



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-4-317-328  
УДК 624.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Оптимизация формы трехгранных решетчатых опор по критерию устойчивости

Л.Ш. Ахтямова<sup>1</sup> , Б.М. Языев<sup>1,2</sup> , А.С. Чепурненко<sup>1,2</sup>  , Л.С. Сабитов<sup>2,3</sup> 

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

<sup>2</sup>Казанский федеральный университет, Казань, Российская Федерация

<sup>3</sup>Казанский государственный энергетический университет, Казань, Российская Федерация

 anton\_chepurnenk@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 25 мая 2022 г.

Доработана: 30 июля 2022 г.

Принята к публикации: 5 августа 2022 г.

**Аннотация.** Предлагается методика оптимизации трехгранных решетчатых башенных сооружений из условия максимума критической нагрузки. Рассматриваются башни с поперечным сечением элементов в виде круглых труб. Нагрузка представлена горизонтальной сосредоточенной силой на вершине башни, моделирующей работу ветроэнергетической установки. Вводится ограничение на постоянство массы сооружения. В качестве варьируемых параметров выступают ширина башни, которая меняется по высоте, высоты панелей, внешние диаметры поперечного сечения поясов и решетки. Решение задачи нелинейной оптимизации выполняется численно в среде MATLAB при помощи пакетов Optimization Toolbox и Global Optimization Toolbox. В качестве начального приближения принимается башня постоянной ширины. Вычисление критической нагрузки выполняется методом конечных элементов в линейной постановке путем решения проблемы собственных значений. Для решения задачи нелинейной оптимизации используется метод внутренней точки, метод шаблонного поиска и генетический алгоритм. Производится сравнение эффективности перечисленных методов. Установлено, что наибольшей эффективностью обладает метод внутренней точки. Критическая нагрузка для оптимальной башни по сравнению с башней постоянной ширины при той же массе возросла в 2,3 раза.

**Ключевые слова:** трехгранные решетчатые опоры, оптимизация, устойчивость, метод конечных элементов, критическая нагрузка

### Для цитирования

Ахтямова Л.Ш., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Сабитов Л.С. Оптимизация формы трехгранных решетчатых опор по критерию устойчивости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 4. С. 317–328. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-317-328>

*Ахтямова Лейсан Шамилевна*, аспирант, кафедра сопротивления материалов, Донской государственный технический университет, Российская Федерация, 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; ORCID: 0000-0003-0480-9811, eLIBRARY SPIN-код: 6733-6979; leisan21@gmail.com

*Языев Батыр Меретович*, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Донской государственный технический университет, Российская Федерация, 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; главный научный сотрудник, Институт дизайна и пространственных искусств, Казанский федеральный университет, Российская Федерация, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 18; ORCID: 0000-0002-9133-8546, eLIBRARY SPIN-код: 7149-7981; anton\_chepurnenk@mail.ru

*Чепурненко Антон Сергеевич*, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Донской государственный технический университет, Российская Федерация, 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; главный научный сотрудник, Институт дизайна и пространственных искусств, Казанский федеральный университет, Российская Федерация, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 18; ORCID: 0000-0002-9133-8546, eLIBRARY SPIN-код: 7149-7981; anton\_chepurnenk@mail.ru

*Сабитов Линар Салихзанович*, доктор технических наук, профессор кафедры «Конструктивно-дизайнерское проектирование», Казанский федеральный университет, Российская Федерация, 420008, респ. Татарстан, Казань, ул. Кремлевская, 18; профессор кафедры «Энергообеспечение предприятий, строительство зданий и сооружений», Казанский государственный энергетический университет, Российская Федерация, 420066, Казань, ул. Красносельская, д. 51; ORCID: 0000-0001-7381-9752, eLIBRARY SPIN-код: 9261-1374; sabitov-kgasu@mail.ru

© Ахтямова Л.Ш., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Сабитов Л.С., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Trihedral lattice supports geometry optimization according to the stability criterion

Leysan Sh. Akhtyamova<sup>1</sup>, Batyr M. Yazyev<sup>1,2</sup>, Anton S. Chepurnenko<sup>1,2</sup>✉, Linar S. Sabitov<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup>Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

<sup>3</sup>Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russian Federation

✉ anton\_chepurnenk@mail.ru

## Article history

Received: May 25, 2022

Revised: July 30, 2022

Accepted: August 5, 2022

## For citation

Akhtyamova L.Sh., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Sabitov L.S. Trihedral lattice supports geometry optimization according to the stability criterion. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):317–328. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-317-328>

**Abstract.** The study proposes a technique for optimizing trihedral lattice tower structures from the condition of maximum critical load. Towers with a cross section of elements in the form of round pipes are considered. The load is represented by a horizontal concentrated force at the upper end of the tower, simulating the operation of a wind turbine. A constraint on the constancy of the mass of the structure is introduced. The variable parameters are the width of the tower, which varies in height, the height of the panels, the external diameters of the cross-section of the chords and lattice. The solution of the nonlinear optimization problem is performed in the MATLAB environment using the Optimization Toolbox and Global Optimization Toolbox packages. A tower of constant width is taken as the initial approximation. The calculation of the critical load is performed by the finite element method in a linear formulation by solving the eigenvalue problem. To solve the nonlinear optimization problem, the interior point method, the pattern search method and the genetic algorithm are used. The efficiency of the listed methods is compared. It has been found that the interior point method is the most efficient. The critical load for the optimal tower compared to the tower of constant width with the same mass increased by 2.3 times.

