

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-5-467-474
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Параметризация поверхности сложной геометрии

С.Н. Якупов¹ , Г.Х. Низамова² 

¹Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр РАН», Казань, Российская Федерация

²Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ tamas_86@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 19 апреля 2022 г.
Доработана: 10 сентября 2022 г.
Принята к публикации: 13 сентября 2022 г.

Для цитирования

Якупов С.Н., Низамова Г.Х. Параметризация поверхности сложной геометрии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 5. С. 467–474. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-467-474>

Аннотация. Среди тонкостенных конструкций, в том числе строительных конструкций и сооружений, эффективными по своим жесткостным и прочностным характеристикам являются оболочки сложной геометрии, которые выделяются архитектурной гармоничностью. Для более широкого применения оболочек сложной геометрии необходимо достоверно оценивать их напряженно-деформированное состояние. При этом составной частью расчета является этап параметризации срединной поверхности оболочек сложной геометрии. Различают оболочки сложной геометрии канонической и неканонической формы. Для оболочек неканонической формы срединная поверхность не может быть задана аналитическими формулами. При этом возникают трудности на этапе задания (параметризации) формы срединной поверхности. Задача усложняется, когда у фрагмента оболочки сложный контур и одна или несколько точек поверхности имеют фиксированные координаты. Для строительных конструкций это, например, наличие дополнительных внутренних опор. Представлена информация о сплайновом варианте МКЭ. Отмечены некоторые известные способы параметризации. Рассмотрен подход параметризации минимальной поверхности сложной формы, ограниченной четырьмя криволинейными контурами и заданной (фиксированной) координатой одной внутренней точки поверхности. Описан алгоритм построения пространственной сети, а также определения координат, компонент метрического тензора и символов Кристоффеля, необходимых при решении задач параметризации в сплайновом варианте метода конечных элементов.

Ключевые слова: сложная геометрия, фиксированная точка поверхности, параметризация, алгоритм построения сети, пространственные координаты, компоненты метрического тензора, символы Кристоффеля

Якупов Самат Нухович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр РАН», Российская Федерация, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31; ORCID: 0000-0003-0047-3679, Scopus Author ID: 26968046600, eLIBRARY SPIN-код: 7382-4759; tamas_86@mail.ru

Низамова Гузаль Хавасовна, кандидат технических наук, доцент кафедры машиностроительных технологий, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-7193-9125, eLIBRARY SPIN-код: 3895-0028; guzelnizamova2009@yandex.ru

© Якупов С.Н., Низамова Г.Х., 2022




This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Surface parameterization complex geometry

Samat N. Yakupov¹  , Guzial Kh. Nizamova² 

¹Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russian Federation

²Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

 tamas_86@mail.ru

Article history

Received: April 19, 2022

Revised: September 10, 2022

Accepted: September 13, 2022

Abstract. Among thin-walled structures, including building structures and constructions, shells of complex geometry are effective in their rigidity and strength characteristics, which are also distinguished by architectural harmony. For a wider application of shells of complex geometry, it is necessary to reliably assess their stress-strain state. In this case, an integral part of the calculation is the parametrization stage of the median surface of shells of complex geometry. There are shells of complex geometry of canonical and non-canonical forms. For shells of non-canonical shape, the median surface cannot be defined by analytical formulas. At the same time, difficulties arise at the stage of specifying (parameterizing) the shape of the median surface. The task becomes more complicated when the shell fragment has a complex contour and one or more surface points have fixed coordinates. For building structures, this is, for example, the presence of additional internal supports. Information about the spline version of the FEM is presented. Some well-known parametrization methods are noted. The approach of parametrization of a minimal surface of a complex shape bounded by four curved contours and a given (fixed) coordinate of one inner point of the surface is considered. An algorithm for constructing a spatial network, as well as determining coordinates, metric tensor components and Christoffel symbols necessary for solving parametrization problems in the spline version of the finite element method is described.

Keywords: complex geometry, fixed surface point, parametrization, network construction algorithm, spatial coordinates, metric tensor components, Christoffel symbols

For citation

Yakupov S.N., Nizamova G.Kh. Surface parameterization complex geometry. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(5):467–474. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-467-474>

Введение

Оболочки, сочетающие легкость с высокой прочностью, находят широкое применение. Среди них особенно эффективными по своим характеристикам являются оболочки сложной геометрии [1; 2]. Наряду с малым весом они имеют высокие механические характеристики по жесткости и прочности. Варьируя форму поверхности, можно создавать легкие, высокопрочные и архитектурно выразительные конструкции.

