DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533
УДК 624.012

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Численно-аналитический метод в механике железобетона

Вл.И. Колчунов

Юго-Западный государственный университет, Курск, Российская Федерация
Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук,
Москва, Российская Федерация
✉ vlik52@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 2 октября 2022 г.
Доработана: 28 ноября 2022 г.
Принята к публикации: 30 ноября 2022 г.

Для цитирования

Колчунов Вл.И. Численно-аналитический метод в механике железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 525–533. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>

Аннотация. Предложен вариант численно-аналитического метода в нелинейной механике железобетона. Расчетные модели позволяют учитывать ряд важных факторов, таких как дискретные трещины, эффект несплошности бетона и реакций арматуры в трещине. При решении обратной задачи определения ширины раскрытия трещин деформационное воздействие не задается, а моделируется с помощью «расшивки» назначаемой минимально возможной ширины, ее раскрытия при соответствующем нагружении. В расчетной схеме выделяются пары конечных элементов, прилегающих к такой трещине с противоположных специальных сторон, называемые двухэлементной консольной моделью. Пары рассматриваются в двух состояниях: до «расшивки» трещин и после их «расшивки» с учетом деформационного воздействия и эффекта нарушения сплошности бетона. Алгоритм расчета строится на основе комбинаций аналитической модели расчета жесткости сложно напряженных конструкций и интеллекта программного комплекса «ЛИРА-САПР».

Ключевые слова: эффект несплошности, железобетон, ширина раскрытия, моделирование, дискретные трещины, поверхность, двухэлементная консоль

Numerical-analytical method in reinforced concrete mechanics

Vladimir I. Kolchunov

Southwestern State University, Kursk, Russian Federation
Research Institute of Building Physics of the RAACS, Moscow, Russian Federation
✉ vlik52@mail.ru

Article history

Received: October 2, 2022
Revised: November 28, 2022
Accepted: November 30, 2022

Abstract. A variant of the numerical-analytical method in the nonlinear mechanics of reinforced concrete is proposed. Calculation models make it possible to take into account a number of important factors, such as discrete cracks, the effect of concrete discontinuity, and reinforcement reactions in a crack. When solving

Колчунов Владимир Иванович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Российская Федерация, 127238, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0001-5075-1134, eLIBRARY SPIN-код: 3990-0345; vlik52@mail.ru
Vladimir I. Kolchunov, corresponding member of the RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Unique Buildings and Structures, Southwest State University, 94 50 let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 21 Lokomotivnyi Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5075-1134, eLIBRARY SPIN-code: 3990-0345; vlik52@mail.ru

© Колчунов Вл.И., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

For citation

Kolchunov V.I. Numerical-analytical method in reinforced concrete mechanics. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):525–533. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>

the inverse problem of determining the width of the crack opening, the deformation effect is not set, but is modeled using the “joining” of the assigned minimum possible width, its opening under the appropriate loading. In the calculation scheme, pairs of finite elements are distinguished, adjacent to such a crack from opposite special sides, called a two-element cantilever model. Pairs are considered in two states: before their jointing of cracks and after their jointing, taking into account the deformation effect and the effect of concrete discontinuity. The calculation algorithm is based on combinations of an analytical model for calculating the stiffness of complexly stressed structures and the intelligence of the “LIRA-SAPR” software package.

Keywords: discontinuity effect, reinforced concrete, opening width, modeling, discrete cracks, surface, two-element console

Введение

В связи с все более широким внедрением компьютерных технологий в практику проектирования железобетонных конструкций для повышения их безопасности, учет физических процессов и особенностей их силового сопротивления становится все более актуальной проблемой. В практике современного компьютерного моделирования уже имеются ряд вычислительных комплексов, в которых используют конечно-элементные модели железобетона, но еще недостаточно привлекают современные физические модели, в частности расчетные модели сопротивления плосконапряженного и сложно напряженного железобетона¹ [1–17].

В связи с этим в рассматриваемой работе предложен численно-аналитический вариант метода механики железобетона, в котором соединены метод расчетных моделей сопротивления железобетона [1] и метод конечных элементов в интеллекте вычислительного комплекса «ЛИРА-САПР» для решения задач жесткости и эффекта железобетона в виде несплошности бетона и реакции с учетом арматуры в трещине. Раскрыта физическая суть эффекта железобетона, состоящего в дополнительном деформационном воздействии нарушения сплошности бетона и реакции арматуры в трещине. Механизм «стягивания» трещины построен на энергетической основе и заложен в зоне предразрушения, с локализованной здесь деформацией и с образованием новых удельных поверхностей трещины. Определение скорости высвобождения энергии выполнено на основе функционала механики разрушения с использованием множителей Лагранжа и предложенного универсального двухконсольного элемента (ДКЭ). При этом в растянутой области бетона для определения расстояния между трещинами и ширины раскрытия в местных зонах, прилегающих к трещине, учитывается сцепление бетона с арматурой.

