет демпфирования в сплошной среде с использованием стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 149–161. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-149-161>

Аннотация. Цель исследования – создание метода учета внутреннего трения, который обеспечивает частотную независимость, учитывает зависимость внутреннего трения от уровня напряженного состояния и является пригодным для физически нелинейных задач при больших и малых перемещениях. Рассмотрен приближенный способ учета демпфирования в пластинах с привлечением стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну. Проанализирована дискретная среда Ржаницына с квадратной ячейкой с точки зрения изотропности ее свойств демпфирования. Для восьми характерных направлений ориентации деформаций показано точное выполнение свойств изотропности демпфирования. Дано решение тестового примера, в котором колеблющийся при растяжении стержень рассчитывается по двум расчетным схемам, одна из которых представляет действительный стержень, а другая – прямоугольную пластинку, испытывающую одноосное растяжение, для динамического моделирования которой в свою очередь используется дискретная модель А.Р. Ржаницына. Использование одинаковых параметров демпфирования для действительного стержня и стержней в аппроксимации Ржаницына приводит к близкому затуханию. Разработан приближенный подход к учету внутреннего трения при колебаниях двумерной сплошной среды, а также вариант уточнения сил демпфирования в пластине. Приведен численный пример моделирования затухания в случае рассмотрения геометрически и физически нелинейных колебаний.

Ключевые слова: частотно-независимое демпфирование, изотропность свойств демпфирования, двумерная среда, обобщенная диаграмма Прандтля, физическая нелинейность, большие перемещения, численные решения, задачи динамики

Зылев Владимир Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-5160-0389; zylevzb@ya.ru

Платнов Павел Олегович, аспирант, кафедра строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-9765-7417; manuntdfan@mail.ru

© Зылев В.Б., Платнов П.О., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Consideration of damping in a continuous medium using the rod approximation by A.R. Rzhanitsyn

Vladimir B. Zylev , Pavel O. Platnov  

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

 manuntdfan@mail.ru

Article history

Received: February 17, 2023

Revised: April 12, 2023

Accepted: April 15, 2023

For citation

Zylev V.B., Platnov P.O. Consideration of damping in a continuous medium using the rod approximation by A.R. Rzhanitsyn. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):149–161. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-149-161>

Abstract. The work is focused on creating a method for accounting of internal friction, which provides frequency independence, considers the dependence of internal friction on the level of the stress state, and is suitable for physically nonlinear tasks at large and small displacements. The authors consider an approximated method of accounting of damping in plates using the rod approximation according to A.R. Rzhanitsyn. An analysis of the discrete Rzhanitsyn medium with a square cell is given in terms of isotropy of its damping properties. The exact fulfillment of the isotropic damping properties is shown for the eight specific directions in the orientation of the deformations. The solution for a test example is given, where a rod oscillating in tension is calculated according to two computational schemes. One of these schemes is a real rod, the other is a rectangular plate experiencing uniaxial tension, and for its dynamic modeling, in turn, the discrete model by A.R. Rzhanitsyn is applied. The use of the same damping parameters for the real rod and rods in the Rzhanitsyn approximation leads to close damping. An approximate approach has been developed to account for internal friction during vibrations of a two-dimensional continuous medium, as well as a variant of clarifying the damping forces in the plate. A numerical example of damping modeling is given in the case of considering geometrically and physically nonlinear oscillations.

Keywords: frequency-independent damping, isotropy, dampening properties, two-dimensional medium, generalized Prandtl diagram, physical nonlinearity, large displacements, numerical solutions, problems of dynamics

1. Введение

Силы внутреннего трения в материале при движении упругой системы оказывают сильное влияние на течение динамического процесса. От их правильного задания в расчете зависят искомые динамические факторы – максимальные перемещения, скорости, ускорения, усилия. В предыдущих работах [1–3] мы экспериментально изучали затухающие колебания для случая одноосного напряженного состояния. Для ряда динамических задач [1; 4–6] нами разрабатывались и исследовались компьютерные модели при использовании численных шаговых решений с привлечением явной вычислительной схемы интегрирования уравнений движения с учетом демпфирования. Элементами деформируемых систем являлись стержни, работающие в условиях одноосного напряженного состояния. Использовались разные варианты учета сил демпфирования, но основной подход, который рассматривается и в данной работе, близок к идее А.Ю. Ишлинского [7] о представлении деформируемого тела как неоднородной упругопластической среды. В [1] упрощенный вариант введения сил внутреннего трения, реализованный в нашей компьютерной программе [4; 8], был основан на обобщенной модели Прандтля. Не имея возможности его здесь подробно описывать, сошлемся на работы, содержащие такое описание [1; 3], где использован явный вычислительный алгоритм моделирования движения [4; 8] с привлечением экстраполяции по Адамсу.

Здесь ограничимся лишь самым кратким описанием модели демпфирования применительно к одноосному напряженному состоянию. Действительный стержень разбивается на несколько полос, каждая

Vladimir B. Zylev, Doctor of Science (Technical), Professor, Head of the Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5160-0389; zylevzb@ya.ru

Pavel O. Platnov, PhD student, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9765-7417; manuntdfan@mail.ru

из которых подчиняется диаграмме Прандтля. Суммарная площадь поперечного сечения всех полос равняется действительной площади поперечного сечения стержня. Каждая полоса имеет свой предел текучести и вступает в пластическую деформацию, когда напряжение в ней достигнет значения этого предела. Собранные вместе полосы обеспечивают получение гистерезисных петель, от весьма узких при малых деформациях до все более широких при больших деформациях. Таким образом, потери энергии, которые обеспечивает модель, будут сильно зависеть от уровня амплитуд напряжений, что отчетливо прослеживается в экспериментах [3; 9]. Модель дает частотно независимое внутреннее трение [9; 10], что также отмечено в работах [11–15] и чему мы находили стабильные экспериментальные подтверждения [2; 3]. В связи с учетом влияния амплитудных напряжений на внутреннее трение, необходимо отметить работы [16–19].