Для более эффективного использования оболочек сложной геометрии необходимо научиться определять их физико-механические качества, оценивать напряженно-деформированное состояние и устойчивость под действием различных нагрузок. Среди трудностей, связанных с более широким распространением оболочек сложной геометрии, следует отметить сложность технологии их изготовления. В связи с бурным развитием 3D-печати здесь открываются большие возможности в решении этой проблемы.

Для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек сложной геометрии и структуры используют различные методы и модели, в частности модификации метода конечных элементов, методы коллокации, метод граничных элементов, экспериментальные методы, вариационные методы, теоретико-экспериментальные методы, метод конечных элементов [3–25]. Интенсивно разрабатываются варианты метода конечных элементов, в частности, сплайновый вариант метода конечных элемен-

Samat N. Yakupov, PhD in Technical Sciences, senior researcher, Institute of Mechanics and Engineering, Federal Research Center “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevsky St, Kazan, 420111, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0047-3679, Scopus Author ID: 26968046600, eLIBRARY SPIN-code: 7382-4759; tamas_86@mail.ru

Guzial Kh. Nizamova, PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanical Engineering Technologies, Academy of Engineering, Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7193-9125, eLIBRARY SPIN-code: 3895-0028; guzelnizamova2009@yandex.ru

тов, базирующийся на синтезе идеи параметризации поверхности сложной геометрии и метода конечных элементов [18–23].

Различают оболочки сложной канонической геометрии, когда срединная поверхность описывается аналитическими формулами, и оболочки сложной неканонической геометрии, когда срединная поверхность не описывается аналитическими формулами, а задается точно. При рассмотрении оболочек сложной неканонической геометрии, возникают трудности на этапе задания параметров поверхности – трудности этапа параметризации.

Сплайновый вариант метода конечных элементов

Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций сложной геометрии представляет собой синтез идеи параметризации и метода конечных элементов [18–23]. Область, занимаемая срединной поверхностью оболочки параметризуется координатами единичного квадрата таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области единичного квадрата соответствовала криволинейная сетка. При этом должны удовлетворяться следующие условия: 1) радиус-вектор должен описывать контурные линии рассматриваемой области при движении вдоль контурных линий единичного квадрата; 2) пропорциональному шагу на единичном квадрате должны соответствовать пропорциональные длины дуг на криволинейной координатной линии, рассматриваемой области. Если рассматриваемая область не задана аналитически, то задача построения сетки сводится к решению нелинейной задачи методом последовательных приближений.

Каждый участок поверхности представляется двумерными кубическими интерполяционными сплайнами. Параметры сплайна определяются из условия непрерывности сплайна и его первых двух производных во всех внутренних узлах сетки и краевых условий для сплайна.

Проведя параметризацию рассматриваемой области и выразив все векторные и тензорные величины в построенном базисе, задача определения напряженно-деформированного состояния сводится к классическому виду – вместо заданной сложной области, рассматривается каноническая область в виде единичного квадрата. Единичный квадрат разбивается на прямоугольные области, решение в каждом из которых представляется в виде Эрмитового бикубического сплайна двух переменных. Для вывода решающих уравнений используется вариационный принцип Лагранжа.

В традиционном МКЭ при рассмотрении оболочек сложной геометрии трудно обеспечить непрерывность конечных элементов. Также возникает проблема обеспечения непрерывности искомых функций, не говоря уже о первых производных этих функций между элементами. В сплайновом варианте применение параметризации и представление решения в каждом из прямоугольников в виде кубического сплайна обеспечивают непрерывность функции перемещений и их первых производных во всей рассматриваемой области, что является одним из условий сходимости к точному решению при уменьшении размеров прямоугольников. Таким образом, удалось получить совместные элементы на базе гипотез Кирхгоффа – Лява для оболочек сложной формы. На базе разработанного метода были решены ряд важных прикладных задач.

