

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241

УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения

Н.А. Гуреева<sup>1</sup> , Р.З. Киселева<sup>2</sup>  , А.П. Киселев<sup>2</sup> , А.П. Николаев<sup>2</sup> , Ю.В. Клочков<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация<sup>2</sup>Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Российская Федерация

✉ rumia1970@yandex.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 3 марта 2022 г.

Доработана: 2 июня 2022 г.

Принята к публикации: 2 июня 2022 г.

#### Для цитирования

Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочков Ю.В. Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 228–241. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>

**Аннотация.** Описано использование традиционных аппроксимирующих функций непосредственно к искомому вектору перемещения внутренней точки конечного элемента для его определения через узловые неизвестные в виде векторов перемещений и их производных. Для анализа напряженного состояния геометрически нелинейно деформируемой оболочки вращения на шаге нагружения разработан алгоритм формирования матрицы жесткости шестигранного конечного элемента с узловыми величинами в виде приращений перемещений и их производных. Для получения искомых аппроксимирующих выражений использована традиционная теория интерполяции, которая при расчете в криволинейной системе координат применена к вектору перемещения внутренней точки конечного элемента для его аппроксимации класса  $C^{(1)}$  через узловые векторы перемещений и их производные. Для координатного преобразования получены выражения базисов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента. После координатных преобразований находятся аппроксимирующие выражения класса  $C^{(1)}$  для компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента, приводящие в криволинейной системе координат к неявному учету смещения конечного элемента как жесткого целого. На примерах расчета получены подтверждающие результаты разработанного метода аппроксимации искомых величин МКЭ при значительных смещениях конструкции как абсолютного твердого тела.

**Ключевые слова:** оболочка вращения, геометрическая нелинейность, конечный шестигранный элемент, напряженно-деформированное состояние

**Гуреева Наталья Анатольевна**, доктор физико-математических наук, профессор, доцент департамента математики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Российская Федерация, 125993, Москва, Ленинградский пр-кт, д. 49; ORCID: 0000-0003-3496-2008, Scopus ID: 30067680500, eLIBRARY SPIN-код: 8393-5900; nagureeva@fa.ru

**Киселева Румия Зайдуллаевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, эколого-мелиоративный факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-3047-5256, Scopus ID: 57212347650, eLIBRARY SPIN-код: 1948-5390; rumia1970@yandex.ru

**Киселев Анатолий Петрович**, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, эколого-мелиоративный факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-7138-2056, Scopus ID: 57215753276, eLIBRARY SPIN-код: 1340-0720; apkiselev1969@yandex.ru

**Николаев Анатолий Петрович**, доктор технических наук, профессор кафедры механики, инженерно-технологический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

**Клочков Юрий Васильевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, электроэнергетический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

© Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочков Ю.В., 2022

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Volumetric element with vector approximation of the desired values for nonlinear calculation of the shell of rotation

Natalia A. Gureeva<sup>1</sup> , Rumia Z. Kiseleva<sup>2</sup>  , Anatoly P. Kiselev<sup>2</sup> ,  
Anatoly P. Nikolaev<sup>2</sup> , Yuriy V. Klochkov<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russian Federation

 rumia1970@yandex.ru

### Article history

Received: March 3, 2022

Revised: June 2, 2022

Accepted: June 2, 2022

**Abstract.** The usage of traditional approximating functions directly to the desired displacement vector of the internal point of a finite element to determine it through nodal unknowns in the form of displacement vectors and their derivatives is described. To analyze the stress state of a geometrically non-linearly deformable shell of rotation at the loading step, the developed algorithm for forming the stiffness matrix of a hexagonal finite element with nodal values in the form of displacement increments and their derivatives was used. To obtain the desired approximating expressions, the traditional interpolation theory is used, which, when calculated in a curved coordinate system, is applied to the displacement vector of the internal point of a finite element for its approximation of class  $C^{(1)}$  through nodal displacement vectors and their derivatives. For the coordinate transformation, expressions of the bases of nodal points are obtained in terms of the basis vectors of the inner point of the finite element. After the coordinate transformations, approximating expressions of class  $C^{(1)}$  are found for the components of the displacement vector of the internal point of the finite element, leading in a curved coordinate system to implicitly account for the displacement of the finite element as a rigid whole. Using calculation examples, the results of the developed method of approximation of the required values of the FEM with significant displacements of the structure as an absolute solid are obtained.