Метод в механике железобетона

Предлагаемая аналитическая модель наряду с моделированием процесса совместного деформирования арматуры с бетоном может рассматриваться для определения текущей жесткости арматурных реакций – связей, пересекающих дискретную трещину. Продольная податливость λ_{sm} (жесткость) связи C_{sm} определяется отношением осевым перемещением U_{sm} и реакцией связи N_{sm} :

$$\lambda_{sm} = \frac{1}{C_{sm}} = \frac{U_{sm}}{N_{sm}}. \quad (1)$$

Эта реакция зависит от краевых условий, которыми в процессе исследования можно варьировать.

В расчетной модели рассматривается характерный железобетонный элемент – представительный объем бетона, с одиночным арматурным стержнем. Случай центрального армирования одним стержнем при выдергивании его из бетонной матрицы наиболее полно раскрывает закономерность деформирования при выдергивании арматурного стержня из бетонной матрицы. Деформирование такого характерного элемента (рис. 1) является одной из характерных задач строительной механики железобетона при наличии дискретных трещин [3]. Именно к такому случаю точно или приближенно сводятся все виды армирования железобетонных конструкций системой арматурных стержней² [1–4; 18–21 и др.].

¹ Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона: учебное пособие. К.: Книжное издательство НАУ, 2005. 653 с.

² Там же.

В расчетной модели характерного элемента левый торец жестко закреплен от любых перемещений, правый торец – свободный. К арматурному стержню прикладывается растягивающее усилие N_s , вызывающее перемещения стержня и торца элемента U_s и U_b , соответственно по всей длине железобетонного стержня (рис. 1).

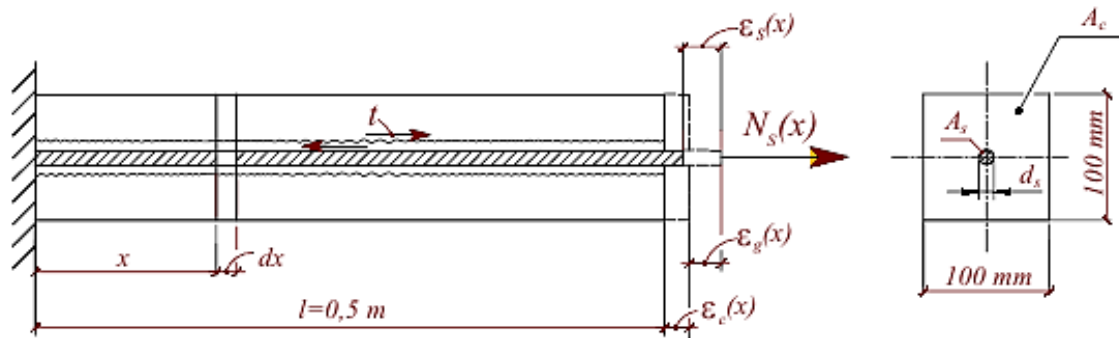


Рис. 1. Расчетная схема элемента характерного железобетонного элемента
 Figure 1. Calculation scheme of an element of a characteristic reinforced concrete element

Силы сцепления, действующие по контакту арматуры с бетоном характеризуются погонными касательными усилиями $\tau_{\text{bond}}(x)$, в бетоне – по направлению действующей нагрузки, а в арматуре, – противоположно направленные.

Закон сцепления между бетоном и арматурой в исследуемой модели – упругопластический. Он описывается с привлечением билинейной диаграммы $\tau_{\text{bond}} - \epsilon_q(x)$, учитывающей экспериментальные данные А.Б. Голышева, В.М. Кольнера, М.М. Холмянского, Е.М. Бабича и др.³ [1–4; 18–21].

$$\tau_{\text{bond}} = k\epsilon_q(x) = 0,4E_{\text{cm}} [\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] \quad (2)$$

при $\epsilon_q(x) = [\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] \leq \epsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}$;

$$\tau_{\text{bond}} = 0,0232E_{\text{cm}} [\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] + 1,866f_{\text{ctm}}, \quad (3)$$

при $\epsilon_q(x) = [\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] > \epsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}$,

где $\epsilon_q(x)$ – относительное взаимное смещение бетона и арматуры в сечении x ; накопление которых на участке между трещинами и составляет ширину раскрытия трещин a_{cre} ; ϵ_q^*x – граничное относительное взаимное смещение бетона и арматуры, соответствующее конечной точке первого участка диаграммы сцепления (рис. 2).

