

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-56-63
EDN: DXBQYB
УДК 531.2

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Расчет радиально неоднородного кольца, нагруженного нормальными и касательными нагрузками

В.И. Андреев 

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ asv@mgsu.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 19 ноября 2022 г.
Доработана: 17 января 2023 г.
Принята к публикации: 20 января 2023 г.

Для цитирования

Андреев В.И. Расчет радиально неоднородного кольца, нагруженного нормальными и касательными нагрузками // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 56–63. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-56-63>

Аннотация. Исследование нацелено на решение задачи напряженно-деформированного состояния тонкого кольца при радиальных и кольцевых нагрузках с учетом радиальной неоднородности кольца, а также на сравнение двух методов расчета на примере решения задачи, когда нагрузки неравномерно распределены вдоль внешней поверхности кольца при одномерной неоднородности. В двумерной плоской задаче теории упругости в полярных координатах для неоднородного тела используются аналитические или численно-аналитические решения. В большинстве таких задач рассматриваются центрально симметричные круглые тела. Как правило, это возможно, когда все неизвестные функции зависят от радиуса. Эти задачи соответствуют большинству кольцевых и цилиндрических сооружений. Трубы пригодны для трубопроводных систем и строительства, применяются для газопроводов, в тепловых сетях и водопроводах. Особенность работы в рассмотрении задачи, когда радиальные и кольцевые нагрузки неравномерно распределены вдоль внешней поверхности кольца. Сравнение результатов расчета, полученных двумя методами, позволяет с достаточной точностью определить напряженное и деформированное состояния, показателем чего является получение кольцевых напряжений.

Ключевые слова: тонкое кольцо, плоская задача, радиальные нагрузки, кольцевые нагрузки, радиальная неоднородность, аналитические методы, численно-аналитические методы

Calculation of radially inhomogeneous ring loaded with normal and tangential loads

Vladimir I. Andreev 

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ asv@mgsu.ru

Article history

Received: November 19, 2022
Revised: January 17, 2023
Accepted: January 20, 2023

Abstract. The aim of the study is to solve the problem of the stress-strain state of a thin ring under radial and ring loads, factoring in the radial inhomogeneity of the ring. Also, the task is to compare the two calculation methods to the example of solving the problem of uneven load distribution along the outer surface of

Андреев Владимир Игоревич, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-1057-4329, Scopus Author ID: 57198780961, eLIBRARY SPIN-код: 9906-7214; asv@mgsu.ru

Vladimir I. Andreev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavlshoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1057-4329, Scopus Author ID: 57198780961, eLIBRARY SPIN-code: 9906-7214; asv@mgsu.ru

© Андреев В.И., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

For citation

Andreev V.I. Calculation of radially inhomogeneous ring loaded with normal and tangential loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1): 56–63. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-56-63>

the ring with one-dimensional inhomogeneity. Analytical or numerical-analytical solutions are used in the two-dimensional plane problem of the theory of elasticity in polar coordinates for an inhomogeneous body. Most of these problems consider centrally symmetric circular bodies. As a rule, this is possible when all unknown functions depend on the radius. These tasks correspond with the majority of ring and cylindrical structures. Pipes are suitable for creating pipeline systems and civil engineering, they are used for gas pipelines, in heating networks and water supply systems. The key feature of the work lies in the consideration of uneven radial and ring loads distribution along the outer surface of the ring. Comparison of the calculation results obtained by two methods makes it possible to determine the stressed and deformed states with sufficient accuracy, an indicator of which is the obtaining of the ring stresses.

Keywords: thin ring, plane task, radial loads, ring loads, radial inhomogeneity, analytical methods, numerical-analytical methods

Введение

Рассматривается плоская задача теории упругости в полярных координатах для радиально неоднородного диска под действием переменных нормальных и касательных нагрузок с учетом радиальной неоднородности. Решение задачи позволяет рассчитывать на прочность и деформированность труб при действии внутреннего и внешнего давления, а также кручения. Особенность исследования заключается в неоднородности конструкции, что значительно расширяет объем решения задач механики деформирования твердых тел.

