

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72  
EDN: FVOZAA  
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения

Ю.В. Клочков<sup>1</sup>✉, В.А. Пшеничкина<sup>2</sup>✉, А.П. Николаев<sup>1</sup>✉,  
О.В. Вахнина<sup>1</sup>✉, М.Ю. Клочков<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Российская Федерация

<sup>2</sup>Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Российская Федерация

✉ klotchkov@bk.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 15 ноября 2022 г.

Доработана: 20 февраля 2023 г.

Принята к публикации: 24 февраля 2023 г.

### Для цитирования

Клочков Ю.В., Пшеничкина В.А., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочков М.Ю. Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>

**Аннотация.** Цель исследования – разработка алгоритма конечно-элементного расчета тонких оболочек вращения на основе смешанной формулировки метода конечных элементов в двумерной постановке при использовании в качестве элемента дискретизации четырехугольного фрагмента срединной поверхности. Искомыми узловыми неизвестными были выбраны продольные усилия и моменты, а также компоненты вектора перемещения. Количество искомых неизвестных в каждом из узлов четырехузловой элемента дискретизации достигает девяти: шесть силовых и три кинематических искомых величин. Для получения матрицы податливости и столбца узловых усилий использовался модифицированный функционал Рейсснера, в котором полная удельная работа напряжений представлена удельной работой мембранных усилий и изгибающих моментов срединной поверхности на ее деформациях и искривлениях, а удельная дополнительная работа определена удельной работой мембранных усилий и изгибающих моментов срединной поверхности. В качестве аппроксимирующих выражений и для силовых, и для кинематических искомых неизвестных использовались билинейные функции формы локальных координат. Размерность матрицы податливости четырехузловой элемента дискретизации составила  $36 \times 36$ . Решение тестовой задачи по анализу напряженно-деформированного состояния усеченного эллипсоида вращения, нагруженного внутренним давлением, показало достаточную для инженерной практики точность вычислений прочностных параметров исследуемой оболочечной конструкции.

**Ключевые слова:** четырехузловой элемент дискретизации, напряженно-деформированное состояние, матрица податливости

**Клочков Юрий Васильевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, электроэнергетический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

**Пшеничкина Валерия Александровна**, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции, основания и надежность сооружений», факультет строительства и жилищно-коммунального хозяйства, Волгоградский государственный технический университет, Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-кт Ленина, д. 28; ORCID: 0000-0001-9148-2815, Scopus ID: 57189646401, eLIBRARY SPIN-код: 3399-0668; vap\_hm@list.ru

**Николаев Анатолий Петрович**, доктор технических наук, профессор кафедры механики, инженерно-технологический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

**Вахнина Ольга Владимировна**, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, электроэнергетический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0001-9234-7287, Scopus ID: 55235780600, eLIBRARY SPIN-код: 3593-0159; ovahnina@bk.ru

**Клочков Михаил Юрьевич**, аспирант, кафедра «Строительные конструкции, основания и надежность сооружений», факультет строительства и жилищно-коммунального хозяйства, Волгоградский государственный технический университет, Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-кт Ленина, д. 28; ORCID: 0000-0001-6751-4629, Scopus ID: 57215535887, eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955; m.klo4koff@yandex.ru

© Клочков Ю.В., Пшеничкина В.А., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочков М.Ю., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Quadrilateral element in mixed FEM for analysis of thin shells of revolution

Yuriy V. Klochkov<sup>1</sup>  , Valeria A. Pshenichkina<sup>2</sup> , Anatoliy P. Nikolaev<sup>1</sup> ,  
Olga V. Vakhnina<sup>1</sup> , Mikhail Yu. Klochkov<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russian Federation