Известные способы параметризации

Известны способы измерения горизонтальных неровностей¹ и определения кривизны и уклонов профиля поверхности², которые не позволяют формировать линии и поверхности сложной геометрии и определять неровности двумерных объектов. Известен экспериментальный способ параметризации минимальных поверхностей, основанный на решении двухмерного уравнения Лапласа³, который не позволяет получать непрерывные и гладкие контуры произвольной конфигурации, свободно ориентированные в пространстве. Известны также способ параметризации минимальных поверхностей со сложным контуром⁴ и способ параметризации трехмерных тел сложной геометрии⁵ [24], в которых не предусмотрена возможность задания координаты конкретной внутренней точки поверхности.

¹ Патент РФ № 2276216. Способ измерений горизонтальных неровностей (рихтовки) и кривизны в плане рельсовых нитей. Приоритет. 2004.

² Патент РФ № 2114391. Способы определения кривизны и уклонов профиля поверхности дорожного покрытия в двух различных направлениях. Приоритет. 1996.

³ Патент РФ № 2121166. Устройство для решения двухмерного уравнения Лапласа. 1998.

⁴ Патент РФ № 2374697. Экспериментальный способ параметризации минимальных поверхностей со сложным контуром. 2009.

⁵ Патент РФ № 2665499. Экспериментальный способ параметризации трехмерных тел сложной геометрии. 2017.

Вариант параметризации поверхности сложной неканонической формы

Рассмотрен вариант параметризации поверхности сложной неканонической формы, ограниченной четырьмя криволинейными контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ_4 и заданной координатой конкретной внутренней точки A поверхности (рис. 1).

Параметризация минимальной поверхности сложной формы, ограниченной четырьмя криволинейными контурами и заданной координатой внутренней точки поверхности. В начале изготавливаем пространственный каркас из криволинейных формообразующих ребер $a-b, b-c, c-d$ и $d-a$, совпадающих с контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ_4 (рис. 1). На этих ребрах делаем метки в соответствии с заданным типом разбивки. Изготавливаем двумерную сеть в виде единичного квадрата из эластичных (например, резиновых) нитей 1, которые соединены в узлах 2 (рис. 2). На каркас натягиваем пространственную двумерную сеть. Каркас фиксируем на координатной плоскости в точках a, b, c, d относительно базисного основания при помощи опор. Затем, натягиваем узел сети, соответствующей точке A , до координаты заданной для точки A , и фиксируем этот узел установкой дополнительной опоры (рис. 3). При этом координаты узлов двумерной сети соответствуют минимальной поверхности.

Далее, для всех узлов двумерной сети (рис. 3) замеряем координаты в декартовой системе x, y, z при соответствующих параметрах t^1 и t^2 единичного квадрата, то есть получаем координаты $x(t^1, t^2), y(t^1, t^2), z(t^1, t^2)$ и определяем радиус-векторы в узлах сетки по формуле

$$\bar{r} = x(t^1, t^2)\bar{i} + y(t^1, t^2)\bar{j} + z(t^1, t^2)\bar{k}, \tag{1}$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные орты в декартовой системе координат.

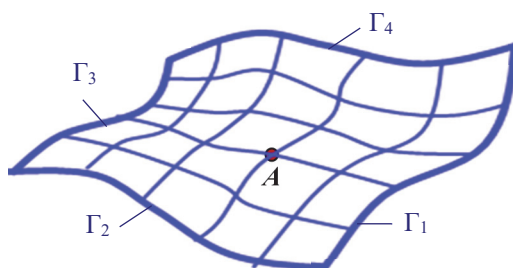


Рис. 1. Поверхность сложной геометрии
Figure 1. Surface of complex geometry

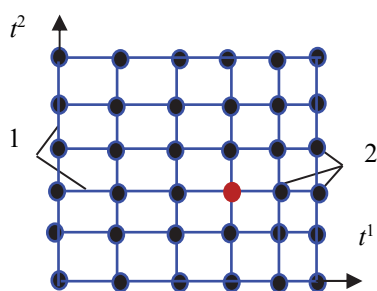


Рис. 2. Сеть из эластичных нитей
Figure 2. A network of elastic threads

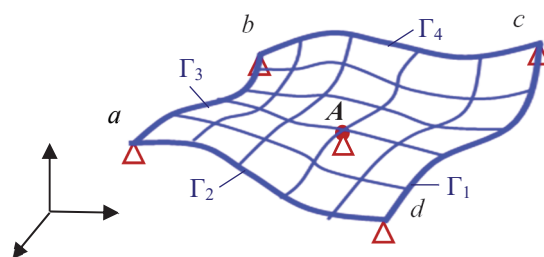


Рис. 3. Каркас с сетью на опорах и в точке A
Figure 3. A frame with a network on supports and at point A