Работа бетона в данной модели также описывается с помощью билинейной диаграммы $\sigma_c - \epsilon_c$, представлена на рис. 2. Для бетона используем следующую зависимость, моделирующую упругопластическую работу материала:

$$\epsilon_c(x) = \begin{cases} \frac{N_c(x)}{E_{\text{cm}}A_c}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} \leq 0,9f_{\text{ctm}}, \\ \frac{18N_c(x)}{E_{\text{cm}}A_c} - 15,3 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} > f_{\text{ctm}}. \end{cases} \quad (4)$$

³ Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона...

В рассматриваемой модели реализованы следующие варианты диаграмм деформирования арматуры, бетона и сцепления арматуры с бетоном путем изменения выражений системы уравнений:

- вариант модели с нелинейным бетоном, нелинейной зависимостью сцепления и линейной работой арматуры (рис. 2 и 3);
- вариант модели с нелинейными бетоном, арматурой и зависимостью сцепления;
- вариант модели с трехлинейными бетоном, зависимостью сцепления и билинейной диаграммой деформирования арматуры.

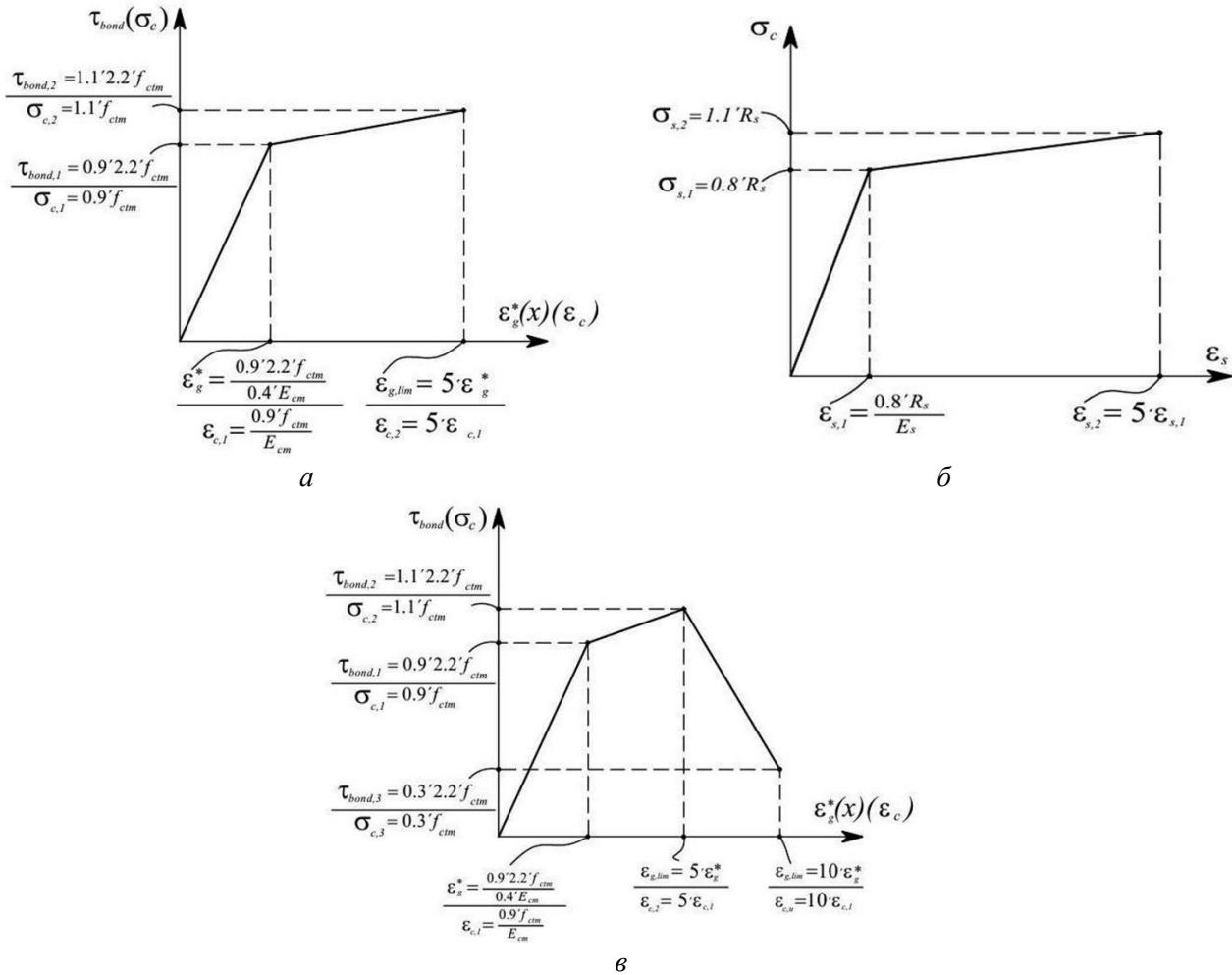


Рис. 2. Диаграммы деформирования, реализованные в аналитической модели:

a – билинейная зависимость сцепления и диаграмма деформирования бетона, линейная диаграмма деформирования арматурной стали;

б – билинейная зависимость сцепления и диаграммы деформирования бетона и арматурной стали;

в – трехлинейная зависимость сцепления, диаграмма деформирования бетона и билинейная работа арматуры

Figure 2. Deformation diagrams implemented in the analytical model:

a – bilinear bond dependence and concrete deformation diagram, linear diagram of reinforcing steel deformation;

б – bilinear dependence of adhesion and deformation diagrams of concrete and reinforcing steel;

в – three-line dependence of adhesion, concrete deformation diagram and bilinear work of reinforcement

Используя условия равновесия двухкомпонентного железобетонного элемента, получаем следующие два дифференциальных уравнения, связывающие усилия (рис. 3):

– для арматуры:

$$-N_s + N_s + dN_s - tdx = 0; \quad (5)$$

– для усилий сцепления в бетоне:

$$-N_c + N_c + dN_c + tdx = 0. \quad (6)$$

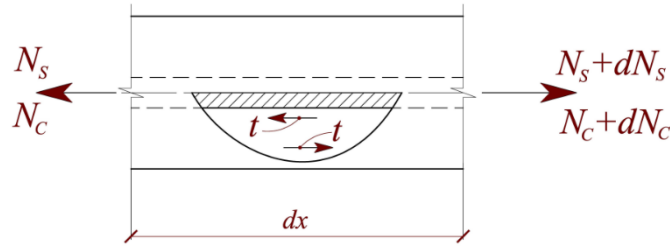


Рис. 3. Схема усилий арматуры в бетоне