**Keywords:** trihedral lattice supports, optimization, stability, finite element method, critical load

## Введение

Решетчатые башенные сооружения широко применяются в практике возведения стальных опор линий электропередач [1–5], опор ветрогенераторов [6–10], опор для размещения светосигнального оборудования [11]. При этом опоры с трехгранным поперечным сечением являются более экономичными, чем четырехгранные [12; 13]. В [14–16] показывается, что экономическая эффективность башенных сооружений существенно зависит от их геометрии, а также формы и размеров поперечного сечения элементов. В [17] выполняется оптимизация таких геометрических параметров башни, как угол наклона решетки и ее ширина. При этом ширина башни по высоте остается постоянной, однако целесообразно ее уменьшение к вершине. В [18] производится поиск оптимальной формы поперечного сечения поясов трехгранной решетчатой башни, но не затрагиваются вопросы оптимизации геометрии самой башни. Целью настоящей работы является разработка методики оптимизации трехгранных решетчатых опор, в которой в качестве варьируемых величин будут выступать геометрические параметры сооружения, включая его ширину и высоту панелей, а также размеры поперечных сечений элементов.

## Материалы и методы

Рассматривается трехгранная решетчатая башня, ширина которой меняется по высоте (рис. 1). Поперечное сечение элементов поясов и решетки – круглые трубы. В качестве варьируемых параметров выступают ширины  $B_i$ , а также наружные диаметры поперечного сечения поясов  $D_p$ , наклонных элементов ре-

**Leysan Sh. Akhtyamova**, postgraduate student, Department of Strength of Materials, Don State Technical University, 1 Ploshchad' Gagarina, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0480-9811, eLIBRARY SPIN-code: 6733-6979; leisan21@gmail.com

**Batyr M. Yazyev**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Strength of Materials, Don State Technical University, 1 Ploshchad' Gagarina, Rostov-on-Don, 344000, Russia Federation; chief researcher, Institute of Design and Spatial Arts, Kazan Federal University, 18 Kremlevskaya St, Kazan, 420008, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5205-1446, eLIBRARY SPIN-code: 5970-5350; ps62@yandex.ru

**Anton S. Chepurnenko**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Strength of Materials, Don State Technical University, 1 Ploshchad' Gagarina, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation; chief researcher, Institute of Design and Spatial Arts, Kazan Federal University, 18 Kremlevskaya St, Kazan, 420008, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9133-8546, eLIBRARY SPIN-code: 7149-7981; an-ton\_chepurnenk@mail.ru

**Linar S. Sabitov**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Design, Kazan Federal University, 18 Kremlevskaya St, Kazan, 420008, Russian Federation; Professor of the Department "Energy Supply of Enterprises, Construction of Buildings and Structures," Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnoselskaya St, Kazan, 420066, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7381-9752, eLIBRARY SPIN-code: 9261-1374; sabitov-kgasu@mail.ru

сетки  $D_r$  и горизонтальных элементов решетки  $D_h$ . Вводится ограничение на постоянство массы. Высота всей опоры постоянна и равна  $H$ , количество панелей также постоянно и равно  $n$ , высота каждой панели  $H_i$  варьируется, но вводится ограничение  $\sum H_i = H$ . Нагрузка представлена горизонтальной сосредоточенной силой на вершине башни, которая моделирует расположенную наверху ветроэнергетическую установку. Направление силы  $F$  определяется углом  $\alpha$ . Задача оптимизации решается при фиксированном  $\alpha$ . Закрепление узлов башни в основании – шарнирно-неподвижное. В качестве целевой функции выступает величина критической нагрузки  $F$ , которая должна достигнуть максимума при неизменной массе сооружения.