Основная **цель исследования** – распространение рассматриваемого подхода к учету демпфирования на двумерные задачи. Остановимся на плоской динамической задаче теории упругости.

А.Р. Ржаницын предложил заменять в расчетах упругую среду набором из стержней, работающих на растяжение – сжатие, соединенных шарнирами в узлах (рис. 1).

При большом количестве узлов модель Ржаницына дает изотропную упругую среду, правда с единственно возможным значением коэффициента Пуассона $\mu = 1/3$. Модель Ржаницына обобщается и на трехмерную задачу [20], но в данной работе мы ограничимся двумерной задачей. Несмотря на очевидные недостатки модели Ржаницына, она обладает и определенными преимуществами: основана на использовании простейшего конечного элемента в виде растянутого стержня, легка в программировании и визуализации, допускает легкое обобщение на большие перемещения.

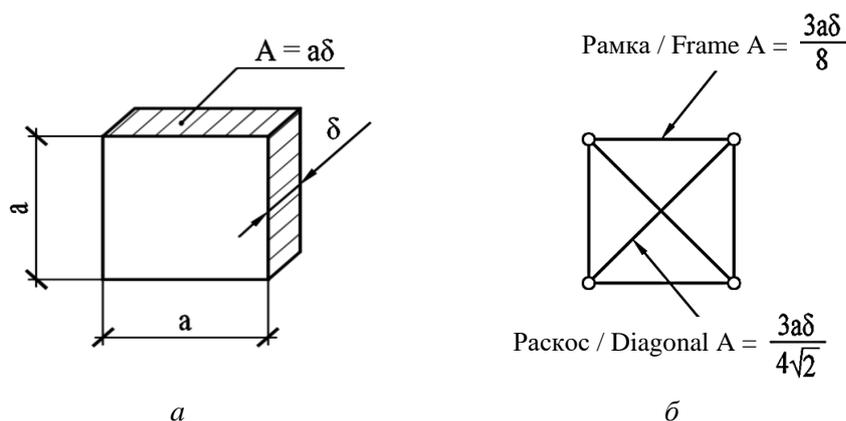


Рис. 1. Модель А.Р. Ржаницына:
a – заменяемый квадратный элемент пластинки; *b* – заменяющий стержневой набор
Figure 1. Model by A.R. Rzhantsyn:
a – replaceable square plate element; *b* – replacing rod set

И еще одно преимущество модели Ржаницына – возможность моделирования сил внутреннего трения, чему и посвящено настоящее исследование.

2. Методы

Способ учета внутреннего трения, который мы предлагаем для двумерной задачи, сформулировать весьма просто: для всех стержней аппроксимирующей системы вводится алгоритм вычисления продольных сил, полученный для одноосного напряженного состояния. В табл. 1 приведены значения параметров затухания при одноосном растяжении для образца из малоуглеродистой стали, полученные нами в лаборатории [2].

Таблица 1

Подобранные параметры модели демпфирования для материала из малоуглеродистой стали

Доля площади полосы, %	0,81	0,21	0,38	0,2	0,43	0,69	0,67	0,96	0,85	94,8
Относительная деформация при текучести в полоске $\epsilon_t \cdot 10^5$	0,25	1,23	2,474	4,687	7,812	12,57	21,61	42,19	63,28	150

Selected parameters of the damping model for low-carbon steel material

Share of strip area, %	0.81	0.21	0.38	0.2	0.43	0.69	0.67	0.96	0.85	94.8
Relative deformation at yield in the strip $\varepsilon_y \cdot 10^5$	0.25	1.23	2.474	4.687	7.812	12.57	21.61	42.19	63.28	150

В табл. 1 приведены доли площади каждой полосы от общей площади поперечного сечения образца и относительные деформации, которым соответствуют напряжения предела текучести для каждой из десяти полосок. Как видно, до $\varepsilon = 63,28 \cdot 10^{-5}$ всего лишь 5,2 % сечения входят в текучесть, остальной материал стержня работает как упругий. Глобальная текучесть стержня наступает при $\varepsilon = 150 \cdot 10^{-5}$, причем при разгрузке материал вновь переходит в упругую работу, таким образом реакция стержня зависит от истории его нагружения. Модель демпфирования, конечно, достаточно сложна, ее включение в расчет увеличивает время моделирования задачи примерно в два раза. Однако модель является частотно независимой, автоматически учитывает сильную зависимость демпфирования от уровня напряжений, неизбежно включает учет пластических деформаций, учитывает взаимное влияние отдельных форм колебаний через демпфирование. Перечисленные преимущества существенны с точки зрения правильного отражения свойств демпфирования. Основной недостаток модели внутреннего трения, основанной на обобщенной модели Прандтля, – необходимость использования нелинейных уравнений движения. Этот недостаток, являющийся фатальным при использовании традиционных методов интегрирования уравнений движения, вовсе не является недостатком при использовании явной схемы интегрирования уравнений движения [4; 8].

Модель Ржаницына дает изотропную среду в смысле упругости. Вопрос изотропности среды в смысле демпфирования неочевиден, далее мы постараемся его выяснить. Также следует определить, как влияет переход к двумерной среде на количественные показатели затухания.

Чтобы проверить выполнение хотя бы необходимого условия изотропности, сравним потери энергии в стержнях для одной характерной ячейки стержневой модели (см. рис. 1). Сравнение сведено в табл. 2. Левый столбец таблицы соответствует заданию деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} в осях координат с горизонтальным расположением оси x . В правом столбце такие же деформации задаются в осях, повернутых под углом 45° .