<sup>2</sup>Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

 klotchkov@bk.ru

### Article history

Received: November 15, 2022

Revised: February 20, 2023

Accepted: February 24, 2023

**Abstract.** The purpose of study is to develop an algorithm for the analysis of thin shells of revolution based on the hybrid formulation of finite element method in two dimensions using a quadrilateral fragment of the middle surface as a discretization element. Nodal axial forces and moments, as well as components of the nodal displacement vector were selected as unknown variables. The number of unknowns in each node of the four-node discretization element reaches nine: six force variables and three kinematic variables. To obtain the flexibility matrix and the nodal forces vector, a modified Reissner functional was used, in which the total specific work of stresses is represented by the specific work of membrane forces and bending moments of the middle surface on its membrane and bending strains, and the specific additional work is determined by the specific work of membrane forces and bending moments of the middle surface. Bilinear shape functions of local coordinates were used as approximating expressions for both force and displacement unknowns. The dimensions of the flexibility matrix of the four-node discretization element were found to be  $36 \times 36$ . The solution of benchmark problem of analyzing a truncated ellipsoid of revolution loaded with internal pressure showed sufficient accuracy in calculating the strength parameters of the studied shell.

**Keywords:** four-node discretization element, stress-strain state, flexibility matrix

### For citation

Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. Quadrilateral element in mixed FEM for analysis of thin shells of revolution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>

### Введение

Анализ НДС тонких оболочек на основе МКЭ в формулировке метода перемещений (когда узловыми неизвестными конечного элемента являются перемещения и их частные производные различных порядков) достаточно детально разработан и широко используется в настоящее время в различных программных комплексах. В [1] МКЭ представлен в качестве альтернативы методу конечных разностей с обоснованием его преимуществ. Он широко используется в расчетах балок и рамных конструкций [2], а также многослойных пластин и оболочек [3; 4] и при расчете объемных конструкций и толстых плит [5; 6]. Широкое использование МКЭ получил в формулировке метода перемещений при расчете тонких оболочек при упругом и упругопластическом деформировании [7–11]. Этот метод используется и при анализе нелинейного деформирования пластин и оболочек [12–15]. Применяется МКЭ в формулировке метода перемещений и в случаях больших деформаций при нагружении пластин и оболочек [16–18], а также в расчетах устойчивости оболочек [19; 20]. В инженерных задачах устойчивости предложена смешанная формулировка, основанная на использовании схемы «предиктор – корректор» [21; 22]. Для получения приемлемого уровня точности вычисления искомых величин необходимо использование аппроксимиру-

**Yuriy V. Klochkov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Electric Power and Energy Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

**Valeriya A. Pshenichkina**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Building Structures, Foundations and Reliability of Structures, Faculty of Construction and Housing and Communal Services, Volgograd State Technical University, 28 Leninskii Prospekt, Volgograd, 400005, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9148-2815, Scopus ID: 57189646401, eLIBRARY SPIN: 3399-0668; vap\_hm@list.ru

**Anatoliy P. Nikolaev**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics, Faculty of Engineering and Technology, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

**Olga V. Vakhnina**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Electric Power and Energy Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9234-7287, Scopus ID: 55235780600, eLIBRARY SPIN-code: 3593-0159; ovahnina@bk.ru

**Mikhail Yu. Klochkov**, postgraduate student, Department of Building Structures, Foundations and Reliability of Structures, Faculty of Construction and Housing and Communal Services, Volgograd State Technical University, 28 Leninskii Prospekt, Volgograd, 400005, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6751-4629, Scopus ID: 57215535887, eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955; m.klo4koff@yandex.ru

ющих выражений класса  $C^{(2)}$ , так как соотношения Коши для тонких оболочек [23; 24] содержат частные производные нормальной компоненты вектора перемещения второго порядка. При использовании МКЭ в смешанной формулировке (когда узловыми неизвестными конечного элемента принимаются перемещения, продольные усилия и моменты) для аппроксимации искомых величин достаточно применения аппроксимирующих функций классов  $C^{(0)}$  и  $C^{(1)}$ . Существенным преимуществом применения МКЭ в смешанной формулировке является возможность вычисления напряжений и деформаций в узле конечного элемента через найденные искомые величины конечного элемента непосредственно в конкретном узле, в то время как МКЭ в формулировке метода перемещений для определения напряжений требует привлечения найденных искомых неизвестных соседних узлов, что увеличивает погрешность вычислений. В этой связи наиболее актуальной в настоящее время является разработка алгоритмов линейного и нелинейного расчета тонких оболочек на основе МКЭ в смешанной формулировке при использовании криволинейных систем координат.

