



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148  
EDN: KNCSOD  
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины

М.К. Сагдатуллин

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация

✉ ssmarat@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 27 января 2023 г.  
Доработана: 29 марта 2023 г.  
Принята к публикации: 5 апреля 2023 г.

### Для цитирования

Сагдатуллин М.К. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 130–148. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>

**Аннотация.** При моделировании нелинейного изотропного восьмиузлового конечного элемента определены основные кинематические и физические соотношения. В частности, введены изопараметрические аппроксимации геометрии и неизвестного вектора приращения перемещений, ковариантные и контравариантные компоненты базисных векторов, метрических тензоров, тензоров деформаций (Коши – Грина и Альманси) и истинных напряжений Коши в исходной и текущей конфигурации. Далее введено вариационное уравнение в скоростях напряжений в актуальной конфигурации без учета массовых сил и рассмотрен материал Сетха, где в качестве тензора конечных деформаций использован тензор деформаций Альманси. Проведена линеаризация данного вариационного уравнения, дискретизация полученных соотношений (матрицы жесткости, матрицы геометрической жесткости). Полученные выражения записываются в виде системы линейных алгебраических уравнений. Рассматривается несколько тестовых примеров. Представлена задача изгиба полосы в кольцо. Данная задача решается аналитически, исходя из кинематических и физических соотношений. Также приведены примеры нелинейного деформирования цилиндрической и сферической оболочек. Предложенная методика построения трехмерного конечного элемента нелинейной теории упругости, использование материала Сетха позволяют получить специальный конечный элемент, при помощи которого возможно рассчитывать напряженное состояние оболочек средней толщины с использованием однослойной аппроксимации по толщине. Полученные результаты тестовых примеров демонстрируют работоспособность предложенной методики.

**Ключевые слова:** конечный элемент, метрический тензор, тензор Альманси, материал Сетха, метод двойной аппроксимации, конечные деформации

## Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness

Marat K. Sagdatullin

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation

✉ ssmarat@mail.ru

### Article history

Received: January 27, 2023  
Revised: March 29, 2023  
Accepted: April 5, 2023

**Abstract.** When modeling a nonlinear isotropic eight-node finite element, the main kinematic and physical relationships are determined. In particular, isoparametric approximations of the geometry and an unknown displacement increment vector, covariant and contravariant components of basis vectors, metric tensors, strain

Сагдатуллин Марат Камилевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0535-4145; ssmarat@mail.ru  
Marat K. Sagdatullin, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Basics of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0535-4145; ssmarat@mail.ru

© Сагдатуллин М.К., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

tensors (Cauchy – Green and Almansi) and true Cauchy stresses in the initial and current configuration are introduced. Next, a variational equation is introduced in the stress rates in the actual configuration without taking into account body forces and the Seth material is considered, where the Almansi strain tensor is used as the finite strain tensor. Linearization of this variational equation, discretization of the obtained relations (stiffness matrix, matrix of geometric stiffness) is carried out. The resulting expressions are written as a system of linear algebraic equations. Several test cases are considered. The problem of bending a strip into a ring is presented. This problem is solved analytically, based on kinematic and physical relationships. Examples of nonlinear deformation of cylindrical and spherical shells are also shown. The method proposed in this paper for constructing a three-dimensional finite element of the nonlinear theory of elasticity, using the Seth material, makes it possible to obtain a special finite element, with which it is quite realistic to calculate the stress state of shells of medium thickness using a single-layer approximation in thickness. The obtained results of test cases demonstrate the operability of the proposed technique.

**For citation**

Sagdatullin M.K. Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):130–148. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>

**Keywords:** finite element, metric tensor, Almansi tensor, Seth material, double approximation method, finite strains

**1. Введение**

Применение метода конечных элементов (МКЭ) к расчету тонкостенных конструкций в настоящее время является общепринятым и естественным. Разработке теоретических основ конечноэлементного анализа искривленных оболочек в линейной и нелинейной постановках посвящено значительное число научных публикаций, из которых отметим [1–5]. Среди большого разнообразия предложенных подходов для геометрически и физически нелинейных задач определенными преимуществами обладают так называемые двумерные и трехмерные изопараметрические конечные элементы (КЭ) тонкостенных конструкций [6–9]. Технология построения подобных элементов основана на использовании уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и выполнении специфических гипотез в каждой квадратурной точке самостоятельно. Такой подход в полной мере позволяет применять апробированные методики нелинейного анализа поведения конструкций с учетом конечных деформаций [10–13], пластичности [14–16], накопления поврежденности материала [17], контактных задач [18–19], задач устойчивости [20–21], модели несжимаемых материалов [22] и т. д.

В настоящей работе рассматриваются вопросы кинематики конечных деформаций и произвольных течений трехмерного континуума. Описываются тензоры деформаций и меры деформаций в разложении по основному и сопряженному базисам исходной и актуальной конфигураций. Построена математическая модель оболочечного конечного элемента путем введения в физическую модель материала Сетха. Рассмотрены числовые примеры.

**2. Кинематика конечных деформаций**

Рассмотрим процесс деформирования оболочки в некоторой инерциальной системе отсчета, в которую введем декартовую систему координат с ортами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Пусть в исходной и актуальной конфигурациях радиус-векторы материальной точки имеют вид

$$\mathbf{R} = X^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{r} = x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i. \tag{1}$$

Определим:

– базисные векторы

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = R_k^i \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{r}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = r_k^i \mathbf{e}_i; \tag{2}$$

– метрические тензоры

$$\mathbf{G} = G_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = G^{ij} (\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j) = \tilde{G}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j);$$

$$\mathbf{g} = g_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = g^{ij} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) = \tilde{g}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобится вектор скорости  $\mathbf{v}$ , который определим в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

В задачах статики под вектором скорости понимается приращение радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по мере нарастания деформаций, то есть фактически  $\mathbf{v}$  есть вектор приращения перемещений  $\Delta\mathbf{U}$ , где  $\mathbf{U}$  – вектор перемещений.

$$\mathbf{U} = \mathbf{r} - \mathbf{R} = \mathbf{U}^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение группу тензоров, описывающих кинематику среды при ее деформации. Тензор градиента деформации

$$\mathbf{F} = (\mathbf{R}_i \mathbf{r}^i) = G_{ki} (\mathbf{R}^k \mathbf{r}^i) = g^{ki} (\mathbf{R}_i \mathbf{r}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (6)$$

где

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i} = g^{mn} R_n^j r_m^i = G_{mn} R^{m,i} r^{n,j}.$$

Тензор градиента места

$$\mathbf{F}^T = (\mathbf{r}^i \mathbf{R}_i) = G_{ki} (\mathbf{r}^k \mathbf{R}^i) = g^{ki} (\mathbf{r}_i \mathbf{R}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ji} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (7)$$

Обратный тензор градиента деформации

$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{r}_i \mathbf{R}^i) = g_{ki} (\mathbf{r}^k \mathbf{R}^i) = G^{ki} (\mathbf{r}_i \mathbf{R}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ij}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (8)$$

Обратный тензор градиента места

$$(\mathbf{F}^{-1})^T = (\mathbf{R}^i \mathbf{r}_i) = g_{ki} (\mathbf{R}^k \mathbf{r}^i) = G^{ki} (\mathbf{R}_i \mathbf{r}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ji}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (9)$$

Отметим, что задание обратного тензора деформации в виде (8) может оказаться весьма неудобным, так как его компоненты вычисляются дифференцированием по координатам текущей конфигурации, которая часто является неизвестной. В этом случае целесообразно воспользоваться следующим представлением:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2 \det |F_{ij}|} \epsilon_{imn} \epsilon_{jkl} \frac{\partial x^m}{\partial X^k} \frac{\partial x^n}{\partial X^l} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (10)$$

Обратный тензор градиента места определяется как транспонированный тензор.