Figure 3. Scheme of reinforcement forces in concrete

Продифференцировав (5) и (6) по координате x , получим

$$\frac{dN_s}{dx} = \tau_{\text{bond}} \pi d_s. \quad (7)$$

$$\frac{dN_c}{dx} = -\tau_{\text{bond}} \pi d_s. \quad (8)$$

Приняв для арматуры справедливым закон Гука можно заметить

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s; \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{N_s(x)}{E_s A_s}. \quad (9)$$

Отсюда получим

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{E_s A_s} N_s(x). \quad (10)$$

Таким образом, решена нелинейная краевая задача, определяемая четырьмя уравнениями, два из которых – дифференциальные первого порядка.

Граничные условия задачи записываются в следующем виде:

$$N_c(x=1) = 0; \quad N_s(x=1) = C. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s(x) = \frac{1}{E_s A_s} N_s(x); \\ \varepsilon_c(x) = \begin{cases} \frac{N_c(x)}{E_{\text{cm}} A_c}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} \leq 0,9 f_{\text{ctm}}, \\ \frac{18 N_c(x)}{E_{\text{cm}} A_c} - 15,3 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} > f_{\text{ctm}}; \end{cases} \\ \frac{dN_s(x)}{dx} = \begin{cases} \pi d_s 0,4 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)], & \text{если } \varepsilon_q(x) \leq \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, \\ \pi d_s \{0,0232 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)] + 1,866 f_{\text{ctm}}\}, & \text{если } \varepsilon_q(x) > \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}; \end{cases} \\ \frac{dN_c(x)}{dx} = \begin{cases} -\pi d_s 0,4 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)], & \text{если } \varepsilon_q(x) \leq \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, \\ -\{0,0232 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)] + 1,866 f_{\text{ctm}}\}, & \text{если } \varepsilon_q(x) > \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}. \end{cases} \end{array} \right. \quad (12)$$

Граничные условия задачи записываются в следующем виде:

$$N_c(x=1) = 0; \quad N_s(x=1) = C. \quad (13)$$

Специальная двухэлементная консольная модель (ДКМ) привлекается для двух типов конечных элементов, в первом случае плоские, в соответствии рис. 4, а, б, во втором случае пространственный (рис. 4, в–д).