Первые статьи по постановке и решению задач механики неоднородных тел появились в 1950-е и 1960-е гг. с созданием ЭВМ. Значительный вклад в развитие механики неоднородных тел внесли российские ученые: С.Г. Михлин [1], Г.Б. Лехницкий [2], В.А. Ломакин [3], Г.Б. Колчин [4; 5]. Следует упомянуть работы польских ученых, в первую очередь В. Ольшака и его учеников [6; 7]. Автор данной статьи начал заниматься рассматриваемым направлением механики с 1974 г. [8–11] и продолжает с учениками и коллегами в настоящее время [12–15].

Предложенная статья посвящена решению задачи напряженно-деформированного состояния тонкого кольца при радиальных и кольцевых нагрузках с учетом радиальной неоднородности кольца.

Задача является двумерной с одномерной неоднородностью. Используется метод разделения переменных, в основу которого положено развитие обобщенного решения Дж. Мичелла (J.H. Michell) [16] для плоской задачи в полярных координатах. Приведены два решения задачи – аналитическое и численно-аналитическое, показано сравнение результатов двух расчетов.

Постановка задачи

Рассматривается задача о равновесии тонкого кольца, когда к его внешней поверхности приложены усилия

$$p = p_0(1 + \cos 2\theta)/2; \quad q = p_0 \sin 2\theta/2, \tag{1}$$

а внутренняя поверхность свободна от нагрузки (рис. 1).

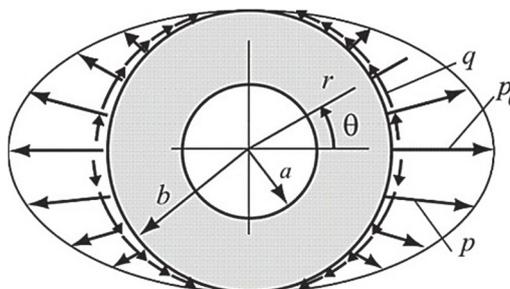


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Модуль упругости материала кольца изменяется по степенному закону

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{a} \right)^\delta, \quad (2)$$

коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$.

Аналитическое решение

В основу аналитического решения положен метод [17], основанный на развитии обобщенного решения Мичелла [16], для расчета плоской задачи в полярных координатах для *неоднородных* конструкций. В данном методе решение ищется в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \theta + \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \theta \sin \theta + \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \theta \cos \theta + \\ & + \begin{pmatrix} \varphi_4 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \sin \theta + \begin{pmatrix} \varphi_5 \\ \psi_5 \end{pmatrix} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} \varphi_{sn} \\ \psi_{sn} \end{pmatrix} \sin n\theta + \begin{pmatrix} \varphi_{cn} \\ \psi_{cn} \end{pmatrix} \cos n\theta \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где каждое слагаемое состоит из произведения неизвестных функций (φ_i, ψ_i) , умножаемых на определенную тригонометрическую функцию. В (3) индексы s и c означают, что соответствующие функции умножаются на $\sin n\theta$ или $\cos n\theta$.

Решение сводится к бесконечной частично распадающейся системе уравнений второго порядка. В рассматриваемой задаче из этой системы выбираются соответствующие уравнения в зависимости от граничных условий и формул для напряжений.

В соответствии с (1) граничные условия имеют вид

$$r = a; \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0; \quad r = b; \quad \sigma_r = p(\theta); \quad \tau_{r\theta} = -q(\theta). \quad (4)$$

Сопоставляя граничные условия и напряжения можно принять, что выражения для напряжений должны содержать функции $\varphi_0, \psi_1, \varphi_{s2}$ и ψ_{s2} . Из системы упомянутых дифференциальных уравнений для определения указанных функций необходимо рассмотреть следующие четыре уравнения:

$$(\lambda^* + 2\mu) \left(\varphi_0'' + \frac{\varphi_0'}{r} - \frac{\varphi_0}{r^2} \right) + \frac{\lambda^* + \mu}{r} \psi_1' - \frac{\lambda^* + 3\mu}{r^2} \psi_1 + [(\lambda^*)' + 2\mu'] \varphi_0' + \frac{(\lambda^*)'}{r} (\varphi_0 + \psi_1) = 0; \quad (5)$$

$$\mu \left(\psi_1'' + \frac{\psi_1'}{r} - \frac{\psi_1}{r^2} \right) + \mu' \left(\psi_1' - \frac{\psi_1}{r} \right) = 0; \quad (6)$$