Далее при описании деформации использованы следующие соотношения:

– правый тензор Коши – Грина (мера деформации Коши – Грина)

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F} = g_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (11)$$

где

$$\tilde{g}_{ij} = g_{mn} R^{m,i} R^{n,j};$$

– левый тензор Пиолы (мера деформации Альманси)

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G} (\mathbf{F}^{-1}) = G_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sum_{i,j} \tilde{B}_{ij}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (12)$$

где

$$\tilde{B}_{ij}^* = G_{mn} r^{m,i} r^{n,j};$$

– тензор деформации Коши – Грина

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{G}] = \frac{1}{2} [g_{ij} - G_{ij}] (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \sum_{i,j} \tilde{E}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (13)$$

где

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{1}{2} [g_{mn} - G_{mn}] R^{m,i} R^{n,j};$$

– тензор деформации Альманси

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{g} - \mathbf{B}^{-1}] = \frac{1}{2} [g_{ij} - G_{ij}] (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sum_{i,j} \tilde{A}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (14)$$

где

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{2} [g_{mn} - G_{mn}] r^{m,i} r^{n,j}.$$

Следует отметить, что компоненты тензоров деформации Коши – Грина и Альманси в криволинейных базисах совпадают между собой. Справедливо соотношение, связывающее тензоры деформации Коши – Грина (13) и Альманси (14),

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}, \quad (15)$$

которое характерно для многих пространственных и материальных тензоров. Имеет место и обратное преобразование, то есть

$$\mathbf{A} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{E} (\mathbf{F}^{-1}). \quad (16)$$

Введены тензоры, используемые для описания течения среды. Базовыми тензорами здесь являются:

– тензор пространственного градиента скорости

$$\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} (\mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{v}_i \mathbf{r}^i = \sum_{i,j} \tilde{h}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial v^j}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_j = v_i^j \mathbf{e}_j = \sum_m \frac{\partial v^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \mathbf{r}^j; \quad \tilde{h}_{ij} = v_m^i r^{m,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}; \quad (18)$$

– тензор деформации скорости

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} + \mathbf{h}^T] = \sum_{i,j} \tilde{d}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (19)$$

где

$$\tilde{d}_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}_m^i r^{m,j} + \mathbf{v}_m^j r^{m,i}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right];$$

– тензор скорости поворота

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} - \mathbf{h}^T] = \sum_{i,j} \tilde{\omega}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (20)$$

где

$$\tilde{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}_m^i r^{m,j} - \mathbf{v}_m^j r^{m,i}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right].$$

Материальная производная (полная производная по времени) тензора деформации Коши – Грина записана в виде

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \sum_{i,j} \dot{E}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (21)$$

где

$$\dot{g}_{ij} = \mathbf{v}_i \mathbf{r}_j + \mathbf{v}_j \mathbf{r}_i = \sum_m (\mathbf{v}_i^m r_j^m + \mathbf{v}_j^m r_i^m); \quad \dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \dot{g}_{mn} R^{m,i} R^{n,j}.$$

Из (18) следует

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \sum_m \left[ \frac{\partial v^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial v^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \right] (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{g}_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j). \quad (22)$$

Таким образом, скорость изменения тензора деформации Коши – Грина (21) и тензора деформаций скорости (19) в криволинейных базисах имеют одинаковые значения компонент. Следовательно, справедливо

$$\mathbf{d} = (\mathbf{F}^{-1})^T \dot{\mathbf{E}} (\mathbf{F}^{-1}) = -\frac{1}{2} \mathbf{F} (\dot{\mathbf{C}}^{-1}) \mathbf{F}^T. \quad (23)$$

Запишем (23) с учетом (15), (17)

$$\mathbf{d} = (\mathbf{F}^{-1})^T \frac{d}{dt} [\mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}] (\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1})^T [\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{A}} \mathbf{F} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{A} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{F}}] (\mathbf{F}^{-1}) = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{h}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{A}^\wedge. \quad (24)$$

Выражение в правой части (24) называют производной Ли (Lie Rate), для которой, с учетом (22), справедливо выражение

$$\mathbf{A}^\wedge = \mathbf{d} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{g}_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j). \quad (25)$$

По аналогии с операцией дифференцирования по времени определим вариации основных тензоров:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\delta\dot{g}_{ij}(\mathbf{R}^i\mathbf{R}^j) = \sum_{i,j}\delta\dot{E}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j); \\ \delta\mathbf{d} &= (\mathbf{F}^{-1})^T\delta\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\delta\dot{g}_{ij}(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j) = \sum_{i,j}\delta\dot{d}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j); \\ \delta\mathbf{h} &= \sum_k\delta v_i^k r_j^k(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j) = \sum_{i,j}\delta\dot{h}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j).\end{aligned}\quad (26)$$

### 3. Физическая модель гиперупругого тела

Для построения определяющих соотношений воспользуемся вторым уравнением термодинамики для изотермического деформирования упругой изотропной среды в виде

$$\rho\dot{\psi} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{d} = 0, \quad (27)$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $\psi$  – функция свободной энергии;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши;  $\mathbf{d}$  – тензор деформации скорости, который определяется различными формами (19), (22), (23), (24), (25).

Построим общие структурные соотношения, принимая в качестве базового выражения тензор деформаций Альманси (14). Выбор базового тензора деформаций предполагает, что функция свободной энергии зависит от компонент этого тензора. Таким образом, будем считать заданной функцию

$$\psi = \psi(A_{ij}). \quad (28)$$

По правилу дифференцирования скалярной функции по тензору имеем

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}}, \quad (29)$$

где появляется тензор второго ранга  $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}}$ .