Дифференцируя выражение (1) по t^1 и t^2 , определяем координатные векторы \bar{r}_1 и \bar{r}_2 для каждой точки сети:

$$\bar{r}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^1} \cong \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \bar{i} + \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \bar{j} + \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \bar{k}; \tag{2}$$

$$\bar{r}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^2} \cong \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \bar{i} + \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \bar{j} + \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \bar{k},$$

где i, j – идентификационные номера узловых точек по соответствующим направлениям координатных осей.

Далее, исходя из (2), нетрудно определить для каждой точки сети ковариантные a_{11}, a_{12}, a_{22} :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \bar{r}_1 \bar{r}_1 \cong \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 + \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2; \\ a_{12} &= \bar{r}_1 \bar{r}_2 \cong \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) + \\ &+ \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right) + \left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right); \\ a_{22} &= \bar{r}_2 \bar{r}_2 \cong \left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 + \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 + \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

фундаментальный определитель a :

$$\begin{aligned} a &\cong \left[\left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 + \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 + \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right) \right] + \\ &+ \left[\left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right) + \left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (4)$$

и контравариантные a^{11}, a^{12}, a^{22} компоненты первого основного метрического тензора:

$$\begin{aligned} a^{11} &\cong \left[\left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 + \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 + \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right)^2 \right] / a; \\ a^{12} &= a^{21} \cong - \left[\left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right) + \left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \right) \right] / a; \end{aligned} \quad (5)$$

$$a^{22} \cong \left[\left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 + \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right)^2 \right] / a.$$

Далее, используя (2) и (4), определяем вектор единичной нормали \bar{m} для каждой точки сети:

$$\begin{aligned} \bar{m} = \frac{[\bar{r}_1 \bar{r}_2]}{\sqrt{a}} \cong & \left[\left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} - \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \bar{i} - \right. \\ & - \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} - \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \bar{j} + \\ & \left. + \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} - \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2} \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1} \right) \bar{k} \right] / \sqrt{a}. \end{aligned} \quad (6)$$

Исходя из (3), определяем символы Кристоффеля второго рода $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2$ для каждой точки сети:

$$\begin{aligned} a\Gamma_{11}^1 &= \frac{a_{22}}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial t^1} - a_{12} \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial t^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial t^2} \right); \quad a\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \left(a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial t^2} - a_{12} \frac{\partial a_{22}}{\partial t^1} \right); \\ a\Gamma_{22}^1 &= a_{22} \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial t^1} \right) - \frac{a_{12}}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial t^2}; \quad a\Gamma_{11}^2 = a_{11} \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial t^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial t^2} \right) - \frac{a_{12}}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial t^1}; \\ a\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \left(a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial t^1} - a_{12} \frac{\partial a_{11}}{\partial t^2} \right); \quad a\Gamma_{22}^2 = \frac{a_{11}}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial t^2} - a_{12} \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial t^1} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, определяем координаты, компоненты метрического тензора и символов Кристоффеля для каждой точки сети, необходимые при решении задачи параметризации поверхности сложной геометрии в сплайновом варианте метода конечных элементов [18–22].

Заключение

Оболочки сложной геометрии выделяются высокими жесткостными и прочностными характеристиками и архитектурной гармоничностью. Для более широкого применения оболочек сложной геометрии необходимо достоверно оценивать их напряженно-деформированное состояние.

Эффективным методом расчета оболочек сложной геометрии является сплайновый вариант метода конечных элементов, составной частью которого является этап параметризации срединной поверхности.

Разработан способ параметризации минимальной поверхности сложной неканонической геометрии, ограниченной четырьмя криволинейными контурами и одной фиксированной координатой внутренней точки поверхности.

Описан алгоритм построения пространственной сети, а также определения координат, компонент метрического тензора и символов Кристоффеля, необходимых при решении задач параметризации в сплайновом варианте метода конечных элементов.

Подход может быть расширен для случаев параметризации поверхности сложной неканонической формы, когда фиксируется на поверхности несколько точек.