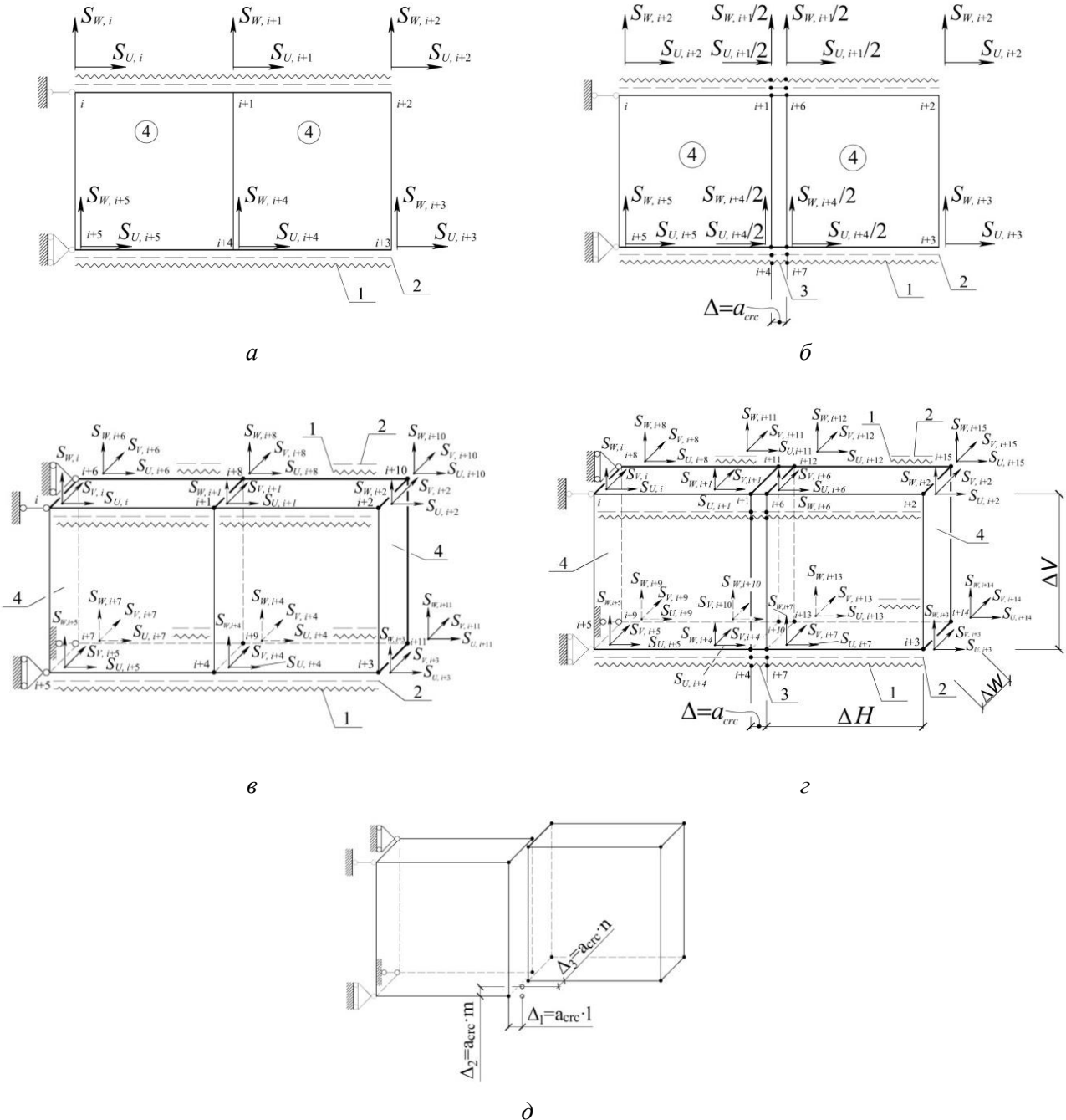


Рис. 4. Двухэлементная плоская и пространственная модель:

а – плоская без «расшивки»; б – плоская после «расшивки»; в – пространственная до «расшивки»; з – пространственная после «расшивки»; д – деформационные воздействия $\Delta_1 = a_{circ}l$, $\Delta_2 = a_{circ}m$, $\Delta_3 = a_{circ}n$; 1 – 255 КЭ до «расшивки»; 2 – 201 КЭ; 3 – 255 КЭ после «расшивки»; 4 – 233 КЭ