Воспользуемся соотношением (24), из которого следует, что

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{h} - \mathbf{h}^T\mathbf{A} = [\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{d} - \mathbf{d}\mathbf{A}] - [\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{A}]. \quad (30)$$

Подставив (30) в (29) и далее в уравнение (27), получим

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \cdot \{[\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{d} - \mathbf{d}\mathbf{A}] - [\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{A}]\} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} = 0. \quad (31)$$

Преобразуем уравнение (31) к форме

$$\left\{ \rho \left[ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}}\mathbf{A} - \mathbf{A}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \right] - \boldsymbol{\sigma} \right\} \cdot \mathbf{d} - \left\{ \rho \left[ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}}\mathbf{A} - \mathbf{A}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \right] \right\} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (32)$$

Так как тензор скорости деформации  $\mathbf{d}$  и тензор скорости вращения  $\boldsymbol{\omega}$  являются совершенно независимыми тензорами, то из (32) следуют два уравнения:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A} - \mathbf{A} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \right], \quad (33)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A} = \mathbf{A} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}}. \quad (34)$$

Соотношения вида (33) называются физическими (определяющими) соотношениями, или уравнением состояния, и, по сути, определяют тензор напряжения в виде функции от тензора деформации. Уравнение (34) является ограничением на выбор функции свободной энергии (28).

С учетом (34) определяющие соотношения (33) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} [\mathbf{g} - 2\mathbf{A}] = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{B}^{-1} \quad (35)$$

либо

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho [\mathbf{g} - 2\mathbf{A}] \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \rho. \quad (36)$$

Обе формы записи эквивалентны, вследствие справедливости (34).

Для изотропного материала, свойства которого не зависят от направления, функция удельной потенциальной энергии деформации должна зависеть лишь от инвариантов соответствующих тензоров. Следовательно, выражение (28) упрощается до скалярной функции, зависящей от главных инвариантов

$$\psi = \psi(I_{1\mathbf{A}}, I_{2\mathbf{A}}, I_{3\mathbf{A}}). \quad (37)$$

Здесь и далее обозначение скаляров упростим, а именно

$$I_1 = I_{1\mathbf{A}}; I_2 = I_{2\mathbf{A}}; I_3 = I_{3\mathbf{A}}. \quad (38)$$

В результате после несложных преобразований получим

$$\boldsymbol{\sigma} = [\psi_1 + \psi_2 I_1] \mathbf{g} - \psi_2 \mathbf{A} + \psi_3 I_3 \mathbf{A}^{-1}, \quad (39)$$

где

$$\psi_1 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_1}; \psi_2 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_2}; \psi_3 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_3}. \quad (40)$$

Для получения представления тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  в виде суммы диад по соответствующему базису необходимо установить, в каком базисе определен тензор деформаций Альманси (14). Наиболее простой вид получаем при использовании базиса  $\mathbf{e}_i$ . В этом случае

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j} \tilde{\sigma}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \quad (41)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{ij} = [\psi_1 + \psi_2 I_1] \delta_{ij} - \psi_2 \tilde{A}_{ij} + \psi_3 I_3 \tilde{A}_{ij}^*,$$

где  $|\tilde{A}_{ij}^*|$  образуется как матрица, обратная  $|\tilde{A}_{ij}|$ .

При использовании базиса текущей конфигурации получаем представление

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{ij} \sigma_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sigma^{ij} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) \quad (42)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{ij} = [\Psi_1 + \Psi_2 I_1] g_{ij} - \Psi_2 A_{ij} + \Psi_3 I_3 A_{ij}^*,$$

где

$$A_{ij} = g_{ij} - G_{ij};$$

$A_{ij}^*$  – компоненты обратного тензора в базисе  $(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j)$ , которые имеют достаточно сложный вид.

В практической реализации вычисление компонент  $\tilde{A}_{ij}^*$  значительно проще, чем  $A_{ij}^*$ . Поэтому целесообразно вычислять  $A_{ij}^*$  через  $\tilde{A}_{ij}^*$ . Для этого из тождества

$$A_{ij}^* (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sum_{i,j} A_{ij}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \mathbf{A}^{-1} \quad (43)$$

получим

$$A_{ij}^* = \mathbf{r}_i \sum_{m,n} \tilde{A}_{mn}^* (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \mathbf{r}_j = \tilde{A}_{mn}^* r_i^m r_j^n. \quad (44)$$

Контравариантные компоненты тензора напряжений определяются в виде

$$\sigma^{ij} = \sigma_{mn} g^{mi} g^{nj}. \quad (45)$$

Таким образом, представленные соотношения позволяют вычислять компоненты тензора напряжений в различных базисах при известных исходной и деформированной конфигурациях механической системы.

#### 4. Разрешающее уравнение на шаге нагружения

В качестве базового соотношения вариационное уравнение принципа виртуальных скоростей в текущей конфигурации можно записать в виде

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} dV = \int_V \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^* \delta \mathbf{v} dS, \quad (46)$$

где  $\mathbf{f}^*$  – вектор заданных внешних объемных сил;  $\mathbf{t}_n^*$  – вектор заданных напряжений на части поверхности  $S_\sigma$ , на которой определены силовые граничные условия.

Технология вычислений представляет собой метод последовательных нагружений с определением текущей метрики как основной для вычислений. Итак, процесс деформирования представим как последовательность равновесных состояний  $V_k$ , которые реализуются при заданных значениях внешних сил  ${}^k \mathbf{f}^*$ ,  ${}^k \mathbf{t}_n^*$ . Определим в качестве основной неизвестной величины вектор скорости  ${}^k \mathbf{v}$ , который можно трактовать как вектор приращения текущей конфигурации при переходе к новому состоянию  $V_{k+1}$ :

$${}^k \mathbf{v} = \Delta {}^k \mathbf{U} = {}^{k+1} \mathbf{r} - {}^k \mathbf{r}. \quad (47)$$

Разрешающее уравнение на текущем шаге строится путем линеаризации исходного уравнения (46) в предположении  $\frac{\partial^k \mathbf{v}^i}{\partial^k x^j} \ll 1$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \left\{ {}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta^k \mathbf{d} - \frac{1}{2} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[ \delta^k \mathbf{h} {}^k \mathbf{h} + ({}^k \mathbf{h})^T (\delta^k \mathbf{h})^T \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial^k \mathbf{v}^i}{\partial^k x^i} \right] \left[ {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta^k \mathbf{d} - {}^k \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} \right] \right\} dV_k + \int_{S_k^\sigma} \left\{ {}^k \mathbf{t}_n^* ({}^k \mathbf{h})^T - \left[ \frac{\partial^k \mathbf{v}^i}{\partial^k x^i} \right] {}^k \mathbf{t}_n^* \right\} \delta \mathbf{v} dS_k = \\ & = \int_{V_k} {}^k \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} dV_k + \int_{S_k^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n^* \delta \mathbf{v} dS_k - \left\{ \int_{V_k} \left[ {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta^k \mathbf{d} - {}^k \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} \right] dV_k - \int_{S_k^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n^* \delta \mathbf{v} dS \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Чтобы полностью определить это уравнение необходимо построить выражение скорости напряжений  ${}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}}$  для известной конфигурации  ${}^k \mathbf{r}$  через неизвестный вектор скорости (47) в виде линейной функции.