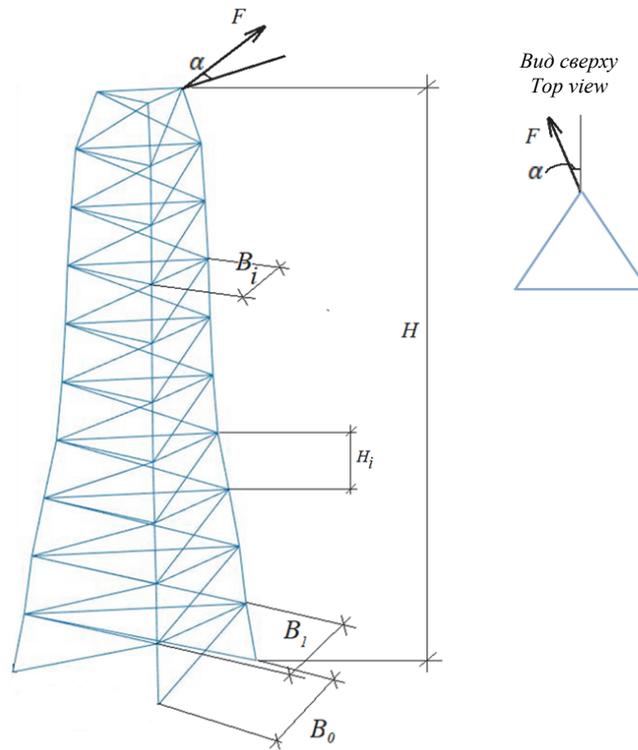


Рис. 1. Расчетная схема башни  
Figure 1. Calculation scheme of the tower

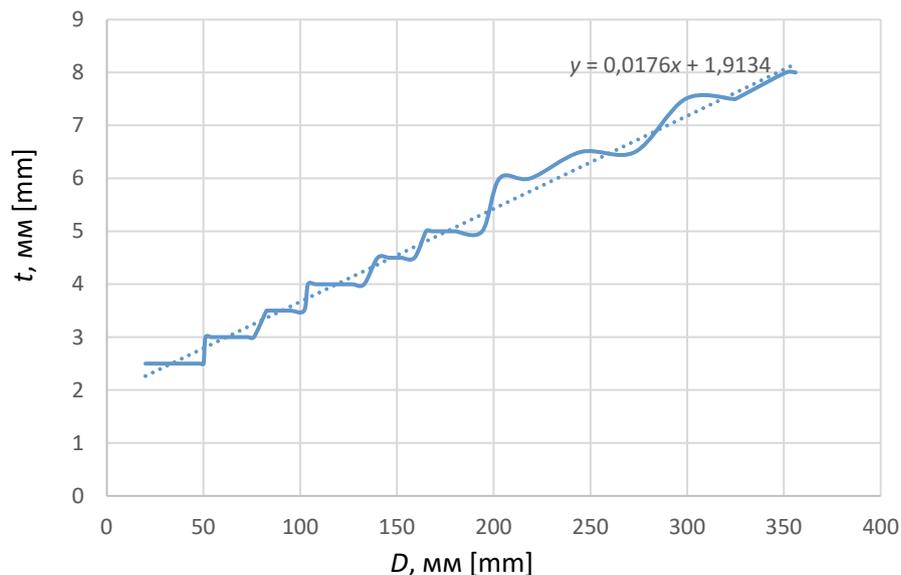


Рис. 2. Зависимость минимальной толщины стенки круглой трубы от наружного диаметра в соответствии с ГОСТ 8732–78  
Figure 2. Dependence of the minimum wall thickness of a round pipe on the outer diameter in accordance with GOST 8732–78





где  $\sin \beta = \frac{(z_2 - z_1)}{l}$ ,  $\sin \alpha = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}$ ,  $\gamma$  – угол чистого вращения (угол между осями  $y'$  и  $y$

или  $z'$  и  $z$  при совпадении осей  $x$  и  $x'$ ),  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  – координаты узлов конечного элемента.

При определении критической нагрузки каждый стержень башни разбивается по длине на десять конечных элементов.

Для решения задач нелинейной оптимизации нами использованы модули Optimization Toolbox и Global Optimization Toolbox среды MATLAB. В пакете Optimization Toolbox применяется функция *fmincon*, которая находит локальный минимум нелинейной целевой функции нескольких переменных  $f(x)$  с ограничениями:

$$\begin{cases} c(x) \leq 0; \\ ceq(x) = 0; \\ A \cdot x \leq b; \\ Aeq \cdot x = beq; \\ lb \leq x \leq ub, \end{cases} \quad (6)$$

где  $x$  – вектор, содержащий варьируемые параметры;  $A$  и  $Aeq$  представляют собой матрицы;  $c(x)$  и  $ceq(x)$  – нелинейные функции нескольких переменных, возвращающие скаляр;  $lb$  и  $ub$  – нижние и верхние границы для варьируемых переменных соответственно.

Функция *fmincon* позволяет выбирать один из нескольких доступных алгоритмов решения задачи нелинейной оптимизации. Нами используется метод внутренней точки, с которым подробно можно ознакомиться в [19].