### Методы исследования

Рассмотрим функционал Рейсснера в следующей формулировке [25; 26]:

$$\Phi_R = \int_V \{\sigma\}^T \left\{ \varepsilon^\zeta \right\} dV - \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [C_\varepsilon] \{\sigma\} dV - \frac{1}{2} \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \quad (1)$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}\}$ ,  $\{\varepsilon^\zeta\}^T = \{\varepsilon_{11}^\zeta \ \varepsilon_{22}^\zeta \ \varepsilon_{12}^\zeta\}$  – напряжения и деформации в точке оболочечной конструкции, находящейся на расстоянии  $\zeta$  по вертикали от соответствующей точки срединной поверхности; матрица  $[C_\varepsilon]$  представляет собой матрицу перехода от столбца  $\{\varepsilon^\zeta\}$  к столбцу  $\{\sigma\}$ , скомпонованную на основе закона Гука для тонкой оболочки [23; 24];  $\{U\}^T = \{uvw\}$  – матрица-строка компонент вектора перемещения точки срединной поверхности тонкой оболочки;  $\{P\}$  – столбец внешней поверхностной нагрузки.

Входящие в структуру функционала (1) напряжения  $\{\sigma\}$  выражаются через усилия срединной поверхности [23; 24]:

$$\sigma_{11} = \frac{N_{11}}{h} + \frac{\zeta M_{11}}{I}; \quad \sigma_{22} = \frac{N_{22}}{h} + \frac{\zeta M_{22}}{I}; \quad \sigma_{12} = \frac{N_{12}}{h} + \frac{\zeta M_{12}}{I}, \quad (2)$$

где  $I = \frac{h^3}{12}$  – момент инерции сечения;  $h$  – высота сечения.

Деформации произвольного слоя оболочки определяются через деформации и искривления срединной поверхности соотношениями [23; 24]:

$$\varepsilon_{11}^\zeta = \varepsilon_{11} + \zeta \aleph_{11}; \quad \varepsilon_{22}^\zeta = \varepsilon_{22} + \zeta \aleph_{22}; \quad \varepsilon_{12}^\zeta = \varepsilon_{12} + 2\zeta \aleph_{12}. \quad (3)$$

Физические и геометрические выражения (2) и (3) могут быть представлены в матричном виде:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \Gamma_\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_0 \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon^\zeta\} = \begin{bmatrix} \Gamma_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\begin{Bmatrix} S_0 \end{Bmatrix}^T = \{N_{11} \ N_{22} \ N_{12} \ M_{11} \ M_{22} \ M_{12}\}$ ;  $\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \end{Bmatrix}^T = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \aleph_{11} \ \aleph_{22} \ \aleph_{12}\}$ ;





После минимизации (11) по  $\{U_y\}^T$  можно записать следующее матричное выражение:

$$\frac{\partial \Phi_R}{\partial \{U_y\}^T} = \begin{bmatrix} [Q] \\ 12 \times 24 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{S_y\} \\ 24 \times 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{f_y\} \\ 12 \times 1 \end{Bmatrix} = 0. \quad (12)$$

Выполнив перестановку слагаемых в (10) и учитывая (12), можно получить матрицу податливости и столбец узловых усилий для четырехузлового элемента дискретизации в следующем виде:

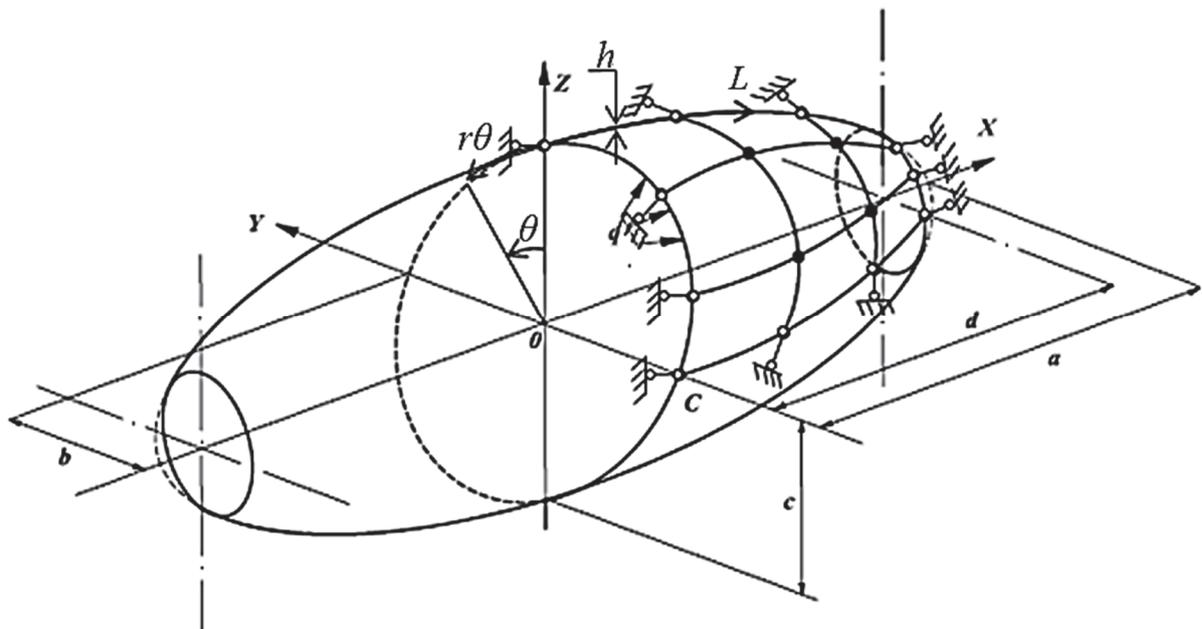
$$\begin{bmatrix} -[Y] & [Q] \\ 24 \times 24 & 24 \times 12 \\ [Q]^T & [0] \\ 12 \times 24 & 12 \times 12 \\ 36 \times 36 & 36 \times 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{S_y\} \\ 24 \times 1 \\ \{U_y\} \\ 12 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 24 \times 1 \\ \{f\} \\ 12 \times 1 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Таким образом, размерность матрицы податливости четырехузлового элемента дискретизации составляет  $36 \times 36$ , а столбец искомого неизвестных включает в себя 24 силовых и 12 кинематических узловых неизвестных, в качестве которых выступают продольные силы  $N_{\alpha\beta}$ , моменты  $M_{\alpha\beta}$  и компоненты вектора перемещения узловой точки срединной поверхности тонкой оболочки.

Построение общей матрицы податливости и столбца узловых усилий всей оболочечной конструкции осуществляется с помощью матрицы индексов, отражающей граничные условия рассчитываемой оболочечной конструкции [28].

### Результаты и обсуждение

*Пример расчета.* С целью верификации разработанного алгоритма выполнен расчет усеченного эллипсоида вращения, расчетная схема которого представлена на рисунке.



Truncated ellipsoid of revolution

Приняты следующие исходные данные: параметры эллипсоида  $a=1,3$  м;  $b=c=0,9$  м; толщина оболочки  $h=0,02$  м; модуль упругости материала  $E=2 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu=0,3$ ; ин-

тенсивность внутреннего давления  $q = 5$  МПа. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/8 часть эллипсоида. Результаты расчетов представлены в таблице, в которой приведены численные значения нормальных напряжений на срединной поверхности в опорном ( $x = 0,0$  м) и концевом ( $x = 1,2$  м) сечениях эллипсоида вращения при измельчении сетки узлов элементов дискретизации.