**Keywords:** shell of rotation, geometric nonlinearity, finite hexahedron element, stress-strain state

### For citation

Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Kiselev A.P., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. Volumetric element with vector approximation of the desired values for nonlinear calculation of the shell of rotation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):228–241. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>

### Введение

Теория механики сплошной среды и, в частности, оболочек разработана достаточно полно [1–3]. Уравнения для определения напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов агропромышленного комплекса, химического и авиационного машиностроения и других отраслей получились по сложности такими, что их использование в практике инженерных расчетов оказалось весьма ограниченным. Из-за сложности получения аналитических решений значительное количество исследований посвящено разработке численных и приближенных методов расчета деформируемых тел [4–8]. Среди методов численного определения напряженно-деформированного состояния (НДС) инженерных структур различного назначения метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее эффективных, что отражено в работах как отечественных [9–14], так и зарубежных исследователей<sup>1</sup> [15–22].

**Natalia A. Gureeva**, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradskii Prospekt, Moscow, 125993, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3496-2008, Scopus ID: 30067680500, eLIBRARY SPIN-code: 8393-5900; nagureeva@fa.ru

**Rumia Z. Kiseleva**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department, Ecology and Melioration Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-3047-5256, Scopus ID: 57212347650, eLIBRARY SPIN-code: 1948-5390; ru-mia1970@yandex.ru

**Anatoly P. Kiselev**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department, Ecology and Melioration Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7138-2056, Scopus ID: 57215753276, eLIBRARY SPIN-code: 1340-0720; ap-kiselev1969@yandex.ru

**Anatoliy P. Nikolaev**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics, Faculty of Engineering and Technology, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

**Yuriy V. Klochkov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Electric Power and Energy Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

<sup>1</sup> Баме К.Ю. Метод конечных элементов: учебник. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.

Определение НДС тонкостенных конструкций в указанных работах выполнялось при использовании гипотезы прямой нормали на основе МКЭ в формулировке метода перемещений. Причем в криволинейных системах координат традиционные функции формы использовались непосредственно для аппроксимации компонент вектора перемещений через узловые величины, в результате каждая компонента вектора перемещений внутренней точки конечного элемента выражалась только через узловые значения этой же компоненты<sup>2</sup> [15; 17–22] и не зависела от других компонент. Эти положения использовались в матрицах жесткостей конечных элементов и при исследовании процессов деформирования в геометрически нелинейной постановке [19; 20; 22; 23].

На основе МКЭ созданы и широко применяются универсальные коммерческие программные продукты типа ANSYS, NFSTRAN, LS-DYNA, ADINA, ASTRA-МОВА и др. Следует отметить, что применение аппроксимирующих функций формы непосредственно к компонентам вектора перемещения внутренней точки конечного элемента корректно только при выполнении расчетов в декартовой системе координат. При выполнении расчетов на основе МКЭ в криволинейной системе координат такой прием аппроксимации приводит к общеизвестной проблеме учета смещения конечного элемента как твердого тела [16; 23].

В настоящей работе для определения НДС нелинейно деформируемой оболочки вращения без использования гипотезы прямой нормали разработан на шаге нагружения шестигранный конечный элемент в формулировке метода перемещений с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и их производных.

Для аппроксимации приращений перемещений через узловые значения разработана векторная аппроксимация класса  $C^{(1)}$ , использование которой после координатного преобразования дало возможность получить аппроксимирующие функции, приводящие к решению проблемы учета смещения конечного элемента как абсолютно твердого тела

## Методы

### Векторные параметры оболочки вращения

Положение произвольной точки  $M^0$  срединной поверхности оболочки вращения в декартовой системе координат  $Ox, y, z$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  определяется радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}, \quad (1)$$

где  $r$  – радиус вращения точки  $M^0$ .