Алгоритмы, заложенные в Optimization Toolbox, позволяют найти локальный минимум в бассейне притяжения, которому принадлежит начальная точка поиска<sup>1</sup>. Если целевая функция имеет несколько локальных минимумов, то для нахождения глобального минимума необходимо найти начальную точку в бассейне притяжения глобального минимума. Для этого используются заложенные в Global Optimization Toolbox функции, генерирующие случайные начальные точки в пределах границ  $lb$  и  $ub$ .

Большинство методов нелинейной оптимизации, включая метод внутренней точки, используют для поиска оптимальной точки информацию о градиенте целевой функции либо о ее частных производных высших порядков.

Существуют методы оптимизации, не требующие вычисления градиента. Нами применяются два таких метода – метод шаблонного поиска и генетический алгоритм.

Суть метода шаблонного поиска состоит в следующем: формируется набор точек вокруг текущей точки, называемый сетью и ищется такая точка, в которой значение ниже, чем в текущей точке. Сеть формируется путем сложения координат текущей точки с произведением набора векторов, называемого шаблоном, на скаляр, называемый размером сети. Если алгоритм находит точку, в которой значение целевой функции лучше, чем в текущей, она становится текущей на следующем шаге. Набор векторов (шаблон) может быть фиксированным либо случайно генерируемым. Подробно выбор шаблона описывается в [20]. В пакете Global Optimization Toolbox этот метод реализован в функции *patternsearch*.

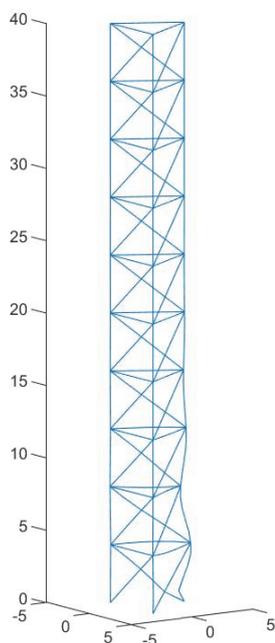
Метод шаблонного поиска, как и большинство классических методов, на каждой итерации генерирует единственную точку. Генетический алгоритм в отличие от классических подходов создает совокупность точек на каждой итерации. Лучшая точка в популяции приближается к оптимальному решению. Данный алгоритм использует четыре основных типа правил на каждом этапе для создания следующего поколения из текущей популяции: наследование, отбор, скрещивание и мутации, имитируя естественный отбор в природе. Подробное описание алгоритма и примеры его использования в задачах оптимизации строительных конструкций представлены в [21–23]. В пакете Global Optimization Toolbox этот метод реализован в функции *ga*.

## Результаты и обсуждение

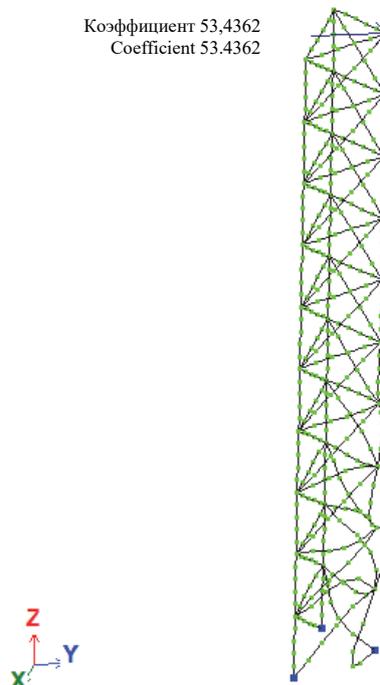
В качестве начального приближения нами принималась башня постоянной ширины  $B = 5$  м с одинаковыми высотами панелей  $H_i = 4$  м общей высотой  $H = 40$  м. Поперечное сечение поясов в начальном приближении – круглые трубы с наружным диаметром 127 мм, решетка – круглые трубы с наружным

<sup>1</sup> MathWorks. *Local vs. Global Optima*. Available from: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/local-vs-global-optima.html> (accessed: 31.07.2022).

диаметром 76 мм. Толщины стенок, вычисленные по формуле на рис. 2: 4,1 и 3,3 мм соответственно. Угол  $\alpha$ , определяющий направление сосредоточенной силы, принимался равным нулю. Критическая нагрузка для такой конструкции составила 53,2 кН. Форма потери устойчивости приведена на рис. 4. Из представленного рисунка видно, что для башни постоянной ширины потеря устойчивости происходит в наиболее нагруженных сжатых элементах пояса.



**Рис. 4.** Форма потери устойчивости башни постоянной ширины, полученная в авторской программе  
**Figure 4.** The buckling form of a tower of constant width, obtained in the author's program



**Рис. 5.** Форма потери устойчивости башни постоянной ширины, полученная в ПК ЛИРА-САПР  
**Figure 5.** The buckling form of the tower of constant width, obtained in the LIRA-SAPR software

Для контроля правильности вычисления критической нагрузки в разработанной авторами программе модель башни экспортировалась в программный комплекс ЛИРА-САПР. Для передачи в ПК ЛИРА автоматически генерировался текстовый файл с исходными данными в принятом для данного расчетного комплекса формате. При расчете в ПК ЛИРА-САПР критическая нагрузка составила 53,4 кН, что незначительно отличается от авторского решения (рис. 5).