Из анализа данных, представленных в таблице, следует, что при измельчении сетки узлов элементов дискретизации наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса. Однако факт наличия сходимости вычислительного процесса является необходимым, но не достаточным условием адекватности разработанного алгоритма реальной картине физического процесса распределения напряжений в рассчитываемой оболочечной конструкции.

Для анализа объективности полученных численных результатов вычислим меридиональные напряжения в опорном и концевом сечениях. В опорном сечении меридиональные напряжения могут быть получены исходя из условия равновесия

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \frac{q}{h2\pi R_0} (\pi R_0^2 - \pi R_k^2), \quad (14)$$

где  $R_0, R_k$  – радиусы вращения эллипсоида в опорном и концевом сечениях, причем  $R_0 = b = 0,9$  м;  $R_k = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_k^2} = \frac{0,9}{1,3} \sqrt{1,3^2 - 1,2^2} = 0,346$  м.

Значения нормальных напряжений на срединной поверхности эллипсоида

Сечение	Напряжения, МПа	Сетка узлов					Аналитическое решение по уравнению Лапласа
		41 × 41	61 × 61	81 × 81	101 × 101	121 × 121	
Опорное, $x = 0,0$ м	$\sigma_{11}$	95,93	95,89	95,88	95,87	95,87	95,86
	$\sigma_{22}$	179,03	179,04	179,05	179,05	179,05	179,06
Концевое, $x = 1,2$ м	$\sigma_{11}$	0,916	0,449	0,270	0,182	0,133	0,00
	$\sigma_{22}$	167,75	168,45	168,78	168,96	169,06	167,82

В результате подстановки в (14) исходных данных можно получить следующее значение меридионального напряжения в опорном сечении оболочки:  $\sigma_{11}|_{x=0} = \frac{5}{0,02 \cdot 2\pi \cdot 0,9} (\pi 0,9^2 - \pi 0,346^2) = 95,86$  МПа.

Меридиональное напряжение в концевом сечении должно быть равно нулю, так как правый торец оболочки не загружен:  $\sigma_{11}|_{x=1,2} = 0,00$  МПа.

Кольцевые напряжения  $\sigma_{22}$  на срединной поверхности эллипсоида в опорном и концевом сечениях оболочечной конструкции могут быть выражены с помощью уравнения Лапласа:

$$\frac{\sigma_{11}}{R_1} + \frac{\sigma_{22}}{R_2} = \frac{q}{h}. \quad (15)$$

Входящие в (15) радиусы главных кривизн  $R_1$  и  $R_2$  определяются зависимостями

$$R_1 = -1/(x_{,S}^3 r_{,xx}); \quad R_2 = 1/(r/x_{,S}), \quad (16)$$

где  $r = (b/a) \sqrt{a^2 - x^2}$  – радиус вращения эллипсоида;  $r_{,xx}$  – производная радиуса вращения второго порядка;  $x_{,S} = 1/\sqrt{1 + (r_{,x})^2}$ .

Таким образом, из (15) можно получить аналитическое значение кольцевых напряжений в опорном и концевом сечениях эллипсоида:

$$\sigma_{22} = \left( \frac{q}{h} - \frac{\sigma_{11}}{R_1} \right) R_2. \quad (17)$$

После подстановки в (17) соответствующих исходных данных можно записать вычисленные значения искомых напряжений:  $\sigma_{22}|_{x=0} = 179,06$  МПа;  $\sigma_{22}|_{x=1,2} = 167,82$  МПа.

### Заключение

Выполняя сопоставительный анализ значений меридиональных  $\sigma_{11}$  и кольцевых  $\sigma_{22}$  напряжений, вычисленных аналитическим путем (14)–(17) и полученных с помощью разработанного алгоритма, можно прийти к выводу о приемлемом уровне точности конечно-элементных решений по предлагаемому алгоритму, так как минимальная погрешность вычислений не превышает 1 %. Разработанный алгоритм может быть рекомендована к использованию в расчетной инженерной практике по исследованию НДС тонких оболочек.