$$-2 \frac{\lambda^* + \mu}{r} \varphi_{c2}' - 2 \frac{\lambda^* + 3\mu}{r^2} \varphi_{c2} + \mu \left(\psi_{s2}'' + \frac{\psi_{s2}'}{r} - \frac{\psi_{s2}}{r^2} \right) - 4 \frac{\lambda^* + 2\mu}{r^2} \psi_{s2} - \frac{\mu'}{r} (2\varphi_{c2} - r\psi_{s2}' + \psi_{s2}) = 0; \quad (7)$$

$$(\lambda^* + 2\mu) \left(\varphi_{c2}'' + \frac{\varphi_{c2}'}{r} - \frac{\varphi_{c2}}{r^2} \right) - \frac{4\mu}{r^2} \varphi_{c2} + 2 \frac{\lambda^* + \mu}{r} \psi_{s2}' - 2 \frac{\lambda^* + 3\mu}{r^2} \psi_{s2} + [(\lambda^*)' + 2\mu'] \varphi_{c2}' + \frac{(\lambda^*)'}{r} (\varphi_{c2} + 2\psi_{s2}) = 0. \quad (8)$$

В приведенных уравнениях сделан переход от плоского деформированного состояния к плоскому напряженному состоянию путем замены параметра λ на $\lambda^* = \frac{Ev}{1-\nu^2}$.

Принимая во внимание, что решение данной задачи с учетом условия однозначности не должно иметь членов, содержащих θ , из (3) следует, что $\psi_1 - \frac{\Psi_1}{r} = 0$. С учетом этого равенства уравнение (6) принимает вид $\psi_1'' = 0$. Интегралом данного уравнения является линейная функция, обращающаяся в постоянную величину при $r = a, b$. Учитывая, что граничные условия (18) для $\tau_{r\theta}$ с учетом (1) не содержат постоянной, следует положить $\psi_1 = 0$. Тогда уравнение (5) упрощается:

$$(\lambda^* + 2\mu) \left(\varphi_0'' + \frac{\varphi_0'}{r} - \frac{\varphi_0}{r^2} \right) + [(\lambda^*)' + 2\mu'] \varphi_0' + \frac{(\lambda^*)'}{r} \varphi_0 = 0 \quad (9)$$

и может служить для определения функции φ_0 .

Таким образом, задачу можно разделить на две: определение с помощью уравнения (9) осесимметричной составляющей решения и определение из уравнений (7), (8) составляющей, зависящей от θ . Подстановка (2) в указанные уравнения приводит их к виду

$$\varphi_0'' + (1 + \delta) \frac{\varphi_0'}{r} + (\delta\nu - 1) \frac{\varphi_0}{r^2} = 0; \quad (10)$$

$$\psi_{s2}'' + (1 + \delta) \frac{\psi_{s2}'}{r} - \left(\frac{9 - \nu}{1 - \nu} + \delta \right) \frac{\psi_{s2}}{r^2} - \frac{2(1 + \nu)}{1 - \nu} \frac{\varphi_{c2}'}{r} - \left(\frac{6 - 2\nu}{1 - \nu} + 2\delta \right) \frac{\varphi_{c2}}{r^2} = 0; \quad (11)$$

$$\varphi_{c2}'' + (1 + \delta) \frac{\varphi_{c2}'}{r} + (\delta\nu - 3 + 2\nu) \frac{\varphi_{c2}}{r^2} + (1 + \nu) \frac{\psi_{s2}'}{r} - (3 - \nu - 2\delta\nu) \frac{\psi_{s2}}{r^2} = 0. \quad (12)$$

Решением уравнения (10) является функция

$$\varphi_0 = C_1 r^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}} + C_2 r^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}, \quad (13)$$

где $\alpha = (1 + \delta)$, $\beta = \sqrt{(1 - \alpha)^2 - 4(\delta\nu - 1)}$.