Figure 4. Two-element planar and spatial model:

а – flat without “embroidery”; б – flat after “stitching”; в – spatial up to “embroidery”; з – spatial after “embroidery”; д – deformation effects $\Delta_1 = a_{circ}l$, $\Delta_2 = a_{circ}m$, $\Delta_3 = a_{circ}n$; 1 – 255 FE before “joining”; 2 – 201 FE; 3 – 255 FE after “spreading”; 4 – 233 FE

Результаты и обсуждение

По первому варианту жесткость определяется с использованием приема моделирования явных трещин-щелей, с учетом эффекта нарушения сплошности и несовместности деформаций бетона (конечные элементы 232,201). На участках, где возможное закрытие трещин моделируется 255 КЭ. При этом распределенное армирование в элементах заменяется двумя – для плоской модели и четырьмя – для пространственной модели стержневыми конечными элементами в каждом взаимно перпендикулярном направлении соответственно.

Перемещение узлов определяются из расчета двухэлементной расчетной модели с заданными в узлах нагрузками. При этом опорные закрепления двух узлов в плоской модели и четырех узлов – в пространственной модели выполняется чередующимися шарнирно неподвижными и шарнирно подвижными опорами. В целях усреднения результатов расчета чередование необходимо задавать в такой последовательности: слева – справа, спереди – сзади, снизу – сверху. Важным является и то, что наряду с узловыми нагрузками в двухэлементной модели задаются еще и деформационные воздействия, связанные с раскрытием трещины, которая, в свою очередь, как показано в [1; 19; 22], связана с эффектом нарушения сплошности. Задание деформационного воздействия выполняется в каждом узле (кроме опорных) по трем направлениям в соответствии с рисунком 4, δ , где l , m и n – направляющие косинусы главного вектора раскрытия трещины в той или иной ее точке по отношению к осям x , y и z соответственно.

Во втором варианте при решении обратной задачи деформационные воздействия не задаются, а моделируются «расшивается» щель между конечными элементами с ее минимальной возможной шириной, с помощью которой производится последовательный итерационный анализ.

Для решения обратной задачи, связанной не задаются деформационные воздействия, а моделируется щель между конечные элементы «расшиваются» с ее минимально возможной шириной. При этом с помощью которой выполняется последовательный итерационный анализ напряженно-деформированного состояния.

Перемещения берегов трещины по трем взаимно перпендикулярным направлениям в результате использования ДКМ определяется соответствующими составляющими ширины раскрытия дискретной трещины между парой КЭ из интеллекта вычислительного комплекса «ЛИРА-САПР».

Другой вариант расчета предполагает выполнение расчетных процедур без изменения заданного порядка и номеров КЭ. В этом варианте, в конечных элементах, прилегающих к неясным трещинам, уменьшается их толщина. Работа каждой пары КЭ рассчитывается дважды с использованием двухэлементной консольной модели: до «расшивки» КЭ и после «расшивки» КЭ, с приложенными узловыми усилиями и деформационными воздействиями от раскрытия трещины и с учетом эффекта нарушения сплошности.

Усредненные усилия в узлах в различных направлениях для ДКМ определяются из физически нелинейного расчета всей конструкции. Для этого используются узловые усилия в соответствующих конечных элементах бетона и арматуры. В местах переходов горизонтальных участков моделируемых трещин к вертикальным и боковым, работа для угловых конечных элементов определяются путем их усреднения. В результате новая толщина конечных элементов, прилегающих к трещине, определяется по формуле

$$b = \frac{W_1}{W_2} b_1, \quad (14)$$

где W_1 и W_2 – работы двухэлементной модели «до расшивки» и «после и «после расшивки» соответственно.

Предлагаемый алгоритм предусматривает наличие итерационного процесса, регулируемого достигнутой точностью толщины отмеченных конечных элементов, которые прилегают к мнимым трещинам.

Здесь уместно заметить, что жесткость стержневых железобетонных конструкций на участках с наклонными трещинами, в том числе пересекающимися, заменяется эквивалентной жесткостью, вычисляемой по формуле:

$$B(\lambda) = \frac{M^2 \Delta x}{2W_3}, \quad (15)$$

где W_3 – работа сил выделенного участка.

Итерационный процесс заканчивается после достижения заданной погрешности при определении $B_1(\lambda)$.