### Список литературы

1. Баме К.Ю. Метод конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.
2. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 578–579. Pp. 858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
3. Agapov V. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness // E3S Web of Conferences. 2018 Topical Problems of Architecture, Civil Engineering and Environmental Economics, TPACSEE 2018. 2019. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199102013>
4. Chernysheva N., Rozin L. Modified finite element analysis for exterior boundary problems in infinite medium // MATEC Web of Conferences / ed. by V. Murgul. 2016. <https://doi.org/10.1051/matecconf/20165301042>
5. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 9. Pp. 2263–2271.
6. Tyukalov Yu.Ya. Quadrilateral finite element for thin and thick plates // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. No. 5 (98). <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.2>
7. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Sugiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 10. No. 5. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>
8. Klochkov Y.V., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Gureeva N.A., Klochkov M.Y. Calculation of an ellipsoid-shaped shell based on a consistent triangular discretization element with an invariant interpolation procedure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2022. Vol. 51. No. 3. Pp. 216–229.
9. Klochkov Yu., Nikolaev A., Vakhnina O., Sobolevskaya T., Klochkov M. Physically nonlinear shell deformation based on three-dimensional finite elements // Magazine of Civil Engineering. 2022. No. 5 (113). <https://doi.org/10.34910/MCE.113.14>
10. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Y. Variable formation plasticity matrices of a three-dimensional body when implementing a step loading procedure // Journal of Physics: Conference Series. 5. V International Scientific and Technical Conference “Mechanical Science and Technology Update” (MSTU 2021). 2021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1901/1/012118>
11. Klochkov Yu.V., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. Algorithm of finite elemental SSS analysis of thin-walled technosphere objects based on a triangular discretion element with elastic-plastic deformation // Journal of Physics: Conference Series. International Conference on IT in Business and Industry (ITBI 2021). 2021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2032/1/012028>
12. Leonetti L., Magisano D., Madeo A., Garcea G., Kiendl J., Reali A. A simplified Kirchhoff – Love large deformation model for elastic shells and its effective isogeometric formulation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019. Vol. 354. Pp. 369–396. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.05.025>
13. Neto M.A., Amaro A., Roseiro L., Cirne J., Leal R. Finite element method for plates/shells // Engineering Computation of Structures: The Finite Element Method. Cham: Springer, 2015. Pp. 195–232. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-17710-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-17710-6_6)

14. *Sultanov L.U.* Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018. Vol. 39. No. 9. Pp. 1478–1483. <https://doi.org/10.1134/S1995080218090056>
15. *Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N.* The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042014>
16. *Garcea G., Liguori F.S., Leonetti L., Magisano D., Madeo A.* Accurate and efficient a posteriori account of geometrical imperfections in Koiter finite element analysis // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol. 112. No. 9. Pp. 1154–1174. <https://doi.org/10.1002/nme.5550>
17. *Hanslo P., Larson Mats G., Larson F.* Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // *Computational Mechanics*. 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.
18. *Ren H.* Fast and robust full-guadrature triangular elements for thin plates/ shells, with large deformations and large rotations // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 10. No. 5. <https://doi.org/10.1115/1.4030212>
19. *Косицын С.Б., Акулич В.Ю.* Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 6. С. 608–616. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
20. *Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V.* Nonlinear deformation and stability of discrete-reinforced elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure // *Russian Aeronautics*. 2018. Vol. 61. No. 2. Pp. 175–182.
21. *Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: Serendipity basis and modified reduced quadrature // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.
22. *Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M.* An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2018. Vol. 113. No. 4. Pp. 634–655.
23. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.
24. *Черных К.Ф.* Нелинейная упругость (теория и приложения). СПб., 2004.
25. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Знатьне, 1988.
26. *Гуреева Н.А., Николаев А.П., Юшкин В.Н.* Сравнительный анализ конечно-элементных формулировок при плоском нагружении упругого тела // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 2. С. 139–145. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145>
27. *Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселёв А.П., Гуреева Н.А.* Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек. Волгоград, 2012. 264 с.
28. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.