Рассмотрим общий случай изотропного материала с определяющим уравнением (39). Индекс  $k$  для сокращения записи опустим. Справедливо

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 I_1 + \dot{\psi}_3 I_1^2 \right] \mathbf{g} + \left[ \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 I_1 \right] \dot{\mathbf{g}} - \dot{\psi}_2 \mathbf{A} - \dot{\psi}_2 \dot{\mathbf{A}} + \dot{\psi}_3 I_3 \mathbf{A}^{-1} + \dot{\psi}_3 I_3 \dot{\mathbf{A}}^{-1} + \dot{\psi}_3 I_3 \dot{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (49)$$

Далее распишем каждое из слагаемых:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_1} \left( \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_2} \left( \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_3} \left( \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = \\ &= \left\{ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_1} \mathbf{g} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_2} [I_1 \mathbf{g} - \mathbf{A}] + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_3} I_3 \mathbf{A}^{-1} \right\} \cdot \dot{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь использовались следующие представления:

$$\dot{I}_1 = \left( \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{I}_2 = \left( \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = [I_1 \mathbf{g} - \mathbf{A}] \cdot \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{I}_3 = \left( \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = I_3 \mathbf{A}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{A}}. \quad (51)$$

Справедливо тождество

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{g}. \quad (52)$$

Если продифференцировать по времени тождество (52), то получим

$$\dot{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \left[ \dot{\mathbf{g}} - \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \right]. \quad (53)$$

Таким образом, удалось построить выражения всех слагаемых в соотношении (49) через два тензора скоростей  $\dot{\mathbf{A}}$  и  $\dot{\mathbf{g}}$ . Причем все тензоры, которые свертываются с ними, однозначно определяются текущей конфигурацией  ${}^k \mathbf{r}$  и могут быть вычислены по соответствующим формулам. Теперь необходимо выразить тензоры  $\dot{\mathbf{A}}$ ,  $\dot{\mathbf{g}}$  через пространственный тензор градиента деформаций (17) в виде линейной зависимости.

Из (24) имеем

$${}^k \dot{\mathbf{A}} = {}^k \mathbf{d} - ({}^k \mathbf{h})^T {}^k \mathbf{A} + {}^k \mathbf{A} {}^k \mathbf{h}, \quad (54)$$

то есть с учетом соотношения (19), (24)  ${}^k \dot{\mathbf{A}}$  есть линейная функция, зависящая от  ${}^k \mathbf{h}$ .

Из (14) получаем

$$\dot{\mathbf{g}} = 2\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}}^{-1}. \quad (55)$$

Из (12) следует

$$\dot{\mathbf{B}}^{-1} = (\dot{\mathbf{F}}^{-1})^T \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1} + (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^{-1}. \quad (56)$$

Дифференцируя по времени тождество

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{G}, \quad (57)$$

получим

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{h} \quad (58)$$

и подставим его в (56)

$$\dot{\mathbf{B}}^{-1} = -\mathbf{h}^T (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1} - (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{h} = -\mathbf{h}^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{h}. \quad (59)$$

Собирая вместе представления (54), (55) и (59), получаем выражение

$$\dot{\mathbf{g}} = 2[\mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{h}] - \mathbf{h}^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{h} = 2\mathbf{d} - \mathbf{h}^T [2\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}] - [2\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}]\mathbf{h} = 2\mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{g} - \mathbf{g}\mathbf{h}, \quad (60)$$

то есть соотношение, полностью аналогичное (54).

Таким образом, представление для скорости изменения тензора напряжений (49) в глобальном базисе, то есть в виде

$${}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{ij} {}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (61)$$

допускает представление

$${}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = {}^k L_{ij}^{mn} {}^k h_{mn}. \quad (62)$$

Выражение  ${}^k L_{ij}^{mn}$  легко строится с помощью вышеприведенных соотношений. Следовательно, скорость изменения напряжений есть линейная функция от градиентов скоростей.

Полученные соотношения представляют собой теоретическую основу конечноэлементного алгоритма исследования конечных деформаций нелинейно упругих тел при силовой нагрузке. Необходимо лишь добавить конкретную физическую модель в виде выражения функционала свободной энергии, справедливого для соответствующего материала.

## 5. Материал Сетха

Расчет тонкостенных конструкций с учетом нелинейностей основывается на шаговых и итерационных методах. Выбор метода и алгоритма, реализующего его, зависит от типа нелинейности. В настоящей работе используется метод последовательных нагружений, который может быть естественно реализован в рамках МКЭ. Процесс деформирования представим в виде последовательности равновесных состояний  $V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_N$ , где  $V_1$  и  $V_N$  – области, занимаемые оболочкой в начальном и конечном деформированном состоянии, а  $V_k$  – произвольное промежуточное состояние. Действующая нагрузка достигается

последовательным догружением на каждом шаге, причем количество шагов выбирается так, чтобы на каждом из них задача была квазилинейной. При такой постановке задача сводится к отысканию  $(k+1)$  – состояния при уже определенной геометрии и с накопленными напряжениями  $k$ -го состояния.

Введем в рассмотрение текущую конфигурацию системы на  $k$ -м шаге нагружения и определим ее в следующем виде:

$${}^k \vec{r} = {}^k x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i, \quad (63)$$

где

$${}^k x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{r=1}^8 {}^k x_r^i N_r (\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (64)$$

Соответственно вычисляем:

– базисные векторы:

$${}^k \vec{r}_j = \frac{\partial {}^k x^i}{\partial \xi^j} \vec{e}_i = {}^k r_j^i \vec{e}_i; \quad (65)$$

$${}^k \vec{r}^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{{}^k g}} \epsilon^{jmn} {}^k r_m^i {}^k r_n^j = {}^k \vec{r}^{j,i} \vec{e}_i; \quad (66)$$

– метрические тензоры

$$({}^k g) = {}^k g_{ij} ({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j) = {}^k g^{ij} ({}^k \vec{r}_i {}^k \vec{r}_j), \quad (67)$$

где

$${}^k g_{ij} = {}^k \vec{r}_i {}^k \vec{r}_j = \sum_m \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j}. \quad (68)$$

Если ввести в рассмотрение ковариантные компоненты метрических тензоров, то тензор деформации Альманси записывается следующим образом:

$${}^k \Phi_{ij} = \frac{1}{2} ({}^k g_{ij} - G_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_m \left( \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j} - \frac{\partial X^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \right). \quad (69)$$

Так как компоненты тензоров деформаций Коши – Грина и Альманси в криволинейных базисах совпадают между собой, получаем тензор деформаций Коши – Грина

$$({}^k E) = {}^k \Phi_{ij} (\vec{R}^i \vec{R}^j) \quad (70)$$

и тензор деформации Альманси

$$({}^k A) = {}^k \Phi_{ij} ({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j). \quad (71)$$