Верхние и нижние границы  $ub$  и  $lb$  для варьируемых параметров при решении задачи оптимизации представлены в таблице. При проектировании реальных конструкций верхняя граница параметров  $B_i$  может быть ограничена площадью участка, на котором размещается сооружение, а нижняя граница – располагаемым наверху оборудованием. Для параметров  $H_i$  приняты такие же границы, как и для  $B_i$ . Диаметры поперечных сечений, как правило, ограничены существующим сортаментом и ассортиментом продукции ближайших производителей труб.

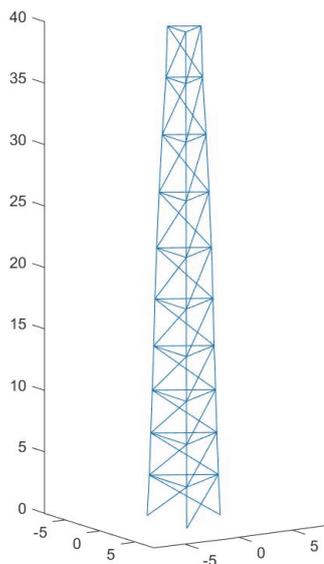
**Верхние и нижние границы варьируемых параметров при решении задачи оптимизации**  
**Upper and lower bounds of variable parameters in solving an optimization problem**

Параметр Parameter	$B_i$ , м [m]	$H_i$ , м [m]	$D_p$ , м [m]	$D_r$ , м [m]	$D_h$ , м [m]
$lb$	0,5	0,5	0,05	0,05	0,05
$ub$	10	10	0,3	0,3	0,3

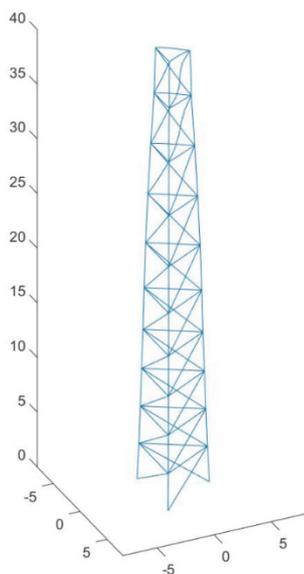
Полученная в результате решения задачи методом внутренней точки оптимальная форма башни приведена на рис. 6. Диаметр труб поясов составил 148 мм, наклонных элементов решетки – 74,1 мм, горизонтальных элементов решетки – 62,8 мм. Соответствующие толщины стенок, вычисленные по фор-

муле, приведенной на рис. 2: 4,5; 3,2 и 3 мм. Критическая нагрузка по сравнению с башней постоянной ширины возросла до 123 кН, то есть в 2,3 раза. Форма потери устойчивости для оптимальной башни показана на рис. 7. Полученное решение экспортировалось в программный комплекс ЛИРА-САПР. При расчете в ПК ЛИРА-САПР критическая нагрузка составила 122,8 кН, что незначительно отличается от авторского решения. Форма потери устойчивости в ПК ЛИРА-САПР с увеличенным масштабом перемещений приведена на рис. 8. Из данного рисунка видно, что в оптимальном варианте, в отличие от базового, потеря устойчивости происходит одновременно во всех сжатых элементах.

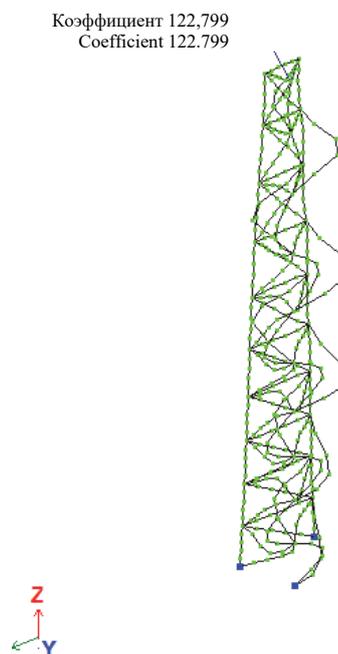
При проектировании реальной конструкции наружные диаметры труб можно принять равными 146, 76 и 63,5 мм, а толщины стенок 4,5; 3 и 3 мм соответственно.