Константы интегрирования, входящие в (13), могут быть найдены из граничных условий для осесимметричной составляющей внешней нагрузки:

$$r = a; \quad \sigma_r = 0; \quad r = b; \quad \sigma_r = p_0/2.$$

Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (12) может быть сведена к одному уравнению четвертого порядка следующим образом. Из уравнения (11) выразим ψ_{s2}' как функцию от ψ_{s2} , φ_{c2} и ее производных:

$$\psi_{s2}' = f_1(\psi_{s2}, \varphi_{c2}, \varphi_{c2}', \varphi_{c2}). \quad (a)$$

Дифференцируя полученное выражение по r и подставив в него равенство (а), получим

$$\Psi''_{s2} = f_2(\Phi'''_{c2}, \Phi''_{c2}, \Phi'_{c2}, \Phi_{c2}, \Psi_{s2}). \quad (6)$$

Подставляя (а) и (б) в (5.40), найдем выражение для Ψ_{s2} :

$$\Psi_{s2} = f_3(\Phi'''_{c2}, \Phi''_{c2}, \Phi'_{c2}, \Phi_{c2}). \quad (в)$$

Дифференцируя последнее равенство один раз по r , приравняем полученное выражение соотношению (а), подставив в него (в). В результате получим уравнение четвертого порядка относительно функции Φ_{c2} :

$$r^4 \Phi_{c2}^{IV} + (6 + 2\delta)r^3 \Phi_{c2}''' + (5\delta + \delta^2 + v\delta - 3)r^2 \Phi_{c2}'' + (v\delta^2 + v\delta - 9\delta - 9)r \Phi_{c2}' + (3v\delta^2 + 3v\delta - 3\delta + 9)\Phi_{c2} = 0. \quad (14)$$

Полученное уравнение можно свести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, введя переменную t с помощью зависимости $r = e^t$:

$$\frac{d^4 \Phi_{c2}}{dt^4} + 2\delta \frac{d^3 \Phi_{c2}}{dt^3} + (\delta^2 + v\delta - \delta - 10) \frac{d^2 \Phi_{c2}}{dt^2} + (v\delta^2 - \delta^2 - 10\delta) \frac{d \Phi_{c2}}{dt} + (3v\delta^2 + 3v\delta - 3\delta + 9)\Phi_{c2} = 0.$$

Характеристическим уравнением, соответствующим полученному уравнению, будет

$$l^4 + 2\delta l^3 + (\delta^2 + v\delta - 10)l^2 + (v\delta^2 - \delta^2 - 10\delta)l + 3v\delta^2 + 3v\delta - 3\delta + 9 = 0.$$

Используя замену $\eta = l^2 + \delta l$, данное уравнение можно свести к квадратному

$$\eta^2 + (v\delta - \delta - 10)\eta + 3v\delta^2 + 3v\delta - 3\delta + 9 = 0.$$

Окончательное решение уравнения (14) представляется в виде

$$\Phi_{c2} = \sum_{i=1}^4 D_i e^{l_i t},$$

константы которого D_i определяются из граничных условий для неосесимметричной составляющей:

$$r = a; \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0; \quad r = b; \quad \sigma_r = p_0 \cos 2\theta/2; \quad \tau_{r\theta} = -p_0 \sin 2\theta/2.$$

Функцию Ψ_{c2} можно найти из равенства (в).

Ниже приводится пример расчета, проведенного для следующих исходных данных: $\delta = -1$; $b/a = 2$; $v = 1/3$; $E = 2 \cdot 10^4$ МПа.

На рис. 2 показаны эпюры напряжений σ_θ вдоль трех направлений радиуса. Из приведенных графиков можно сделать вывод, что учет неоднородности в данном случае не приводит к качественному изменению характера эпюр. Что же касается численных отличий, то они в некоторых случаях составляют примерно 20 %. Естественно предположить, что при более существенной неоднородности отличия в результатах для однородного и неоднородного материалов могут быть более существенны.

В данной задаче достаточно просто проследить зависимости перемещений от неоднородности материала. На рис. 3 показаны эпюры перемещений точек внутреннего контура кольца вдоль угловой координаты. Можно заметить, что перемещения в неоднородном кольце больше, чем в однородном. Этот факт объясняется тем, что при $\delta = -1$ модуль упругости уменьшается от внутреннего контура к внешнему в два раза, приводя к уменьшению жесткости кольца в целом.