Введем в рассмотрение вектор приращения перемещений

$$\Delta {}^k \vec{U} = {}^{k+1} \vec{r} - {}^k \vec{r} = \Delta U^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i, \quad (72)$$

где используются аппроксимации вида (64), то есть

$$\Delta^k U^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{m=1}^8 \Delta^k U_m^i N_m(\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (73)$$

Аналог тензора пространственного градиента скорости

$$(\Delta^k h_R) = (\Delta^k \bar{U}_i^k \bar{r}^i) \quad (74)$$

будет представлен в виде

$$(\Delta^k h_R) = \left( \frac{\partial \Delta^k \bar{U}}{\partial \xi^i} \bar{r}^i \right) = \sum_m \frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^j \bar{r}^i) = \sum_m \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \Delta^k \alpha_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (75)$$

Симметричная часть этого тензора имеет вид

$$(\Delta^k d_R) = \frac{1}{2} \sum_m \left[ \frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^j} \right] (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \Delta^k \Phi_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (76)$$

Аналогично можем записать вариации. Имеем

$$(\delta^k h_R) = \left( \frac{\partial \delta^k \bar{U}}{\partial \xi^i} \bar{r}^i \right) = \sum_m \frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^j \bar{r}^i) = \sum_m \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \delta^k \alpha_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (77)$$

$$(\delta^k d_R) = \frac{1}{2} \sum_m \left[ \frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^j} \right] (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \delta^k \Phi_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (78)$$

Здесь имеют место следующие соотношения:

$$\Delta^k \Phi_{ij} = \frac{1}{2} [\Delta^k \alpha_{ij} + \Delta^k \alpha_{ji}]; \quad (79)$$

$$\delta^k \Phi_{ij} = \frac{1}{2} [\delta^k \alpha_{ij} + \delta^k \alpha_{ji}]. \quad (80)$$

Тензор истинных напряжений Коши определяется в виде

$$({}^k \sigma) = {}^k \sigma_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j) = {}^k \sigma^{ij} (\bar{r}_i \bar{r}_j), \quad (81)$$

где введены ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений.

Запишем известное вариационное уравнение в скоростях напряжений (48) без учета массовых сил, предварительно сделав переход от  ${}^k \dot{\sigma}$  и  ${}^k \dot{t}_n^*$  к приращениям  $\Delta^k \sigma$  и  $\Delta^k t_n^*$ , приняв приращение времени  $\Delta t$  равным единице. Это уравнение будет иметь следующий вид:

$$\int_{V_k} \left\{ (\Delta^k \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\delta^k \mathbf{d}_R) + \left[ \frac{\partial^k \Delta U^i}{\partial^k x^i} \right] (\mathbf{k} \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\delta^k \mathbf{d}_R) - \frac{1}{2} (\mathbf{k} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left[ (\delta^k \mathbf{h}_R) \cdot (\mathbf{k} \mathbf{h}_R) + (\mathbf{k} \mathbf{h}_R)^T \cdot (\delta^k \mathbf{h}_R)^T \right] \right\} dV_k =$$

$$= \int_{S_k^\sigma} \Delta^k \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{U} dS_k - \left\{ \int_{V_k} [(\mathbf{k} \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\delta^k \mathbf{d}_R)] dV_k - \int_{S_k^\sigma} \mathbf{k} \mathbf{t}_n^* \delta \mathbf{U} dS_k \right\}. \quad (82)$$

В качестве физической модели используем материал Сетха, для которого справедлив закон Гука для тензора деформаций Альманси:

$$\mathbf{k} \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{k} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{k} \mathbf{g} \mathbf{k} I_{1\mathbf{A}}. \quad (83)$$

Распишем для приращения напряжений  $k$ -го состояния

$$\Delta^k \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \Delta^k \mathbf{A} + \lambda \mathbf{k} \mathbf{g} \left[ \mathbf{k} \mathbf{g} \cdot \Delta^k \mathbf{A} \right], \quad (84)$$

где

$$\Delta^k \mathbf{A} = \Delta^k \mathbf{d}_R - (\Delta^k \mathbf{h}_R)^T \mathbf{k} \mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{A} \Delta^k \mathbf{h}_R. \quad (85)$$

После дискретизации (84) получаем

$$\Delta^k \sigma_{ij} = 2\mu \left( \Delta^k \Phi_{ij} - \mathbf{k} g^{nm} \Delta^k \alpha_{ni} \mathbf{k} A_{mj} - \mathbf{k} g^{mn} \mathbf{k} A_{im} \Delta^k \alpha_{nj} \right) +$$

$$+ \lambda \mathbf{k} g_{ij} \sum_{l,o=1}^3 \mathbf{k} g^{lo} \left( \Delta^k \Phi_{lo} - \mathbf{k} g^{nm} \Delta^k \alpha_{nl} \mathbf{k} A_{mo} - \mathbf{k} g^{mn} \mathbf{k} A_{im} \Delta^k \alpha_{no} \right), \quad (86)$$

где

$$\Delta^k \Phi_{ij} = \sum_m \Delta^k U_r^m \mathbf{k} E_{ij}^{rm}; \quad \mathbf{k} E_{ij}^{rm} = \frac{1}{2} \mathbf{k} x_t^m \left( \frac{\partial N_r}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial N_t}{\partial \xi^j} + \frac{\partial N_t}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} \right). \quad (87)$$

Далее по аналогии с [23] введем в (86) упрощенный закон Гука для приращений напряжений обжатия:

$$\Delta^k \sigma_{33} = E^* \Delta^k A_{33}, \quad (88)$$

где  $E^*$  – модуль жесткости на обжатие (в общем случае он может быть определен из экспериментальных данных). В частности, можно принять

$$E^* = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (89)$$

Используя технологию усечения деформаций поперечного сдвига [23], получим

$$\mathbf{k} E_{13}^{rm} = \frac{1}{128} \mathbf{k} x_t^m \left[ (1 + \xi_r^2 \xi_t^2) + (\xi_r^2 + \xi_t^2) \xi^2 \right] (\xi_r^1 \xi_t^3 + \xi_r^3 \xi_t^1);$$

$$\mathbf{k} E_{23}^{rm} = \frac{1}{128} \mathbf{k} x_t^m \left[ (1 + \xi_r^1 \xi_t^1) + (\xi_r^1 + \xi_t^1) \xi^1 \right] (\xi_r^2 \xi_t^3 + \xi_r^3 \xi_t^2). \quad (90)$$

В целях уточнения физической модели, согласно теории, вводятся следующие соотношения:

$$\Delta^k \alpha_{i3} = \Delta^k \Phi_{i3} + \Delta^k \omega_{i3}, \quad (91)$$

где для  $\Delta^k \Phi_{i3}$  принимаем соотношения (87), (90), а  $\Delta^k \omega_{i3}$  представим в виде

$$\Delta^k \omega_{i3} = \sum_m \Delta^k U_r^m G_{i3}^{rm}, \quad (92)$$

где, согласно технологии усечения деформаций поперечного сдвига,

$$G_{13}^{rm} \approx \frac{1}{128} {}^k x_i^m \left[ \xi_r^1 \xi_t^3 - \xi_r^3 \xi_t^1 \right]; \quad G_{23}^{rm} \approx \frac{1}{128} {}^k x_t^m \left[ \xi_r^2 \xi_t^3 - \xi_r^3 \xi_t^2 \right], \quad (93)$$

что эквивалентно вычислению вращений  $\Delta^k \omega_{i3}$  в центре конечного элемента.