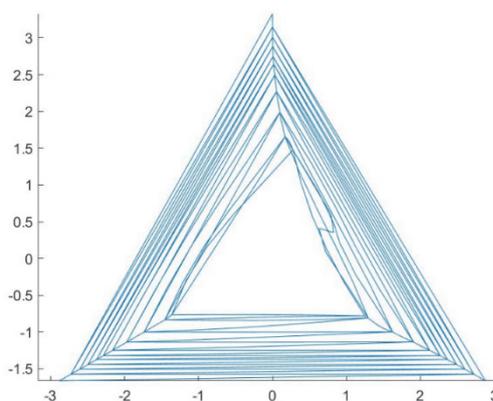
**Рис. 6.** Оптимальная форма башни, полученная на основе метода внутренней точки  
**Figure 6.** Optimal tower shape based on the interior point method



**Рис. 7.** Форма потери устойчивости оптимальной башни, полученная в авторской программе  
**Figure 7.** The form of stability loss of the optimal tower, obtained in the author's program



**Рис. 8.** Форма потери устойчивости оптимальной башни, полученная в ПК ЛИРА-САПР  
**Figure 8.** The form of stability loss of the optimal tower obtained in the LIRA-SAPR software



При решении с применением метода шаблонного поиска и генетического алгоритма учитывалось дискретное изменение толщины стенки труб в зависимости от диаметра по сортаменту, то есть представленная на рис. 2 формула не использовалась. В начальной точке поиска поперечное сечение поясов принималось в виде круглых труб наружным диаметром 127 мм и толщиной стенки 4 мм, поперечное сечение решетки – круглые трубы наружным диаметром 76 мм и толщиной стенки 3 мм. Критическая нагрузка для такой башни – 51,3 кН.

Полученная в результате решения задачи методом шаблонного поиска оптимальная форма башни приведена на рис. 9. Эта форма несколько отличается от представленной на рис. 6. Для поясов оптимальный диаметр труб оказался равным 131 мм, для наклонных элементов решетки – 76 мм и для горизонтальных элементов решетки – 68 мм. Толщины стенок: 4, 3 и 3 мм соответственно. Критическая нагрузка при этом составила 103 кН, что примерно в 2 раза выше по сравнению с начальной точкой поиска. Форма потери устойчивости приведена на рис. 10. Из данного графика видно, что потеря устойчивости происходит во всех сжатых элементах поясов и отдельных элементах решетки. В целом метод шаблонного поиска в данной задаче оказался менее эффективным, чем метод внутренней точки. Генетический алгоритм проявил себя еще хуже, критическая нагрузка по сравнению с башней постоянной ширины возросла всего на 24 %. Форма башни, полученная на основе генетического алгоритма, приведена на рис. 11.

Аналогичные результаты по эффективности метода шаблонного поиска и генетического алгоритма получены нами ранее при оптимизации трехгранных решетчатых опор с линейно меняющейся по высоте шириной с использованием критериев минимума потенциальной энергии деформации, минимума перемещения и максимума первой частоты собственных колебаний в [24]. Также в [24] показано, что изменение угла  $\alpha$ , определяющего направление сосредоточенной силы, несущественно влияет на получаемую оптимальную форму сооружения.

Отметим, что в полученных решениях не вводилось ограничение на гибкость элементов, и для некоторых раскосов гибкость превышает предельную по СП 16.13330.2017. Данная задача решалась также с учетом ограничения на гибкость. В СП 16.13330.2017 величина предельной гибкости зависит от степени нагруженности элементов  $\alpha = N / (\varphi AR_y \gamma_c)$ . Поскольку нами расчет первоначально выполняется на действие единичной силы, а критическая нагрузка затем определяется из решения проблемы собственных значений, определить заранее фактическую величину продольной силы в каждом из элементов не представляется возможным. Поэтому для элементов пояса предельная гибкость принималась равной 120, а для элементов решетки – 150.

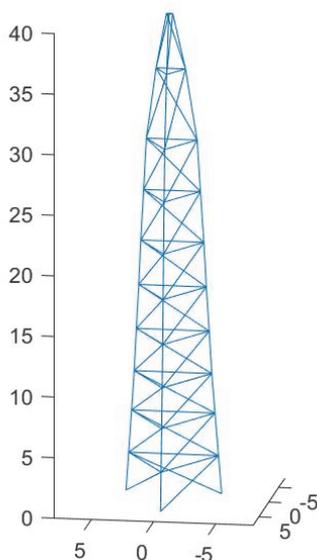


Рис. 9. Оптимальная форма башни, полученная методом шаблонного поиска

Figure 9. Optimal tower shape obtained by pattern search method

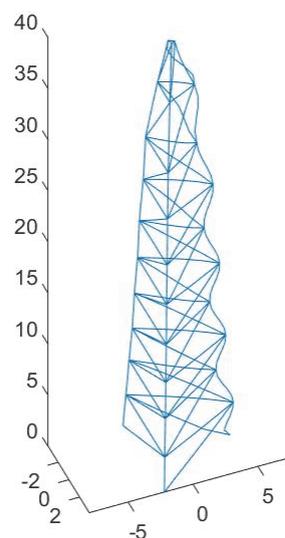
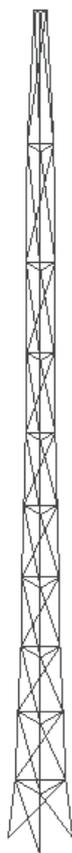
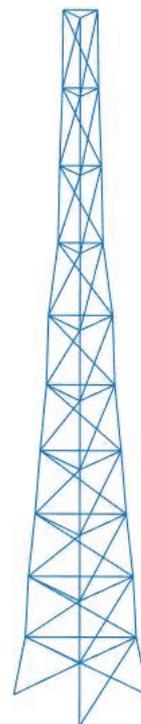