Векторы базиса произвольной точки  $M^0$  определяются выражениями

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}^0_{,x} = \vec{i} + r_{,x} \sin \theta \vec{j} + r_{,x} \cos \theta \vec{k}; \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}^0_{,\theta} = r \cos \theta \vec{j} - r \sin \theta \vec{k};$$

$$\vec{a}_3^0 = \frac{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0|} = \frac{1}{\sqrt{1+r_{,x}^2}} (-\vec{i} r_{,x} + \vec{j} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta).$$

Радиус-вектор произвольной точки  $M^{0\zeta}$  оболочки имеет вид

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}_3^0. \quad (2)$$

Векторы базиса произвольной точки  $M^{0\zeta}$  определяются дифференцированием (2) и представляются матричными выражениями

$$\{\vec{g}^0\} = [s] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{i}\} = [s]^{-1} \{\vec{g}^0\}, \quad (3)$$

где  $\{\vec{g}^0\}^T = \{\vec{g}_1^0 \vec{g}_2^0 \vec{g}_3^0\}$ ;  $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}$ .

<sup>2</sup> Бате К.Ю. Метод конечных элементов: учебник. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.

Дифференцированием (2) с использованием (3) можно производные базисных векторов точки  $M^{0\zeta}$  представить компонентами в базисе этой же точки:

$$\begin{aligned} \{\bar{g}^0_{,x}\} &= [s_{,x}][s]^{-1} \{\bar{g}^0\} = [m] \{\bar{g}^0\}; \\ \{\bar{g}^0_{,0}\} &= [s_{,0}][s]^{-1} \{\bar{g}^0\} = [n] \{\bar{g}^0\}; \\ \{\bar{g}^0_{,\zeta}\} &= [s_{,\zeta}][s]^{-1} \{\bar{g}^0\} = [l] \{\bar{g}^0\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\{\bar{g}^0_{,x}\}^T = \{\bar{g}^0_{1,x} \ \bar{g}^0_{2,x} \ \bar{g}^0_{3,x}\}$ ;  $\{\bar{g}^0_{,0}\}^T = \{\bar{g}^0_{1,0} \ \bar{g}^0_{2,0} \ \bar{g}^0_{3,0}\}$ ;  $\{\bar{g}^0_{,\zeta}\}^T = \{\bar{g}^0_{1,\zeta} \ \bar{g}^0_{2,\zeta} \ \bar{g}^0_{3,\zeta}\}$ .

### Перемещения и деформации

В условиях шагового нагружения рассматриваются три положения произвольной точки оболочки: исходное состояние, деформированное состояние (вектор перемещения  $\vec{V}$ ) и соседнее с деформированным состоянием (вектор перемещения  $\vec{w}$ ).

Компоненты векторов перемещений  $\vec{V}$  и  $\vec{w}$  определяются в базисе точки  $M^{0\zeta}$ :

$$\vec{V} = v^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w} = w^i \bar{g}_i^0. \quad (5)$$

После дифференцирования (5) с учетом (4) получаются соотношения

$$\vec{V}_{,x} = f_1^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{V}_{,0} = f_2^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{V}_{,\zeta} = f_3^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w}_{,x} = \alpha_1^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w}_{,0} = \alpha_2^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w}_{,\zeta} = \alpha_3^i \bar{g}_i^0, \quad (6)$$

где  $f_m^i, \alpha_m^i$  – являются функциями компонент векторов перемещений  $\vec{V}, \vec{w}$  соответственно и определяются выражениями такого вида:

$$\begin{aligned} f_1^1 &= (v_{,x}^1 + m_{11}v^1 + m_{21}v^2 + m_{31}v^3); \quad f_3^3 = (v_{,\zeta}^3 + l_{13}v^1 + l_{23}v^2 + l_{33}v^3); \\ \alpha_1^1 &= (w_{,x}^1 + m_{11}w^1 + m_{21}w^2 + m_{31}w^3); \quad \alpha_3^3 = (w_{,\zeta}^3 + l_{13}w^1 + l_{23}w^2 + l_{33}w^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Определяя положение точки  $M^\zeta$  радиус-вектором