Проведя некоторые преобразования, запишем матрицы геометрической жесткости второго и третьего слагаемых (82) в следующем дискретном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ps}^{qr} &= {}^k \sigma_{im} {}^k A_{ll}^{qp} {}^k E_{nj}^{rs} {}^k g^{mn} {}^k g^{ij} \sqrt{{}^k g}. \\ \tilde{D}_{ps}^{qr} &= -\frac{1}{2} {}^k \sigma^{ij} \left[ {}^k A_{mi}^{rs} {}^k A_{jn}^{qp} {}^k g^{mn} + {}^k A_{im}^{qp} {}^k A_{nj}^{rs} {}^k g^{nm} \right] \sqrt{{}^k g}. \end{aligned} \quad (94)$$

В результате описанной выше конечноэлементной дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$[{}^l K] \{ \Delta^l u \} = \{ \Delta^l P \} - \{ {}^l H \}, \quad (95)$$

где  $\{ \Delta^l u \}$  – вектор приращения узловых перемещений;  $[{}^l K]$  – матрица левых частей;  $\{ \Delta^l P \}$  – вектор приращения узловых сил;  $\{ {}^l H \}$  – вектор невязки.

Решая систему линейных алгебраических уравнений (76), используя алгоритм переупорядочивания, известный как метод Катхилла – Макки [24], и определяя приращения перемещений, находим конфигурацию системы  $(l+1)$  и напряжения

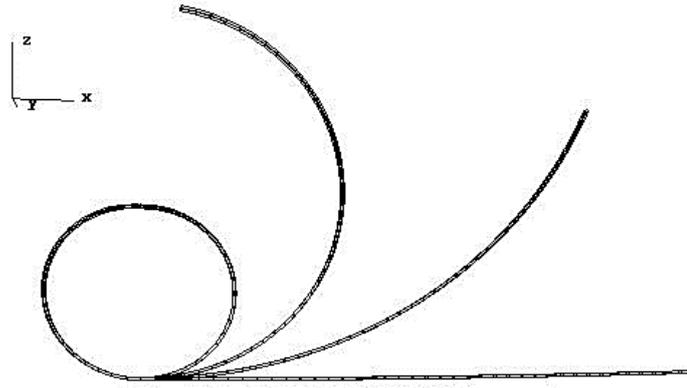
$${}^{l+1} x^i = {}^l x^i + \Delta^l u^i; \quad {}^{k+1} \sigma = {}^k \sigma + \Delta^k \sigma. \quad (96)$$

## 6. Числовые примеры

**Задача 1.** Рассматривается тестовая задача изгиба полосы в кольцо. Исходя из кинематических соотношений вычислим  $\sigma_{11}^{\min}$  и  $\sigma_{11}^{\max}$  в узлах на свободном краю полосы с учетом  $\frac{\pi h}{4L} \ll 1$ .

$$\sigma_{11}^{\min} = -\frac{\pi h}{2L} (\lambda + 2\mu); \quad \sigma_{11}^{\max} = \frac{\pi h}{2L} (\lambda + 2\mu).$$

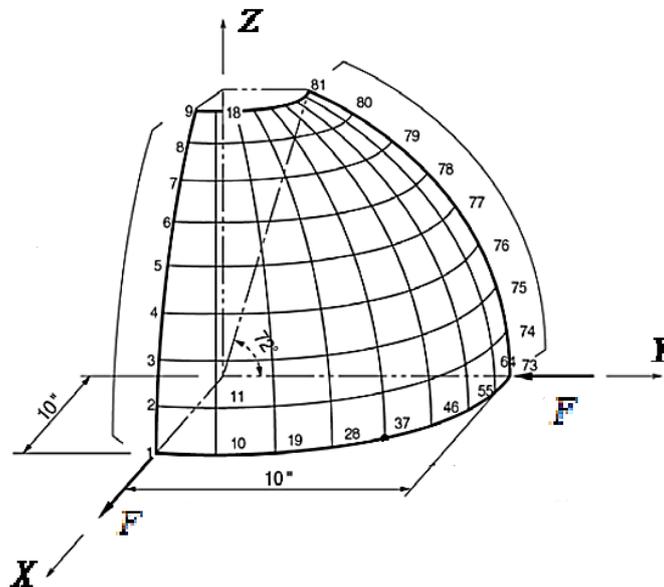
Задача рассчитана с использованием предложенной выше методики. Длина полосы  $L = 200$  см, толщина  $h = 1$  см, ширина  $b = 5$  см, модуль упругости  $E = 20\,000$  кГ/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0$ . На рис. 1 изображено деформированное состояние полосы и несколько промежуточных этапов нагружения.



**Рис. 1.** Изгиб полосы в кольцо  
**Figure 1.** Bending the strip into a ring

В случае, когда прилагаемая нагрузка разбивается на 1000 шагов нагружения, погрешность численного решения не более 1 %. Погрешность могла появиться за счет конечноэлементной аппроксимации исследуемой области. Приведенный числовой пример демонстрирует возможность настоящей методики в решении нелинейных задач теории оболочек.

**Задача 2.** Рассматривается полусферическая оболочка с вырезом в полюсе под воздействием самоуравновешенной системы сил (растягивающих и сжимающих нагрузок в двух ортогональных радиальных направлениях). Из условий симметрии рассмотрим четверть полусферы (рис. 2).



**Рис. 2.** Полусферическая оболочка:

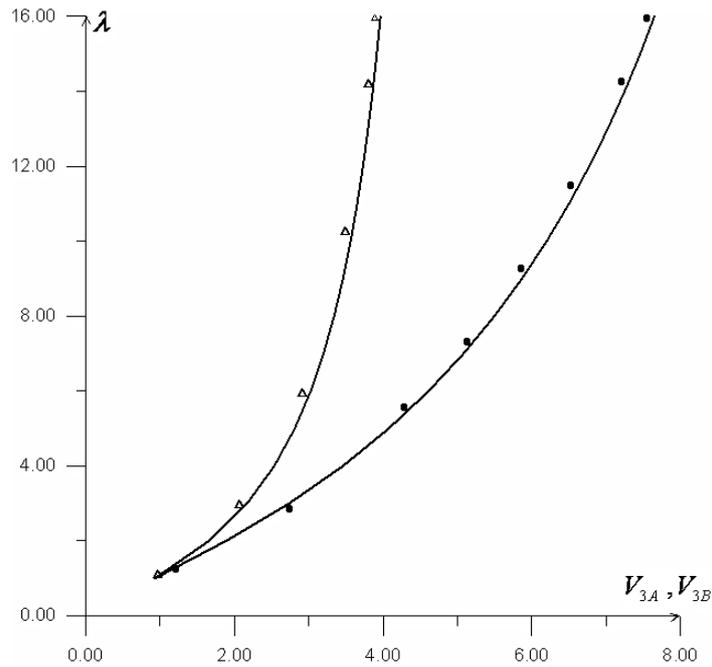
радиус полусферы  $R = 10,0$  см; толщина  $h = 0,04$  см; модуль упругости  $E = 6,825 \cdot 10^7$  кг/см<sup>2</sup>; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ; нагрузка  $F = 10\lambda$  кг