Прежде всего заметим, используя рис. 1, б, что объем материала двух элементов рамки модели Ржаницына равен объему материала раскоса. В соответствии с этим стержни модели разбиты на четыре подгруппы с равными объемами: горизонтальные стержни рамки; вертикальные стержни рамки; восходящий раскос; нисходящий раскос. В левом и правом столбцах табл. 2 можно найти подгруппы стержней, в которых возникают одинаковые деформации. Отсюда можно сделать вывод об одинаковых потерях энергии для случаев, когда деформации заданы в исходных и повернутых под углом 45° осях.

На основании выполненного анализа и рассмотрения структуры модели можно показать восемь положений осей координат, задание одинаковых деформаций в которых приведет к одинаковому рассеянию энергии (рис. 2). Для произвольного положения осей, показанного на рис. 2 пунктиром, условие изотропности будет выполняться приближенно. Можно высказать предположение, что степень погрешности в изотропности свойств демпфирования будет небольшой. Таким образом, констатируем, что совершенной изотропности по демпфированию модель Ржаницына не даст, но будет к ней достаточно близка.

Далее перейдем к количественному анализу свойств демпфирования в предлагаемой модели. На рис. 3 представлен тестовый пример, который имеет три расчетные схемы: континуальная пластинка-стержень; стержневая аппроксимация пластины по Ржаницыну и стержневая расчетная схема.

При решении принимаем $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7,8$ г/см³, $\mu = 1/3$, $m = 1000$ кг, размеры на рис. 3. Параметры демпфирования берутся из табл. 1. Силы веса не учитываются в данном примере. Точечным массам на конце стержня-пластины задается начальная скорость 20,0053 см/с, направленная вертикально вниз и одинаковая для расчетных схем рис. 3, б и в. Начальная скорость подобрана с таким расчетом, что при достижении первого максимума перемещений в системе возникает напряжение $\sigma = 200$ МПа или, что то же самое, вертикальная относительная деформация $\varepsilon = 0,001$. После задания точечным массам начальной скорости возникают свободные затухающие колебания, которые и моделируются на компьютере.

Деформации стержней одной ячейки модели при задании относительных деформаций вдоль исходных и повернутых осей

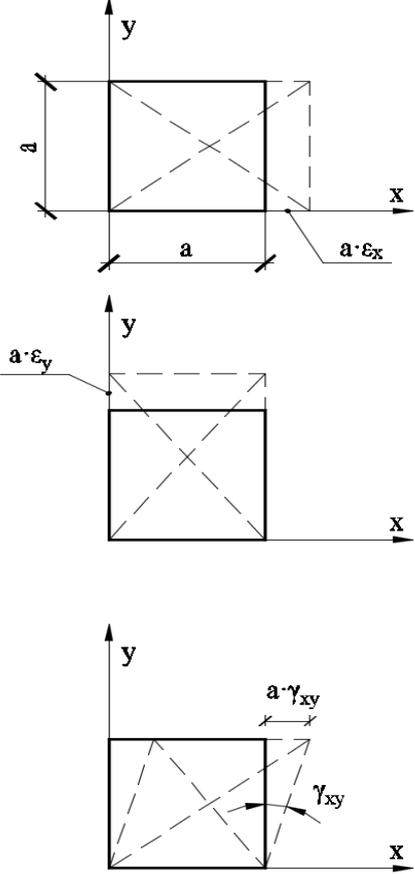
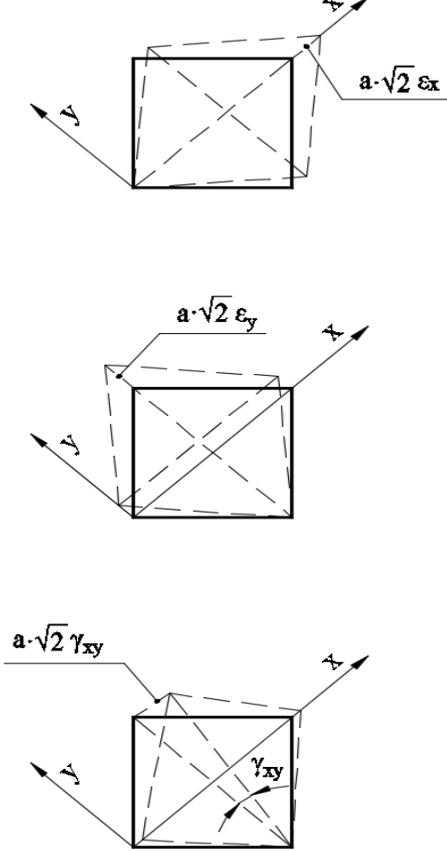
Деформации заданы при горизонтальном положении оси x	Деформации заданы при оси x , повернутой на угол 45°
	
Относительная деформация в элементах модели	
Горизонтальные стержни рамки	
ε_x	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Вертикальные стержни рамки	
ε_y	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Восходящий раскос	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_x
Нисходящий раскос	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_y

Table 2

Deformations of the rods in one model cell when setting the relative deformations along the original and rotated axes

The deformations are set at the horizontal position of the x axis	The deformations are set with the x axis rotated by an angle of 45°

Relative deformation in model elements

Horizontal frame rods	
ε_x	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Vertical frame rods	
ε_y	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Ascending slanting rod	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_x
Descending slanting rod	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_y