Список литературы

1. Якупов Н.М., Галимов Ш.К., Хисматуллин Н.И. От каменных глыб к тонкостенным конструкциям. Казань: SOS, 2001. 96 с.
2. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of analytical surfaces. Springer, 2015. 752 p.
3. Алейников С.М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно-неоднородных оснований. М.: Изд-во АСВ, 2000. 754 с.
4. Alibeigloo A., Nouri V. Static analysis of functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers using differential quadrature method // Composite Structures. 2010. Vol. 92. Issue 8. Pp. 1775–1785.
5. Gurkan I. The effect of using shell and solid models in structural stress analysis // Vibroengineering PROCEDIA. 2019. Vol. 27. Pp. 115–120. <https://doi.org/10.21595/vp.2019.20977>
6. Peaters M., Santo G., Degroote J., Van Paeppegem W. High-fidelity finite element models of composite wind turbine blades with shell and solid elements // Composite Structures. 2018. Vol. 200. Pp. 521–531. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.091>
7. Bognet B., Leygue A., Chinesta F. Separated representations of 3D elastic solutions in shell geometries // Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences. 2014. Vol. 1. <https://doi.org/10.1186/2213-7467-1-4>
8. Cerracchio P., Gherlone M., Di Sciuva M., Tessler A. A novel approach for displacement and stress monitoring of sandwich structures based on the inverse finite element method // Composite Structures. 2015. Vol. 127. Pp. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.081>
9. Gherlone M., Cerracchio P., Mattone M., Di Sciuva M., Tessler A. Shape sensing of 3D frame structures using an inverse finite element method // International Journal of Solids and Structure. 2012. Vol. 49. Pp. 3100–3112. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.06.009>
10. Kefal A., Tessler A., Oterkus E. An efficient inverse finite element method for shape and stress sensing of laminated composite and sandwich plates and shells. Hampton: NASA Langley Research Center, 2018.
11. Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018. Vol. 113. Issue 4. Pp. 634–655. <https://doi.org/10.1002/nme.5629>
12. Moazzez K., Googarchin H.S., Sharifi S.M.H. Natural frequency analysis of a cylindrical shell containing a variably oriented surface crack utilizing line-spring model // Thin Walled Struct. 2018. Vol. 125. Pp. 63–75. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.01.009>
13. Yin T., Lam H.F. Dynamic analysis of finite-length circular cylindrical shells with a circumferential surface crack // Journal of Engineering Mechanics. 2013. Vol. 139. Pp. 1419–1434. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000587](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000587)
14. Немши Ю.Н. Трехмерные граничные задачи теории упругости для неканонических областей // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 2. С. 3–39.
15. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. М.: Изд-во РУДН, 1988. 177 с.
16. Thin-shell structures. Theory, experiment and design / ed. by Y.C. Fung, E.E. Sechler. California Institute of Technology, Prentice Hall, 1974. 615 p.
17. Вахитов М.Б., Паймушин В.Н., Якупов Н.М. К решению плоской задачи подкрепленных панелей переменной жесткости // Известия вузов. Авиационная техника. 1978. № 2. С. 9–16.
18. Якупов Н.М. Об одном методе расчета оболочек сложной геометрии // Труды семинара: исследования по теории оболочек. Казань, 1984. Вып. 17. Ч. II. С. 4–17.
19. Корнишин М.С., Якупов Н.М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикладная механика. 1987. Т. 23. № 3. С. 38–44.
20. Корнишин М.С., Якупов Н.М. К расчету оболочек сложной геометрии в цилиндрических координатах на основе сплайнового варианта МКЭ // Прикладная механика. 1989. Т. 25. № 8. С. 53–60.
21. Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии. Казань: ИММ КНЦ РАН, 1993. 208 с.
22. Якупов Н.М. Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. Казань: ИММ КНЦ РАН, 1994. 124 с.
23. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. Issue 5. Pp. 779–793.
24. Якупов С.Н., Нуруллин Р.Г., Якупов Н.М. Параметризация элементов конструкций сложной геометрии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 6. С. 4–9. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-6-4-9>
25. Низамов Х.Н., Сидоренко С.Н., Якупов Н.М. Прогнозирование и предупреждение коррозионного разрушения конструкций. М.: РУДН, 2006. 356 с.

References

1. Yakupov N.M., Galimov Sh.K., Khismatullin N.I. From stone blocks to thin-walled structures. Kazan: SOS Publ.; 2001. (In Russ.)

2. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Springer; 2015.
3. Aleynikov S.M. *The method of boundary elements in contact problems for elastic spatially inhomogeneous bases*. Moscow: DIA Publ.; 2000. (In Russ.)
4. Alibeigloo A., Nouri V. Static analysis of functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers using differential quadrature method. *Composite Structures*. 2010;92(8):1775–1785.
5. Gurkan I. The effect of using shell and solid models in structural stress analysis. *Vibroengineering PROCEDIA*. 2019;27:115–120. <https://doi.org/10.21595/vp.2019.20977>
6. Peaters M., Santo G., Degroote J., Van Paepegem W. High-fidelity finite element models of composite wind turbine blades with shell and solid elements. *Composite Structures*. 2018;200:521–531. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.091>
7. Bognet B., Leygue A., Chinesta F. Separated representations of 3D elastic solutions in shell geometries. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*. 2014;1:4. <https://doi.org/10.1186/2213-7467-1-4>
8. Cerracchio P., Gherlone M., Di Sciuva M., Tessler A. A novel approach for displacement and stress monitoring of sandwich structures based on the inverse finite element method. *Composite Structures*. 2015;127:69–76. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.081>
9. Gherlone M., Cerracchio P., Mattone M., Di Sciuva M., Tessler A. Shape sensing of 3D frame structures using an inverse finite element method. *International Journal of Solids and Structure*. 2012;49:3100–3112. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.06.009>
10. Kefal A., Tessler A., Oterkus E. *An efficient inverse finite element method for shape and stress sensing of laminated composite and sandwich plates and shells*. Hampton: NASA Langley Research Center; 2018.
11. Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2018;113(4):634–655. <https://doi.org/10.1002/nme.5629>
12. Moazzez K., Gogarchin H.S., Sharifi S.M.H. Natural frequency analysis of a cylindrical shell containing a variably oriented surface crack utilizing line-spring model. *Thin-Shell Structures*. 2018;125:63–75. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.01.009>
13. Yin T., Lam H.F. Dynamic analysis of finite-length circular cylindrical shells with a circumferential surface crack. *Journal of Engineering Mechanics*. 2013;139:1419–1434. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000587](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000587)
14. Nemish Yu.N. Three-dimensional boundary value problems of elasticity theory for non-canonical domains. *Applied Mechanics*. 1980;16(2):3–39. (In Russ.)
15. Rekach V.G., Krivoschapko S.N. *Calculation of shells of complex geometry*. Moscow: RUDN Publ.; 1988. (In Russ.)
16. Fung Y.C., Sechler E.E. (eds.) *Thin-shell structures. Theory, experiment and design*. California Institute of Technology, Prentice Hall; 1974.
17. Vachitov M.B., Paymushin V.N., Yakupov N.M. On solution of the plane problem of reinforced panels of variable stiffness. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Aviatcionnaya Tekhnika*. 1978;2:9–16. (In Russ.)
18. Yakupov N.M. On one method of calculating shells of complex geometry. *Proceedings of the Seminar: Research on the Theory of Shells*. 1984;17(II):4–17. (In Russ.)
19. Kornishin M.S., Yakupov N.M. Spline variant of the finite element method for calculating shells of complex geometr. *Applied Mechanics*. 1987;23(3):38–44. (In Russ.)
20. Kornishin M.S., Yakupov N.M. To the calculation of shells of complex geometry in cylindrical coordinates based on the spline version of the FEM. *Applied Mechanics*. 1989;25(8):53–60. (In Russ.)
21. Yakupov N.M., Serazutdinov M.N. *Calculation of elastic thin-walled structures of complex geometry*. Kazan: IMM KSC RAS Publ.; 1993. (In Russ.)
22. Yakupov N.M. *Applied problems of mechanics of elastic thin-walled structures*. Kazan: IMM KNC RAS, 1994. (In Russ.)
23. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2017;38(5):779–793.
24. Yakupov S.N., Nurullin R.G., Yakupov N.M. Parametrization of structural elements of complex geometry. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;(6):4–9. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-6-4-9>
25. Nizamov H.N., Sidorenko S.N., Yakupov N.M. *Forecasting and prevention of corrosion destruction of structures*. Moscow: RUDN Publ.; 2006. (In Russ.)