**Figure 2.** Hemispherical shell:

radius of hemisphere  $R = 10.0$  cm; thickness  $h = 0.04$  cm; modulus of elasticity  $E = 6.825 \cdot 10^7$  kg/cm<sup>2</sup>; Poisson's ratio  $\mu = 0.3$ ; load  $F = 10\lambda$  kg

На рис. 3 изображен график максимальных перемещений  $U_{\max}$ , см и  $V_{\max}$ , см при сетке  $20 \times 20$  в сравнении с решениями других авторов [25–29].

На рис. 4 приведено деформированное состояние полусферической оболочки при  $\lambda = 16$ .

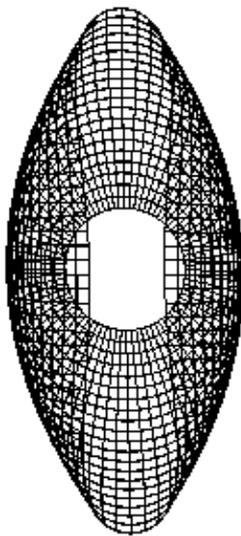


**Рис. 3.** График максимальных перемещений:

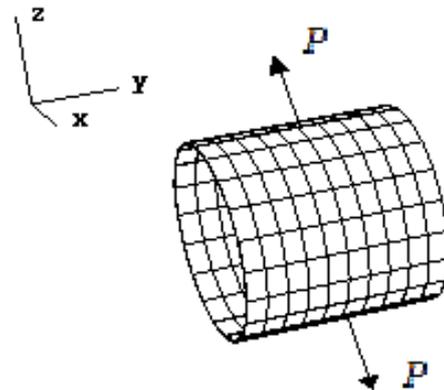
$V_{3A}$   $\Delta$  – SDFR 20;  $V_{3B}$   $\bullet$  – SDFR 20

**Figure 3.** Maximum displacement graph:

$V_{3A}$   $\Delta$  – SDFR 20;  $V_{3B}$   $\bullet$  – SDFR 20



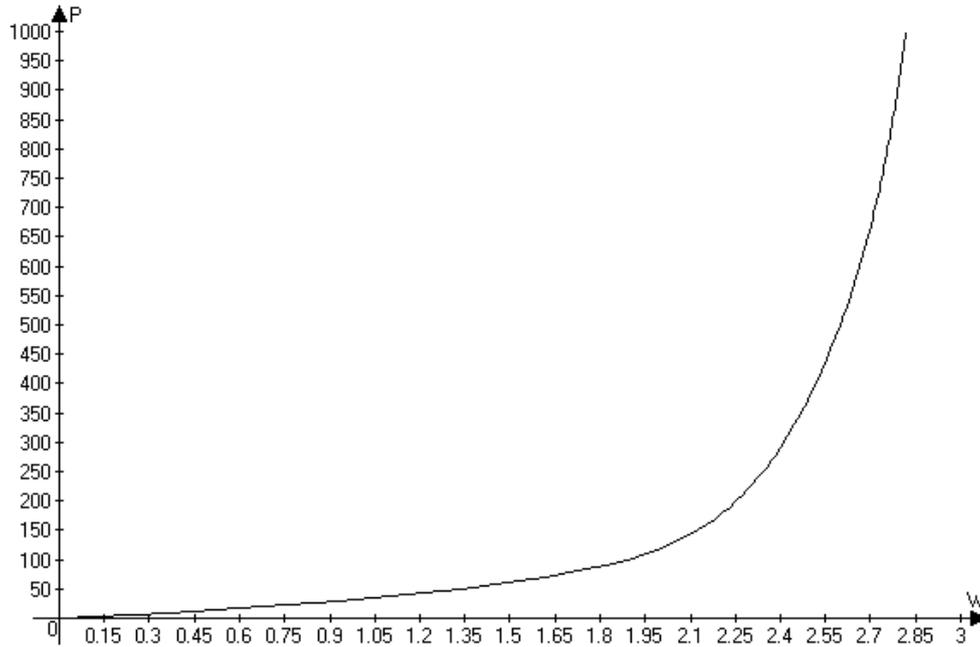
**Рис. 4.** Деформированное состояние полусферической оболочки  
**Figure 4.** Deformed state of a hemispherical shell



**Рис. 5.** Цилиндрическая оболочка:  
радиус цилиндра  $R = 4,953$  см; толщина  $h = 0,094$  см; длина  $L = 10,35$  см;  
модуль упругости  $E = 10,5 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3125$   
**Figure 5.** Cylindrical shell:  
radius of cylinder  $R = 4.953$  cm; thickness  $h = 0.094$  cm; length  $L = 10.35$  cm;  
modulus of elasticity  $E = 10.5 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>; Poisson's ratio  $\mu = 0.3125$

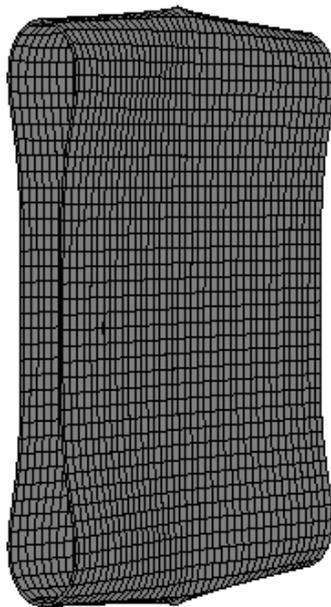
**Задача 3.** Рассматривается растяжение цилиндрической оболочки путем приложения сосредоточенных сил  $P$  (рис. 5).

Максимальное радиальное перемещение получено из аналитического соотношения  $W_{\max} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R = 2,82715$  см. На рис. 6 представлены радиальные перемещения на каждом шаге нагружения.



**Рис. 6.** График радиальных перемещений  
**Figure 6.** Radial displacement graph

Деформированное состояние цилиндрической оболочки при  $P = 1000$  кГ представлено на рис. 7. Приближенные решения других авторов можно найти в [25–29].