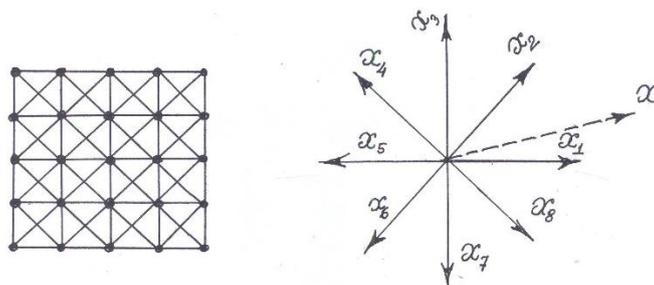


Рис. 2. Восемь положений осей координат с одинаковыми свойствами демпфирования
Figure 2. Eight positions of the coordinate axes with the same damping properties

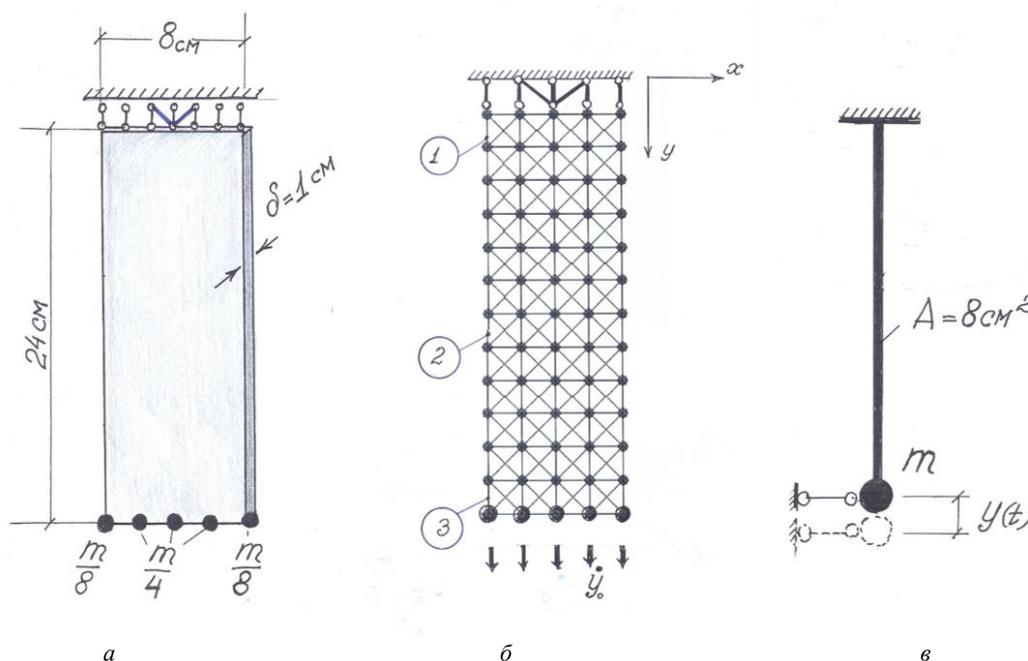


Рис. 3. Модельный пример для численного анализа:
a – пластина-стержень с точечными массами на конце; *б* – расчетная схема по А.Р. Ржаницыну; *в* – стержневая расчетная схема
Figure 3. A model example for numerical analysis:
a – plate-rod with dot masses on the end; *b* – calculation scheme according to A.R. Rzhانيتsyn; *c* – rod calculation scheme

3. Результаты

На рис. 4 показаны графики изменения вертикальных перемещений правого нижнего угла пластины в модели Ржаницына (рис. 3, б) и концевой точки стержня, полученные с использованием нашей компьютерной программы [4; 7; 8]. Рассмотрен отрезок времени $t = 2$ с. За это время система успевает совершить 256 полных колебаний, причем частоты для обеих расчетных схем очень хорошо совпадают, что свидетельствует о том, что стержневая аппроксимация правильно отражает деформационные свойства стержня-пластины.

Более темную окраску на рис. 4 имеют убывающие амплитуды для единичного стержня, а более светлую – график для модели Ржаницына. Наибольшее расхождение для этих амплитуд составляет 15 % (в конце графика), причем большее затухание имеет место для единичного стержня. Определенное совпадение графиков убывающих амплитуд – неожиданный результат. В рассматриваемом случае мы наделили фиктивные стержни модели Ржаницына теми же параметрами, что и единичный стержень (см. табл. 1), и это действие не имеет под собой строгого обоснования.

Чтобы уточнить затухание в пластине, можно рекомендовать следующий приближенный подход: для параметров фиктивных стержней пластины можно выполнить некоторую коррекцию, а именно уве-

личить площади полосок (см. табл. 1) путем введения некоторого корректирующего множителя. Естественно, что увеличиваются площади всех условных полосок, кроме самой толстой. Площадь самой толстой полоски следует уменьшить, чтобы суммарная площадь стержня осталась неизменной. «Исправленные» доли площадей полосок даны в табл. 3. Корректирующий множитель мы определили путем подбора, и он оказался равным 1,08. После задания параметров демпфирования согласно табл. 3, графики на рис. 4 стали практически совпадать, таким образом, множитель 1,08 можно рекомендовать для практического использования, правда, его значение в принципе зависит от величин, входящих в табл. 1. Кроме того, корректирующий множитель будет зависеть и от формы пластины, и от фактического напряженного состояния в ней.