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}, \quad (8)$$

его дифференцированием можно найти векторы локального базиса точки  $M^\zeta$ :

$$\begin{aligned} \bar{g}_1 &= (\vec{R}^\zeta)_{,x} = \bar{g}_1^0 (1 + f_1^1) + \bar{g}_2^0 f_1^2 + \bar{g}_3^0 f_1^3; \\ \bar{g}_2 &= (\vec{R}^\zeta)_{,0} = \bar{g}_1^0 f_2^1 + \bar{g}_2^0 (1 + f_2^2) + \bar{g}_3^0 f_2^3; \\ \bar{g}_3 &= (\vec{R}^\zeta)_{,\zeta} = \bar{g}_1^0 f_3^1 + \bar{g}_2^0 f_3^2 + \bar{g}_3^0 (1 + f_3^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты тензора деформаций после  $j$  шагов нагружения определяются разностью компонент метрических тензоров в точках  $M^{0\zeta}$  и  $M^\zeta$  [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{ij}^0) = \frac{1}{2} (\bar{g}_i^0 \vec{V}_{,j} + \bar{g}_j^0 \vec{V}_{,i} + \vec{V}_{,i} \vec{V}_{,j}). \quad (10)$$

При учете (6) и (9) деформации запишутся выражениями

$$\varepsilon_{11} = f_1^1 g_{11}^0 + f_1^2 g_{12}^0 + f_1^3 g_{13}^0 + \left( f_1^1 f_1^1 g_{11}^0 + f_1^2 f_1^2 g_{22}^0 + f_1^3 f_1^3 g_{33}^0 + 2f_1^1 f_1^2 g_{12}^0 + 2f_1^1 f_1^3 g_{13}^0 + 2f_1^2 f_1^3 g_{23}^0 \right) \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{23} = & f_3^1 g_{12}^0 + f_3^2 g_{22}^0 + f_3^3 g_{23}^0 + f_2^1 g_{13}^0 + f_2^2 g_{23}^0 + f_2^3 g_{33}^0 + f_2^1 f_3^1 g_{11}^0 + f_2^1 f_3^2 g_{12}^0 + \\ & + f_2^1 f_3^3 g_{13}^0 + f_2^2 f_3^1 g_{12}^0 + f_2^2 f_3^2 g_{22}^0 + f_2^2 f_3^3 g_{23}^0 + f_2^3 f_3^1 g_{13}^0 + f_2^3 f_3^2 g_{23}^0 + f_2^3 f_3^3 g_{33}^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты тензора приращений деформаций на  $(j+1)$ -м шаге нагружения определяются разностью ковариантных компонент метрических тензоров точек  $M^{\zeta^*}$  и  $M^{\zeta}$ :

$$\Delta\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} (g_{mn}^* - g_{mn}) = \frac{1}{2} (\bar{g}_m \bar{w}_{,n} + \bar{g}_n \bar{w}_{,m} + \bar{w}_{,m} \bar{w}_{,n}) = \Delta\varepsilon_{mn}^l + \Delta\varepsilon_{mn}^h, \quad (12)$$

где  $\Delta\varepsilon_{mn}^l$ ;  $\Delta\varepsilon_{mn}^h$  – компоненты линейного тензора приращений деформаций и нелинейного тензора приращений деформаций.