**Рис. 7.** Деформированное состояние цилиндрической оболочки  
**Figure 7.** Deformed state of a cylindrical shell

## 7. Заключение

Представлена методика расчета напряженно-деформированных состояний тонкостенных конструкций сложной геометрии модифицированным трехмерным конечным элементом теории упругости с однослойной аппроксимацией по толщине и введен в рассмотрение материал Сетха.

Приведенные численные расчеты тестовых задач демонстрируют работоспособность и достоверность предложенного алгоритма.

## Список литературы / References

1. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)  
Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
2. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable solids*. Kazan: Kazan University; 2009. (In Russ.)  
Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: Казан. гос. ун-т., 2009. 465 с.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method: its basis and fundamentals* Butterworth – Heinemann. 7th ed. Elsevier; 2013.
4. Golovanov A.I., Berezhnoy D.V. *Finite element method in mechanics of deformable solids*. Kazan: DAS Publ.; 2001. (In Russ.)  
Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС, 2001. 300 с.
5. Khairullin F.S., Sakhbiev O.M. *Calculation of thin-walled and three-dimensional structures of complex shape based on approximating functions with finite supports*. Kazan: KNRTU Publ.; 2020. (In Russ.)  
Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Расчет тонкостенных и трехмерных конструкций сложной формы на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями. Казань: Изд-во КНИТУ, 2020. 196 с.
6. Klochkov Yu.V., Ishchanov T.R., Dzhabrailov A.Sh., Andreev A.S., Klochkov M.Yu. Strength calculation algorithm for shell structures based on a four-node discretization element. *Journal of Physics: Conference Series. International Conference on IT in Business and Industry*. 2021;2032:012028. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2032/1/012028>
7. Khayrullin F.S., Mingaliev D.D. Numerical constructing of two-dimensional surface contain the piecewise smooth subdomains. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158(3):032013. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032013>
8. Gureeva N.A., Kiselev R.Z., Kiselev A.P., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. Volumetric element with vector approximation of the desired values for nonlinear calculation of the shell of rotation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):228–241. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>  
Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочкиков Ю.В. Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 228–241. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>
9. Ali K.J., Enaam O.H., Hussain A.A., Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Shell stress analysis using a variational method based on three-dimensional functions with finite carriers. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020;8(1):1102019. <https://doi.org/10.5937/jaes18-24130>
10. Sagdatullin M.K., Salman H.D., Kamil Sebur A., Obeid Hassoun E., Abdulaziz Abraham H. Modeling finite element for stress state calculation in combined structures. *Materials Science and Engineering*. 2020;765:012063. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/765/1/012063>
11. Sagdatullin M.K. Modeling of nonlinear behaviour of three-dimensional bodies and shells of average thickness by finite element method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158:042006. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042006>
12. Sagdatullin M.K. Modeling of non-linear behavior of shells by successive loading. *Proceedings of the All-Russian Scientific Conference with International Participation “Actual Problems of Continuum Mechanics – 2020”, 28 September – 2 October 2020, Kazan*. Kazan: Kazan University, Publishing House of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan; 2020. p. 360–364. (In Russ.)  
Сагдатуллин М.К. Моделирование нелинейного поведения оболочек путем последовательного нагружения // Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020: материалы Всероссийской научной конференции с международным участием, 28 сентября – 2 октября 2020 г., Казань. Казань: Казанский университет; Изд-во Академии наук Республики Татарстан, 2020. С. 360–364.

13. Golovanov A.I., Sagdatullin M.K. Statement of the problem of numerical simulation of finite hyperelastic deformations of the FEM. *Applied Mathematics and Mechanics: a Collection of Scientific Papers*. Ulyanovsk: UIGTU Publ.; 2009. p. 55–67. (In Russ.)

Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. Постановка задачи численного моделирования конечных гиперупругих деформаций МКЭ // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. Ульяновск: УЛГТУ, 2009. С. 55–67.

14. Khairullin F.S., Sakhbiev O.M. On the calculation of elastoplastic deformations by a variational method based on functions with finite carriers. *Bulletin of the Kazan Technological University*. 2021;24(4):102–106. (In Russ.)

Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О расчете упругопластических деформаций вариационным методом на основе функций с конечными носителями // Вестник Казанского технологического университета. 2021. Т. 24. № 4. С. 102–106.

15. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018;39(9):1478–1483.

16. Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ryabukha V.V. On the physical equations of a deformable body at the loading step with implementation based on a mixed FEM. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics, Mechanics, Informatics*. 2023;23(1):70–82. (In Russ.)

Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Клочков Ю.В., Николаев А.П., Рябуха В.В. О физических уравнениях деформируемого тела на шаге нагружения с реализацией на основе смешанного МКЭ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. № 1. С. 70–82. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>

17. Sultanov L.U., Kadirov A.M. Modeling of deformation of solids with material damage. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2022;141:505–513.

18. Sultanov L.U. Computational algorithm for investigation large elastoplastic deformations with contact interaction. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(8):2056–2063.

19. Garifullin I.R., Sultanov L.U. The algorithm of investigation of deformations of solids with contact interaction. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158(2):022001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022044>

20. Sagdatullin M.K. Statement of the problem of stability of a cylindrical panel by the finite element method. *Bulletin of the Kazan Technological University*. 2019;22(3):158–162. (In Russ.)

Сагдатуллин М.К. Постановка задачи устойчивости цилиндрической панели методом конечных элементов // Вестник технологического университета. 2019. Т. 22. № 3. С. 158–162.

21. Sagdatullin M.K. Determination of the supercritical state of a cylindrical panel. *Bulletin of the Technological University*. 2020;23(3):110–114. (In Russ.)

Сагдатуллин М.К. Определение сверхкритического состояния цилиндрической панели // Вестник технологического университета. 2020. Т. 23. № 3. С. 110–114.

22. Fakhrutdinov L.R., Abdrakhmanova A.I., Garifullin I.R. Numerical investigation of large strains of incompressible solids. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158(2):022041. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022041>

23. Golovanov A.I., Sagdatullin M.K. Three-dimensional finite element for the calculation of thin-walled structures. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 2009;151(3):121–129. (In Russ.)

Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математических наук. 2009. Т. 151. № 3. С. 121–129.

24. Davis T.A. *Direct methods for sparse linear systems*. Philadelphia: SIAM; 2006.

25. Krätzig W.B., Oñate E. *Computational mechanics of nonlinear response of shells*. Berlin: Springer; 1990.

26. Areias P.M.A., Jeong-Hoon S., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff – Love constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005;64:1166–1206. <https://doi.org/10.1002/nme.1389>

27. Scordelis A.C., Lo K.S. Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of the American Concrete Institute*. 1969;61:539–561.

28. Surana Karan S. Geometrically nonlinear formulation for the three dimensional solid – shell transition finite elements. *Computers & Structures*. 1982;15(5):549–566. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(82\)90007-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(82)90007-4)

29. Surana Karan S. Transition finite elements for three – dimensional stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1980;15(7):991–1020. <https://doi.org/10.1002/nme.1620150704>