Рис. 10. Форма потери устойчивости для башни, приведенной на рис. 9

Figure 10. The buckling shape for the tower shown in Figure 9



**Рис. 11.** Форма башни, полученная при помощи генетического алгоритма  
**Figure 11.** The shape of the tower, obtained using a genetic algorithm



**Рис. 12.** Оптимальная форма башни, полученная с учетом ограничения на гибкость элементов  
**Figure 12.** The optimal shape of the tower, obtained taking into account the limitation on the slenderness of the elements

Форма башни, полученная с учетом ограничения на гибкость, приведена на рис. 12. Диаметр поперечного сечения поясов при этом оказался равным 137 мм, раскосов – 120 мм и горизонтальных элементов решетки – 106 мм. Данная башня имеет ту же массу, что и конструкция в начальном приближении. Критическая нагрузка составила 53,2 кН, что совпадает с результатом в начальном приближении. Однако для начального приближения не выполнялось условие по гибкости элементов: гибкость раскосов составляла 249, что существенно больше допустимой по действующим нормам. После оптимизации при сохранении массы за счет изменения размеров поперечных сечений и параметров  $B_i$ ,  $H_i$  максимальная гибкость раскосов снизилась до 111.

### Заключение

Разработана методика оптимизации трехгранных решетчатых башен переменного профиля с поперечным сечением элементов в виде круглых труб по критерию максимума критической нагрузки при постоянной массе. Выполнена оптимизация опоры под ветроэнергетическую установку. В рассмотренном примере по сравнению с башней постоянной ширины той же массы удалось повысить критическую нагрузку в 2,3 раза. Потеря устойчивости в оптимальной конструкции происходит одновременно во всех сжатых элементах. Сравнение эффективности трех методов оптимизации – метода внутренней точки, метода шаблонного поиска и генетического алгоритма – показало, что первый из них имеет наибольшую эффективность.

Отметим, что в настоящей статье решение задачи оптимизации по критерию устойчивости выполнялось без учета нагрузки от собственного веса элементов. Для опор ветроэнергетических установок основной вклад в потерю устойчивости вносит нагрузка от ветрогенератора, а вклад собственного веса элементов не столь существенен. В дальнейших исследованиях мы планируем учесть и нагрузку от собственного веса.