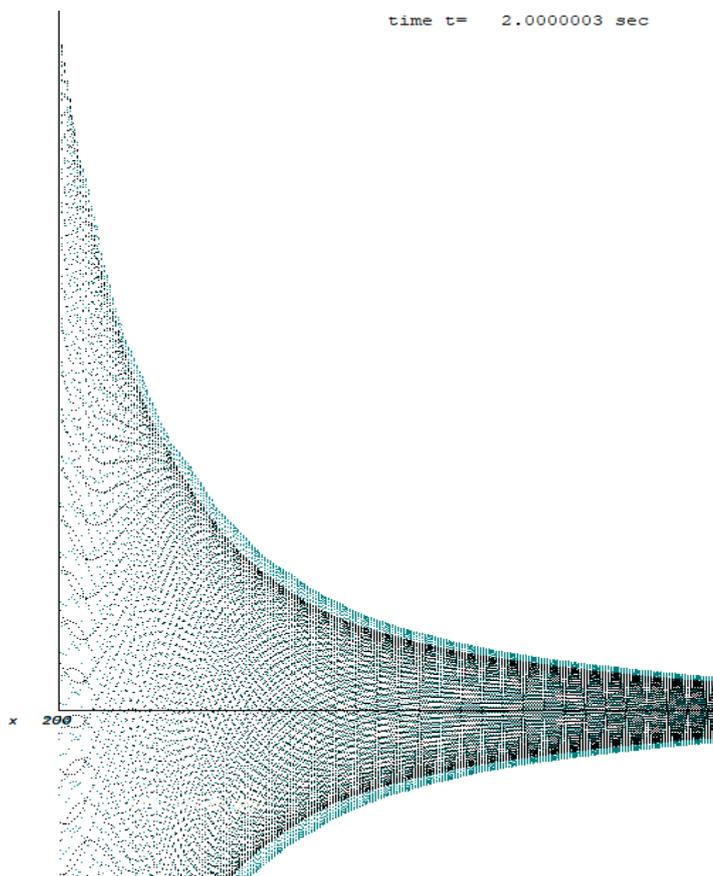


Рис. 4. Наложенные графики перемещений нижней точки стержня-пластины с аппроксимацией по Ржаницыну (зеленым) и единичного стержня (черным) при затухающих колебаниях

Figure 4. Superimposed graphs of the displacements in the lower point of the rod-plate with Rzhantsyn approximation (green) and a single rod (black) with damped oscillations

Таблица 3

Исправленные параметры модели демпфирования для материала из малоуглеродистой стали

Доля площади полосы, %	0,875	0,227	0,410	0,216	0,464	0,745	0,724	1,037	0,918	94,384
Относительная деформация при текучести в полоске $\varepsilon_t \cdot 10^5$	0,25	1,23	2,474	4,687	7,812	12,57	21,61	42,19	63,28	150

Table 3

Corrected parameters of the damping model for low-carbon steel material

Share of strip area, %	0.875	0.227	0.410	0.216	0.464	0.745	0.724	1.037	0.918	94.384
Relative deformation at yield in the strip $\varepsilon_y \cdot 10^5$	0.25	1.23	2.474	4.687	7.812	12.57	21.61	42.19	63.28	150

Теперь уместно вспомнить, что модель, которую мы рассматриваем (см. рис. 3, б), имеет не одну, а 124 степени свободы. На рис. 5 приведены графики изменения усилий в трех отмеченных на рис. 3, б стержнях (начальные участки графиков, соответствующие отрезку времени, равному одному периоду первой формы колебаний). С точностью до масштаба они повторяют относительные деформации в этих точках, или напряжения, начальные амплитуды которых составляют 200 МПа. В начале процесса в пластине имеются высокочастотные колебания (рис. 5, а). В течение отрезка времени, равного всего одному периоду первой формы колебаний, они почти полностью затухают. Графики на рис. 5, б представляют усилия в тех же стержнях к концу 50-го периода формы колебаний. Как видно, это уже три плавные кривые, соответствующие колебаниям по основной форме. Все перечисленные особенности хорошо характеризуют модель внутреннего трения, которую мы рассматриваем с той точки зрения, что при произвольном начальном воздействии в системе возбуждаются все формы колебаний, но скоро остается лишь первая форма, соответствующая самой маленькой частоте.