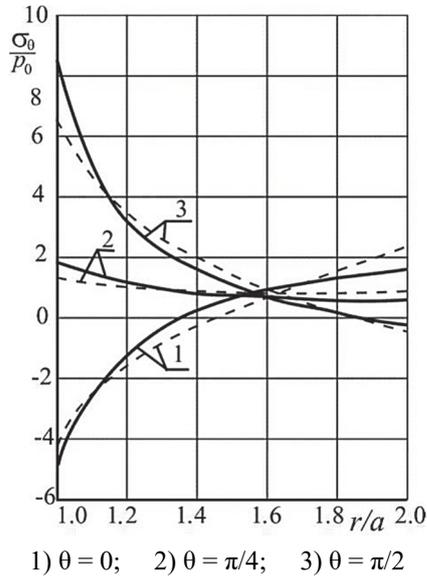


Рис. 2. Напряжения σ_θ в кольце:
 -- неоднородный материал; - - - однородный материал

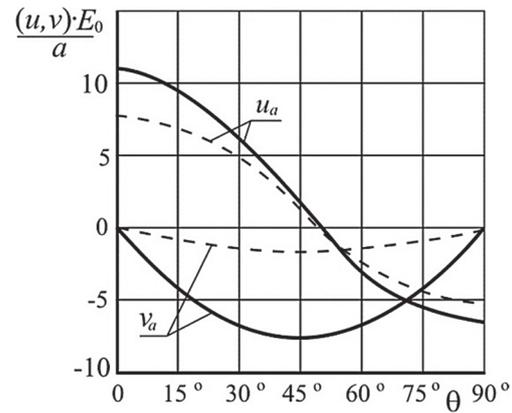


Рис. 3. Перемещения точек внутреннего контура кольца:
 -- неоднородный материал; - - - homogeneous material

Решение численно-аналитическим методом

В этом разделе рассматривается задача, аналитическое решение которой получено в п. 3. На примере данной задачи будет продемонстрировано применение численно-аналитического метода, включая численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений [6; 7]. Одновременно можно определить точность рассматриваемого метода.

Как было показано выше, для того чтобы удовлетворить граничным условиям (4) с учетом (1), достаточно в формулах (3) ограничиться слагаемыми φ_0 , $\varphi_{c2} \cos 2\theta$ and $\psi_{s2} \sin 2\theta$. Выражения для напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$, входящих в граничные условия, будут иметь вид

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \left[\left(\varphi'_0 + \nu \frac{\varphi_0}{r} \right) + \left(\varphi'_{c2} + \nu \frac{\varphi_{c2} + 2\Psi_{s2}}{r} \right) \cos 2\theta \right];$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\Psi'_{s2} - \frac{\Psi_{s2} + 2\varphi_{c2}}{r} \sin 2\theta \right). \tag{15}$$

Для функций φ_0 , φ_{c2} и ψ_{s2} при законе изменения модуля упругости (2) справедливы уравнения (10)–(12).

Сведем уравнение (10) к системе двух уравнений первого порядка, введя обозначения $y_1 = \varphi_0$, $y_2 = \varphi'_0$:

$$y'_1 = y_2; \quad y'_2 = -(1+\delta) \frac{y_2}{r} - (\delta\nu - 1) \frac{y_1}{r^2}. \tag{16}$$

Граничные условия (4) для *осесимметричной* составляющей напряжений примут вид

$$r = a, \quad y_2 + v \frac{y_1}{r} = 0; \quad r = b, \quad y_2 + v \frac{y_1}{r} = -\frac{p_0(1+v)(1-v)}{2E(b)}. \quad (17)$$

Уравнения (11), (12) при введении обозначений $y_1 = \varphi_{c2}$, $y_2 = \varphi'_{c2}$, $y_3 = \psi_{s2}$, $y_4 = \psi'_{s2}$ сводятся к системе четырех уравнений первого порядка. Добавляя к этим уравнениям граничные условия (4) для *неосесимметричной* составляющей, получим краевую задачу для функций φ_{c2} и ψ_{s2} .

Расчет проводился на интервале (a, b) при равномерном разбиении на 100 шагов для тех же исходных данных, что и в п. 3. В таблице приведены сравнительные значения напряжений в неоднородном кольце при $\theta = 45^\circ$, полученные в результате аналитического и численного расчетов.

Напряжения в кольце

r/a	Аналитическое решение		Численное решение	
	σ_r	$\tau_{r\theta}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$
1,0	0	0	0	0
1,2	0,252	-1,266	0,263	-1,296
1,4	0,377	-1,338	0,378	-1,363
1,6	0,444	-1,108	0,444	-1,121
1,8	0,480	-0,807	0,480	-0,813
2,0	2,000	-0,500	2,000	-0,500

Сопоставление результатов, полученных двумя методами, позволяет сделать вывод о достаточно высокой точности численно-аналитического метода.