### Список литературы / References

1. Shu Q., Huang Z., Yuan G., Ma W., Ye S., Zhou J. Impact of wind loads on the resistance capacity of the transmission tower subjected to ground surface deformations. *Thin-Walled Structures*. 2018;131:619–630. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.07.020>
2. Yuan G., Yang B., Huang Z., Tan X. Experimental study on the stability of the transmission tower with hybrid slab foundation. *Engineering Structures*. 2018;162:151–165. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.01.066>
3. Xie Q., Zhang J. Experimental study on failure modes and retrofitting method of latticed transmission tower. *Engineering Structures*. 2021;226:111365. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111365>
4. Tian L., Pan H., Ma R., Zhang L., Liu Z. Full-scale test and numerical failure analysis of a latticed steel tubular transmission tower. *Engineering Structures*. 2020;208:109919. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109919>
5. Singh V.K., Gautam A.K. Study on evaluation of angle connection for transmission towers. *International Conference on Advances in Structural Mechanics and Applications*. Cham: Springer; 2022. p. 353–363. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-04793-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-031-04793-0_27)
6. Axisa R., Muscat M., Sant T., Farrugia R.N. Structural assessment of a lattice tower for a small, multi-bladed wind turbine. *International Journal of Energy and Environmental Engineering*. 2017;8(4):343–358. <https://doi.org/10.1007/s40095-017-0239-3>
7. Zwick D., Muskulus M., Moe G. Iterative optimization approach for the design of full-height lattice towers for offshore wind turbines. *Energy Procedia*. 2012;24:297–304. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2012.06.112>
8. Chew K.H., Tai K., Ng E.Y.K., Muskulus M. Optimization of offshore wind turbine support structures using an analytical gradient-based method. *Energy Procedia*. 2015;80:100–107. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2015.11.412>
9. Das A. Modelling and analysis of lattice towers for wind turbines. *International Journal of Science and Research*. 2015;4(4):999–1003.
10. Stavridou N., Koltsakis E., Baniotopoulos C. Structural analysis and optimal design of steel lattice wind turbine towers. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*. 2019;172(8):564–579. <https://doi.org/10.1680/jstbu.18.00074>
11. Badertdinov I.R., Kuznetsov I.L., Sabitov L.S. Development and study of lattice trihedral supports. In: Laskov N.N. (ed.) *Effective Building Structures: Theory and Practice: Collection of Articles of the XIV International Scientific and Technical Conference*. Penza; 2014. p. 15–17. (In Russ.)  
*Бадертдинов И.Р., Кузнецов И.Л., Сабитов Л.С.* Разработка и исследование решетчатых трехгранных опор // Эффективные строительные конструкции: теория и практика: сборник статей XIV Международной научно-технической конференции / под ред. Н.Н. Ласькова. Пенза, 2014. С. 15–17.
12. Zolotukhin S.N., Kalashnikova E.Yu. Analysis of the constructive form of radio relay antenna supports. *Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering: Materials of the Interregional Scientific-Practical Conference "High Technologies in Ecology."* 2011;1:34–38. (In Russ.)  
*Золотухин С.Н., Калашиникова Е.Ю.* Анализ конструктивной формы антенных опор радиорелейной связи // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Материалы межрегиональной научно-практической конференции «Высокие технологии в экологии». 2011. № 1. С. 34–38.
13. Gorokhov E.V., Vasylev V.N., Alekhin A.M., Yagmur A.A. Analysis of the constructive form of radio relay antenna supports. *Metall Constructions*. 2010;16(1):41–50. (In Russ.)  
*Горохов Е.В., Васылев В.Н., Алёхин А.М., Ягмур А.А.* Анализ конструктивной формы антенных опор радиорелейной связи // Металлические конструкции. 2010. Т. 16. № 1. С. 41–50.
14. Feng R.Q., Liu F.C., Xu W.J., Ma M., Liu Y. Topology optimization method of lattice structures based on a genetic algorithm. *International Journal of Steel Structures*. 2016;16(3):743–753.
15. Jovašević S., Mohammadi M.R.S., Rebelo C., Pavlović M., Veljković M. New lattice-tubular tower for onshore WEC. Part 1. Structural optimization. *Procedia Engineering*. 2017;199:3236–3241.
16. Fu J.Y., Wu B.G., Wu J.R., Deng T., Pi Y.L., Xie Z.N. Wind resistant size optimization of geometrically nonlinear lattice structures using a modified optimality criterion method. *Engineering Structures*. 2018;173:573–588.
17. Badertdinov I.R., Kuznetsov I.L., Kashapov N.F., Gilmanshin I.R., Sabitov L.S. Optimal geometrical parameters of trihedral steel support's cross section. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;412(1):012005. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/412/1/012005>
18. Chepurnenko A.S., Sabitov L.S., Yazyev B.M., Galimyanova G.R., Akhtyamova L.Sh. Trihedral lattice towers with optimal cross-sectional shape. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021;1083(1):012012. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1083/1/012012>
19. Byrd R.H., Hribar M.E., Nocedal J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*. 1999;9(4):877–900. <https://doi.org/10.1137/S1052623497325107>
20. Kolda T.G., Lewis R.M., Torczon V. *A generating set direct search augmented Lagrangian algorithm for optimization with a combination of general and linear constraints*. Technical Report SAND2006-5315. Sandia National Laboratories; 2006. <https://doi.org/10.2172/893121>

21. Serpik I.N. Optimization of reinforced concrete frames taking into account the multivariance of loading. *Construction and Reconstruction*. 2012;39(1):33–39. (In Russ.)

*Серпик И.Н.* Оптимизация железобетонных рам с учетом многовариантности нагружения // Строительство и реконструкция. 2012. Т. 39. № 1. С. 33–39.

22. Alekseytsev A.V., Serpik I.N. Optimization of flat farms based on genetic search and iterative triangulation procedure. *Construction and Reconstruction*. 2011;(2):3. (In Russ.)

*Алексейцев А.В., Серпик И.Н.* Оптимизация плоских ферм на основе генетического поиска и итеративной процедуры триангуляции // Строительство и реконструкция. 2011. № 2. С. 3.

23. Serpik I.N., Leletko A.A., Alekseytsev A.V. Evolutionary synthesis of metal flat frames in the case of bearing capacity assessment using the limit equilibrium method. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2007;(8): 4–9. (In Russ.)

*Серпик И.Н., Лелетко А.А., Алексейцев А.В.* Эволюционный синтез металлических плоских рам в случае оценки несущей способности по методу предельного равновесия // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2007. № 8. С. 4–9.

24. Akhtyamova L.Sh., Chepurnenko A.S., Rozen M.N., Al-Wali E. Trihedral lattice towers geometry optimization. *E3S Web of Conferences*. 2021;281:01024. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202128101024>