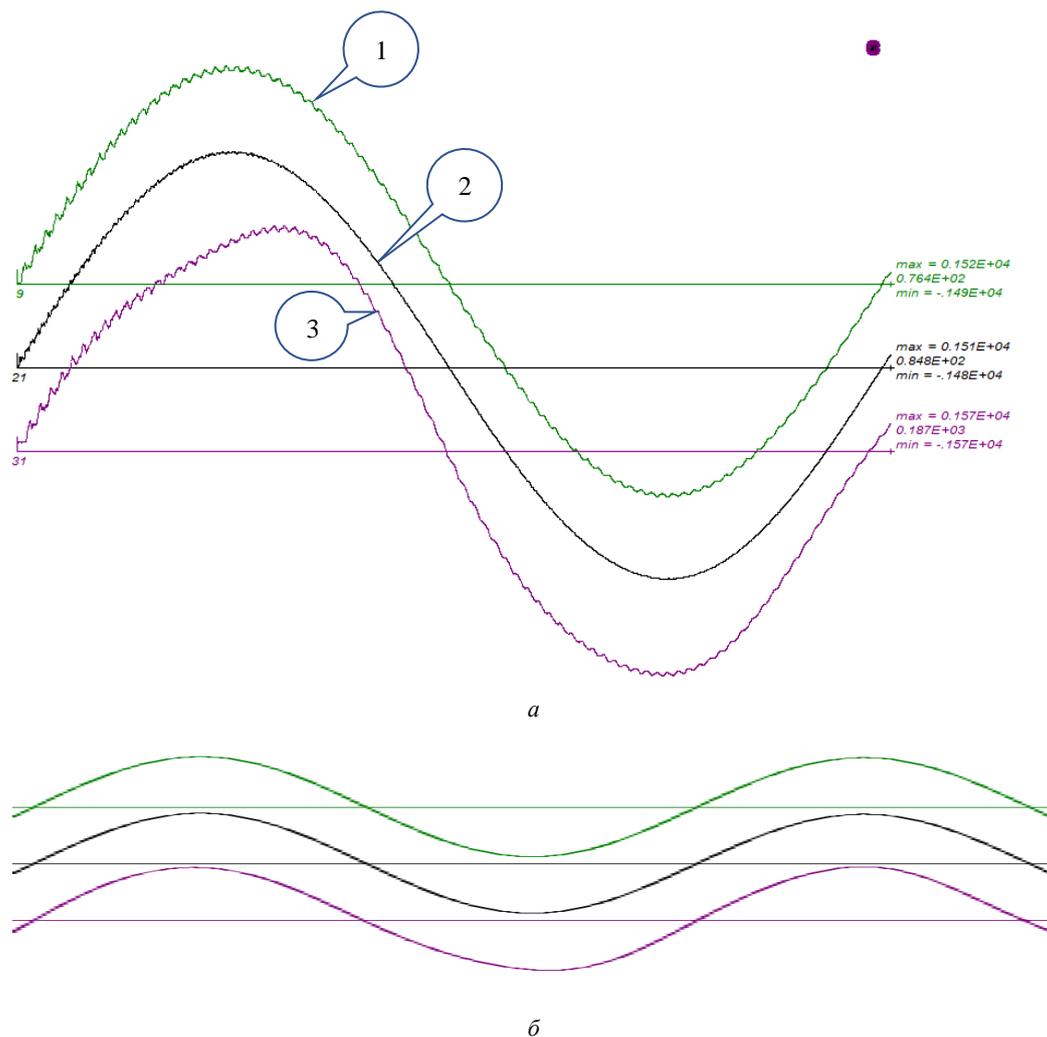


Рис. 5. Графики усилий в трех стержнях модели Ржаницына:
a – первое колебание; *б* – колебание на 50-м периоде
Figure 5. Graphs of forces in the three rods of the Rzhantsyn model:
a – the first oscillation; *б* – oscillation at the 50th period

Теперь рассмотрим ту же систему, но изменим воздействие. Начальные скорости нижних точек стержня-пластины (см. рис. 3, б) направим по горизонтали вдоль оси x и примем значение начальной скорости равным 100 см/с. Этот пример мы приводим для демонстрации различных возможностей модели демпфирования на основании обобщенной модели Прандтля для геометрически и физически нелинейных задач. Скорости остальных точечных масс, которые имеются во всех узлах расчетной схемы, примем равными нулю. Попутно заметим, что масса самой пластинки составляет 1,5 кг и крайне мала

по сравнению с сосредоточенной массой на конце стержня-пластины, которая равна 1000 кг. Из-за малости массы пластины решено ей пренебречь в расчетной схеме, приведенной на рис. 3, в. Все остальные параметры задачи сохранены. Параметры затухания взяты из табл. 3.

На рис. 6, а представлены графики изменения усилий в трех стержнях схемы, пронумерованных на рис. 3, б. Рассмотрен отрезок времени, равный 1 с. Как видно, начальное воздействие в этом случае оказалось настолько большим, что во всех трех выбранных стержнях модели Ржаницына наступала глобальная текучесть (напряжения во всех полосках превышали пределы текучести). В начальный момент времени стержень 1 испытывает существенное пластическое удлинение (см. рис. 6, а), этому соответствует интенсивная потеря энергии движения в системе. Учет такого рода явлений существенен для сейсмических расчетов. На рис. 6, б в натуральную величину показана пластина-стержень с учетом остаточных деформаций после затухания колебаний. В системе в этот момент имеются как остаточные деформации, так и остаточные напряжения.