На участках с нормальными трещинами жесткость стержневых железобетонных конструкций определяется с использованием значений изгибающего момента M и радиуса кривизны ρ по нормативной методике:

$$B_i(\lambda) = M_i \rho_i. \quad (16)$$

Алгоритм расчета, в соответствии с предложенным вариантом численно-аналитического метода расчета жесткости плосконапряженных и пространственных сложно напряженных железобетонных конструкций с привлечением программного комплекса «ЛИРА-САПР», который включает следующие модули:

Модуль 1. Деформационные эффекты – учитывают деформационное воздействие реакции арматуры и бетона.

Модуль 2. «Двухконсольный элемент (ДКЭ)», связанный с нарушением сплошности бетона.

Модуль 3. «Билинейная поверхность», определяется уравнением пучка билинейной поверхности, которая конкретизируется применительно к заданному поперечному сечению.

Модуль 4. «Экстремальные значения функции, многих переменных для железобетона», определяет максимальную ширину раскрытия трещин проекции и расстояния между смежными трещинами в многоуровневом процессе.

Модуль 5. «Податливость», определяет параметры сцепления арматуры с бетоном.

Модуль 6. «Расшивка конечных элементов», при трещинообразовании.

Модуль 7. «ДКМ консоль» – используется для нелинейного расчета всей железобетонной конструкции на заданные силовые и деформационные воздействия. В этом инструменте выделяются *пары конечных элементов*, прилегающих к такой трещине, и привлекается специальная расчетная *двухэлементная консольная модель (ДКМ) сопротивления железобетона*.

Заключение

На основе варианта анализа и обобщения экспериментально-теоретических исследований с предложением численно-аналитического метода в механике железобетона и на его основе разработаны методика и алгоритм, позволяющие моделировать дискретные трещины и жесткость железобетонных конструкций.

В интеллекте «ЛИРА-САПР» выполнено моделирование раскрытия трещин и с учетом эффекта железобетона в виде нарушения сплошности бетона, реакции арматуры в трещине. При этом в качестве инструментов использованы двухконсольный элемент (ДКЭ) для пространственной трещины, аналитическая модель сцепления арматуры с бетоном, «расшивка» трещин, специальная расчетная двухэлементная консольная модель (ДКМ); «закрытие трещины» после «расшивки».

Предложена методика определения раскрытия трещин, жесткости элементов с трещинами, расстояния между трещинами. Решение выполнено прямым и обратным способом построения формул для ширины раскрытия и закрытия трещин.

Список литературы / References

1. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Calculation models of force resistance of reinforced concrete. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)

Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: Изд-во АСВ, 2004. 471 с.

2. Bashirov Kh.Z., Kolchunov V.I., Fedorov V.S., Yakovenko I.A. *Reinforced concrete composite structures of buildings and structures*. Moscow: ASV Publ.; 2017. (In Russ.)

Баширов Х.З., Колчунов В.И., Федоров В.С., Яковенко И.А. Железобетонные составные конструкции зданий и сооружений. М.: Изд-во АСВ, 2017. 248 с.

3. Veryuzhsky Yu.V., Golyshev A.B., Kolchunov V.I., Klyueva N.V., Lisitsin B.M., Mashkov I.L., Yakovenko I.A. *Reference manual on structural mechanics* (vol. 2). Moscow: ASV Publ.; 2014. (In Russ.)

Верюжский Ю.В., Гольшев А.Б., Колчунов В.И., Ключева Н.В., Лисицин Б.М., Машков И.Л., Яковенко И.А. Справочное пособие по строительной механике: в 2 т. Т. 2. М.: Изд-во АСВ, 2014. 432 с.

4. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Konorev A.V. Results of experimental studies of structures of square and box sections made of high-strength concrete when twisting with bending. *Construction and Reconstruction*. 2018;(6):32–43. (In Russ.)

Травуш В.И., Карпенко Н.И., Колчунов В.И., Каприелов С.С., Демьянов А.И., Коноров А.В. Результаты экспериментальных исследований конструкций квадратного и коробчатого сечений из высокопрочного бетона при кручении с изгибом // *Строительство и реконструкция*. 2018. № 6 (80). С. 32–43.