Если рассмотреть кольцо, отношение внешнего и внутреннего радиусов которого достаточно велико, то на основании рассмотренного метода расчета можно получить решение задачи о растяжении – сжатии пластинки с малым круговым отверстием. В [8] получены решения задач о растяжении неоднородной пластинки с отверстием в одном направлении, о растяжении – сжатии в двух направлениях и о сдвиге пластинки с отверстием. На основании численно-аналитического расчета однородной пластинки и сопоставления результатов с решением задачи Кирша [4] показано, что удовлетворительная точность достигается при отношении размеров пластинки к радиусу отверстия больше 10.

Заключение

Рассмотренная задача является примером использования обобщенного метода расчета плоской двумерной задачи для радиально неоднородного кольца. Возможность получения аналитического решения таких задач во многом зависит от неоднородности материала, то есть в первую очередь от зависимости модуля упругости материала от радиуса. Выбранная в исследовании степенная зависимость модуля упругости от радиуса является самой простой.

Полученное второе решение численным методом показывает хорошую совместимость с аналитическим решением и может использоваться для расчетов двумерных плоских задач с радиальной неоднородностью при любой *непрерывной* зависимости модуля упругости от радиуса.

Список литературы

1. Михлин С.Г. Плоская задача теории упругости // Труды Сейсмологического института АН СССР. 1935. Т. 65. 84 с.
2. Лехницкий С.Г. Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 146–151.
3. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: URSS, 2014. 376 с.
4. Колчин Г.Б. О применимости итерационного метода в задачах теории упругости неоднородных тел // Прикладная математика и программирование. Кишинев: АН МССР, 1969. Вып. 2.
5. Колчин Г.Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев: Штиинца, 1977. 119 с.

6. *Olszak W., Urbanowski W., Rychlewski J.* Sprężysto-plastyczny gruboscienny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1955. Vol. VII. Pp. 315–336.
7. *Olszak W., Rychlewski J.* Nichthomogenitäts-probleme im elastischen und vorplastischen Bereich // *Osterreich. Ingen.* 1961. Vol. 15. Pp. 61–76.
8. *Андреев В.И., Шилиц И.Ю.* Исследование напряжений вокруг отверстий в пространстве с учетом сжимаемости материала // *Сборник трудов МИСИ*. 1974. № 118. С. 59–62.
9. *Андреев В.И., Дубровский А.В.* Учет неоднородности материала при расчете сухой защиты реактора // *Вопросы атомной науки и техники. Проектирование и строительство*. 1982. № 3 (13). С. 3–8.
10. *Андреев В.И.* Об одном методе решения в перемещениях плоской задачи теории упругости для радиально неоднородного тела // *Прикладная механика*. 1987. Т. 23. № 4. С. 16–23.
11. *Андреев В.И.* Метод решения некоторого класса трехмерных задач для упругого радиально неоднородного цилиндра // *Известия вузов. Строительство и архитектура*. 1985. № 8. С. 27–31.
12. *Андреев В.И.* Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. М.: Изд-во: АСВ, 2002. 286 с.
13. *Andreev V.I., Tsybin N.Yu.* Generalization of Michel's solution to plane problem theory of elasticity in polar coordinates in the event of a radially inhomogeneous body // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2014. Vol. 57. Pp. 215–227.
14. *Полякова Л.С., Андреев В.И.* Решение осесимметричной задачи термоупругости радиально неоднородной цилиндрической оболочки численно-аналитическим методом и методом конечных элементов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. № 4. С. 323–326. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-323-326>
15. *Andreev V., Maksimov M.* Elastic – plastic equilibrium of a hollow ball made of inhomogeneous ideal-plastic material // *Proceedings of FORM 2021. Lecture Notes in Civil Engineering / ed. by P. Akimov, N. Vatin. Cham: Springer, 2021. Vol. 170. Pp. 177–188. https://doi.org/10.1007/978-3-030-79983-0_16*
16. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
17. *Кукуджанов В.Н.* Численные методы в механике сплошных сред. М.: МАТИ, 2006. 156 с.