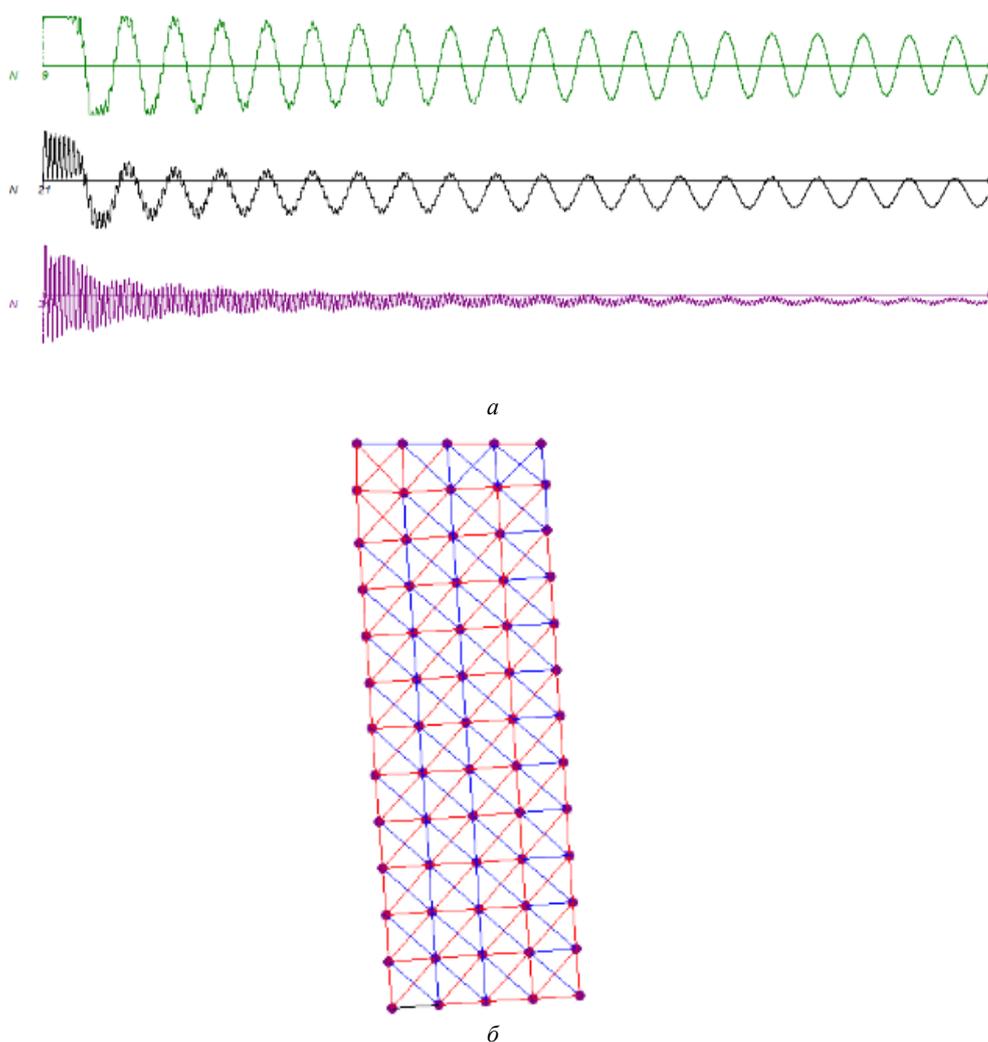


Рис. 6. Затухающие нелинейные колебания стержня-пластины при задании начальной скорости узлам системы по горизонтали:
а – изменение усилий в трех стержнях; б – большие остаточные перемещения системы в натуральном масштабе

Figure 6. Damping nonlinear oscillations of the rod-plate when the initial velocity is given to the system nodes horizontally:
а – change of forces in the three rods; б – large residual movements of the system in the natural scale

Интерес представляет затрата машинного времени на решение. Моделирование одной секунды динамического процесса в последнем примере на обычном компьютере с тактовой частотой 3,2 ГГц составляет 182 с процессорного времени, причем около половины этого времени тратится на учет внутреннего трения.

Для всех приведенных решений выполнялся контроль сходимости по временному шагу. В табл. 4 приведены значения усилия в стержнях 1, 2, 3 в момент времени $t = 0,8$ с. При последовательном уменьшении шага интегрирования Δt видно, что сходимость решения хорошая. Сходимость по перемещениям традиционно лучше, чем по усилиям. На основании приведенных в табл. 4 данных можно сделать заключение о том, что интегрирование по времени выполнено правильно и наше исследование представляет именно изучение погрешности демпфирования, а не погрешность численного решения.

Таблица 4

Проверка сходимости решения при уменьшении шага интегрирования

Δt , с	0,00000059028	0,00000029514	0,000000147572
Усилие в стержне 1, Н	-12266,44	-12267,65	-12267,65
Усилие в стержне 2, Н	-11086,16	-11086,37	-11086,31
Усилие в стержне 3, Н	-2974,39	-2974,83	-2974,80

Table 4

Verification of the solution convergence while reducing the integration step

Δt , s	0.00000059028	0.00000029514	0.000000147572
Force in the rod 1, N	-12266.44	-12267.65	-12267.65
Force in the rod 2, N	-11086.16	-11086.37	-11086.31
Force in the rod 3, N	-2974.39	-2974.83	-2974.80

4. Заключение

Предложен вариант учета внутреннего трения для динамических задач двумерной сплошной среды с использованием стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну. Рассматриваемая модель является частотно-независимой, учитывает сильное изменение сил демпфирования с изменением уровня амплитудных напряжений, применима к линейным и нелинейным задачам, ориентирована на явные численные вычислительные схемы решения задач динамики.

Путем анализа структуры дискретной среды А.Р. Ржаницына рассмотрена изотропность свойств демпфирования. Определены восемь направлений, в которых эти свойства будут выполняться точно.

Путем решения тестового примера выполнено сравнение затухания колебаний в одномерном стержне и двумерной пластинке при ее одноосном растяжении. Амплитуды затухающих колебаний имели отличие до 15 %. Предложен приближенный вариант уточнения расчетной модели применительно к пластинке. Продемонстрировано применение модели для физически и геометрически нелинейной задачи.

Список литературы

1. Зылев В.Б., Григорьев Н.А. Обобщенная модель Прандтля для учета сил внутреннего трения // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 11. С. 58–62.
2. Зылев В.Б., Платнов П.О. Использование точек покоя при экспериментальном изучении внутреннего трения в материале // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 399–404. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-399-404>
3. Зылев В.Б., Платнов П.О. Экспериментальное исследование зависимости параметров демпфирования от начальной пластической деформации, уровня напряжений и частоты // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли РФ в 2019 году: в 2 томах. Том 2. М.: Изд-во АСВ, 2020. С. 197–203.
4. Зылев В.Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М.: Инженер, 1999. 145 с.
5. Зылев В.Б., Алферов И.В. Динамические опорные реакции в двухпролетной мостовой ферме при действии подвижной нагрузки // Строительство и реконструкция. 2019. № 2. С. 20–25. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-82-2-20-25>
6. Зылев В.Б., Алферов И.В. Исследование динамических усилий в элементах пролетного строения при торможении // Актуальные проблемы и перспективы развития строительных конструкций: инновации, модернизация и энергоэффективность в строительстве: материалы международной научно-практической конференции, Алматы, 14–15 декабря 2016 г. Алматы: Казахская головная архитектурно-строительная академия, 2016. С. 96–99.

7. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
8. Александров А.В., Потанов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика: в 2 книгах. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем / под ред. А.В. Александрова. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.
9. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 193 с.
10. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 154 с.
11. Малышев А.П. Построение модели частотно-независимого демпфирования по амплитудной характеристике коэффициента поглощения // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. № 1. С. 134–141.
12. Гребенюк Г.И., Роев В.И. О расчете диссипативных систем с частотно-независимым внутренним трением // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2002. № 7. С. 21–27.
13. Вронская Е.С. Динамический расчет призматических систем с учетом внутреннего трения // Градостроительство и архитектура. 2017. № 3. С. 24–27.
14. Scerrato D., Giorgio I., Madeo A., Darve F., Limam A. A simple non-linear model for internal friction in modified concrete // *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. Pp. 136–152. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.021>
15. Nicanor C., Ramona C.N., Petrica V., Iulian I., Maricel A. Experimental and theoretical results concerning internal friction investigation of a shape memory alloy based on copper // *Metalurgia International*. 2010. Vol. 15. No. 12. Pp. 48–58.
16. Малышев А.П. Моделирование интенсивного амплитудно-зависимого внутреннего демпфирования динамических процессов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 2. С. 103–108.
17. Малышев А.П. Модель конструкционного демпфирования колебаний с остаточными деформациями // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. № 2. С. 16–20.
18. Malygin G.A. Amplitude-dependent internal friction and similarity of temperature dependences of microflow and macroflow stresses of a crystal // *Physics of the Solid State*. 2000. Vol. 42. Pp. 706–711. <https://doi.org/10.1134/1.1131276>
19. Назаров В.Е., Колпаков А.Б. Эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения в низкочастотном стержневом резонаторе из отожженной поликристаллической меди // Журнал технической физики. 2021. Т. 91. № 9. С. 1305–1315. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.09.51208.21-21>
20. Зылева Н.В. Обобщенная модель Ржаницына А.Р. для решения динамических задач // Вычислительная механика деформируемого тела: труды международной научно-технической конференции: в 2 томах. Том 1. М.: МИИТ, 2006. С. 189–191.

References

1. Zylev V.B., Grigorev N.A. Generalized Prandtl model for the account of internal friction forces. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2011;(11):58–62. (In Russ)
2. Zylev V.B., Platnov P.O. The use of fixed points in experimental research of the internal friction of material. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):399–404. (In Russ) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-399-404>
3. Zylev V.B., Platnov P.O. Experimental research of the dependence of damping parameters on the initial plastic deformation, stress level and frequency. *Fundamental, Exploratory and Applied Research of the RAASN on Scientific Support for the Development of Architecture, Urban Planning and Construction Industry of the Russian Federation in 2019* (vol. 2, p. 197–203). Moscow: ASV Publ.; 2020. (In Russ.)
4. Zylev V.B. *Computational methods in nonlinear structural mechanics*. Moscow: Engineer Publ.; 1999. (In Russ.)
5. Zylev V.B., Alferov I.V. Study of the dynamic support reactions in the two-span bridge farm under action of moving load. *Construction and Reconstruction*. 2019;(2):20–25. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-82-2-20-25>
6. Zylev V.B., Alferov I.V. Investigation of dynamic forces in superstructure elements during braking. *Actual Problems and Prospects of Development of Building Structures: Innovations, Modernization and Energy in Construction: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Almaty 14–15 December 2016*. Almaty: Kazakh Head Architectural and Construction Academy; 2016. p. 96–99. (In Russ.)
7. Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2003. (In Russ.)
8. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Zylev V.B. *Structural mechanics. Book 2. Dynamics and stability of elastic systems*. Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 2008. (In Russ.)
9. Panovko Ya.G. *The internal friction at oscillations of elastic systems*. Moscow: Izdatel'skij Dom Fiziko-Matematicheskoy Literatury Publ.; 1960. (In Russ.)
10. Sorokin E.S. *On the theory of internal friction at oscillations of elastic systems*. Moscow: Gosstroyizdat Publ.; 1960. (In Russ.)
11. Malyshev A.P. Modeling of frequency-independent damping based on the amplitude characteristic of absorption coefficient. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(1):134–141. (In Russ.)
12. Grebenyuk G.I., Roev V.I. On the calculation of dissipative systems with frequency-independent internal friction. *News of Higher Educational Institution. Construction*. 2002;(7):21–27. (In Russ.)

13. Vronskaya E.S. Dynamic calculation of prismatic systems taking into account internal friction. *Urban Construction and Architecture*. 2017;(3):24–27. (In Russ.)
14. Scerrato D., Giorgio I., Madeo A., Darve F., Limam A. A simple non-linear model for internal friction in modified concrete. *International Journal of Engineering Science*. 2014;80:136–152. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.021>
15. Nicanor C., Ramona C.N., Petrica V., Iulian I., Maricel A. Experimental and theoretical results concerning internal friction investigation of a shape memory alloy based on copper. *Metalurgia International*. 2010;15(12):48–58.
16. Malyshev A.P. Modeling of intensive amplitude-dependent internal damping of dynamic processes. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2003;(2):103–108. (In Russ.)
17. Malyshev A.P. Model of structural damping of oscillations with residual deformations. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2007;(2):16–20. (In Russ.)
18. Malygin G.A. Amplitude-dependent internal friction and similarity of temperature dependences of microflow and macroflow stresses of a crystal. *Physics of the Solid State*. 2000;42:706–711. <https://doi.org/10.1134/1.1131276>
19. Nazarov V.E., Kolpakov A.B. Effects of amplitude-dependent internal friction in a low-frequency rod resonator made of annealed polycrystalline copper. *Technical Physics*. 2021;91(9):1305–1315. (In Russ.) <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.09.51208.21-21>
20. Zyleva N.V. Generalized model of A.R. Rzhantsyn for solving dynamic problems. *Computational Mechanics of Deformable Solids: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference* (vol. 1, p. 189–191). Moscow: MIIT Publ.; 2006. (In Russ.)