5. Fedorov V.S., Kolchunov V.I., Pokusaev A.A., Naumov N.V. Calculation models of deformation of reinforced concrete constructions with spatial cracks. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2020;(3):6–26. <http://doi.org/10.36622/VSTU.2020.47.3.001>

6. Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Travush V.I. Calculation model of a complex stress reinforced concrete element of a boxed section during torsion with bending. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2021;(3):7–26. <http://doi.org/10.36622/VSTU.2021.51.3.001>

7. Kim C., Kim S., Kim K.-H., Shin D., Haroon M., Lee J.-Y. Torsional Behavior of Reinforced Concrete Beams with High-Strength Steel Bars. *ACI Structural Journal*. 2019;116:251–233. <https://doi.org/10.14359/51718014>

8. Bernardo L. Modeling the full behavior of reinforced concrete flanged beams under torsion. *Applied Sciences*. 2019;9:2730. <https://doi.org/10.3390/app9132730>

9. Lin W. Experimental investigation on composite beams under combined negative bending and torsional moments. *Advances in Structural Engineering*. 2021;24(6):1456–1465. <http://doi.org/10.1177/1369433220981660>

10. Kolchunov V., Demyanov A., Naumov N. Analysis of the “nagel effect” in reinforced concrete structures under torsion with bending. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;953:012052. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/953/1/012052>

11. Kolchunov V., Smirnov B., Naumov N. Physical essence of the “nagel effect” for main reinforcement in an inclined crack of reinforced concrete structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;896:012055. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012055>

12. Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Naumov N.V., Mikhaylov M.M. Calculation of the stiffness of reinforced concrete structures under the action of torsion and bending. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1425:012077. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012077>

13. Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Naumov N.V. The second stage of the stress-strain state of reinforced concrete constructions under the action of torsion with bending (theory). *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: International Science and Technology Conference “FarEastCon 2019”, Vladivostok, Russky Island*. Vladivostok, Russky Island: Institute of Physics Publishing; 2020. p. 1–9.

14. Kolchunov V.I., Demyanov A.I. The modeling method of discrete cracks and rigidity in reinforced concrete. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;(4):60–69. <http://doi.org/10.18720/MCE.88.6>

15. Demyanov A.I., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017;15(3):381–386. <http://doi.org/10.5937/jaes15-14663>

16. Kolchunov V.I., Demyanov A.I. The modeling method of discrete cracks in reinforced concrete under the torsion with bending. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;(5):160–173. <http://doi.org/10.18720/MCE.81.16>

17. Kolchunov V.I., Kolchunov V.I., Fedorova N.V. Deformation models of reinforced concrete under special impacts. *Promyshlennoe i Grazhdanskoe Stroitelstvo*. 2018;8:54–60.

18. Karpenko N.I. *General models of reinforced concrete mechanics*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1996. (In Russ.)

Карпенко Н.И. *Общие модели механики железобетона*. М.: Стройиздат, 1996. 410 с.

19. Golyshv A.B., Kolchunov V.I. *Resistance of reinforced concrete*. Kyiv: Osnova Publ.; 2009. (In Russ.)

Гольшев А.Б., Колчунов В.И. *Сопротивление железобетона*. Киев: Основа, 2009. 432 с.

20. Golyshv A.B., Kolchunov V.I., Yakovenko I.A. *Resistance of reinforced concrete structures, buildings and structures erected in difficult engineering and geological conditions*. Kyiv: Talcom Publ.; 2015. (In Russ.)

Гольшев А.Б., Колчунов В.И., Яковенко И.А. *Сопротивление железобетонных конструкций, зданий и сооружений, возводимых в сложных инженерно-геологических условиях*: монография. Киев: Талком, 2015. 371 с.

21. Kolchunov V.I., Mikhailov M.M., Demyanov A.I. Static-dynamic deformation of compressed concrete in an indeterminate reinforced concrete frame during bending with torsion. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2020;(4):5–21. (In Russ.)

Колчунов В.И., Михайлов М.М., Демьянов А.И. Статико-динамическое деформирование сжатого бетона в неопределимой железобетонной раме при изгибе с кручением // *Известия вузов. Строительство*. 2020. № 4. С. 5–21.

22. Kolchunov V.I., Yakovenko I.A., Tugay T.V. Method for calculating the stiffness of plane-stressed reinforced concrete structures using the Lira-Pro software package. *Collection of Scientific Papers (Series of Industrial Engineering, Construction)*. 2014;3(2):55–66. (In Russ.)

Колчунов В.И., Яковенко И.А., Тугай Т.В. Методика расчета жесткости плосконапряженных железобетонных конструкций с привлечением программного комплекса «Лира-Про» // *Сборник научных трудов (Серия: Отраслевое машиностроение, строительство)*. Полтава: ПолтНТУ, 2014. Вып. 3 (42). Т. 2. С. 55–66.