При учете (6) и (7) линейные части тензора приращений деформаций можно представить выражениями

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{11}^l = & w^1_{,x} c_1 + w^2_{,x} c_2 + w^3_{,x} c_3 + w^1 (c_1 m_{11} + c_2 m_{12} + c_3 m_{13}) + \\ & + w^2 (c_1 m_{21} + c_2 m_{22} + c_3 m_{23}) + w^3 (c_1 m_{31} + c_2 m_{32} + c_3 m_{33}); \\ 2\Delta\varepsilon_{23}^l = & w^1_{,\zeta} c_4 + w^2_{,\zeta} c_5 + w^3_{,\zeta} c_6 + w^1_{,0} c_7 + w^2_{,0} c_8 + w^3_{,0} c_9 + \\ & + w^1 (c_4 l_{11} + c_5 l_{12} + c_6 l_{13} + c_7 n_{11} + c_8 n_{12} + c_9 n_{13}) + \\ & + w^2 (c_4 l_{21} + c_5 l_{22} + c_6 l_{23} + c_7 n_{21} + c_8 n_{22} + c_9 n_{23}) + \\ & + w^3 (c_4 l_{31} + c_5 l_{32} + c_6 l_{33} + c_7 n_{31} + c_8 n_{32} + c_9 n_{33}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } c_1 = g_{11}^0 (1 + f_1^1) + f_1^2 g_{12}^0 + f_1^3 g_{13}^0;$$

$$c_9 = g_{13}^0 f_1^3 + f_3^2 g_{23}^0 + g_{33}^0 (1 + f_3^3).$$

Компоненты линейного тензора приращений деформаций можно определить матричной зависимостью

$$\left\{ \Delta\varepsilon_{mn}^l \right\}_{6 \times 1} = [L] \left\{ w \right\}_{3 \times 1}, \quad (14)$$

где  $\left\{ \Delta\varepsilon_{mn}^l \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \Delta\varepsilon_{11}^l \quad \Delta\varepsilon_{22}^l \quad \Delta\varepsilon_{33}^l \quad 2\Delta\varepsilon_{12}^l \quad 2\Delta\varepsilon_{13}^l \quad 2\Delta\varepsilon_{23}^l \right\}$ ;  $\left\{ w \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ w^1 \quad w^2 \quad w^3 \right\}$ ;  $[L]$  – матрица операторов соотношений (13).

**Зависимости напряжений от деформации**

Полные напряжения и их приращения в актуальном базисе точки  $M^s$  определяются соотношениями [3; 12]

$$\sigma^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{im} g^{in} \varepsilon_{mn}; \quad \Delta\sigma^{ij} = \lambda I_1(\Delta\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{im} g^{in} \Delta\varepsilon_{mn}^n, \quad (15)$$

где  $\sigma^{ij}$ ;  $\Delta\sigma^{ij}$  – контравариантные компоненты тензоров напряжений и их приращений;  $\varepsilon_{mn}$ ,  $\Delta\varepsilon_{mn}^n$  – ковариантные компоненты тензоров деформаций и их линейных приращений;  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе;  $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{mn} \bar{g}^{mn}$ ,  $I_1(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{mn}^n \bar{g}^{mn}$  – первые инварианты тензоров деформаций и их линейных приращений.

Соотношения (15) представляются в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}; \quad \{\Delta\sigma\} = [C]\{\Delta\varepsilon^n\}, \quad (16)$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}\}$ ;  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{13} 2\varepsilon_{23}\}$ ;  $\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma^{11} \Delta\sigma^{22} \Delta\sigma^{33} \Delta\sigma^{12} \Delta\sigma^{13} \Delta\sigma^{23}\}$ .

**Матрица жесткости конечного элемента в форме шестигранника**

Узловые координаты шестигранного конечного элемента принимаются в виде матриц-строк:

$$\left\{ \lambda_y \right\}_{1 \times 8}^T = \left\{ \lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h \right\}, \quad (17)$$

где  $\lambda - x, \theta, \zeta$  – координаты узлов конечного элемента в глобальной системе координат;  $i, j, \dots, h$  – узловые точки шестигранника.

Для выполнения численного интегрирования по объему шестигранного конечного элемента он отображается на куб, с локальными координатами, изменяющимися в пределах  $-1 \leq a, b, c \leq 1$  [12]. Координаты внутренней точки шестигранного дискретного элемента определяются через узловые значения на основе трилинейных функций в системе координат куба:

$$\lambda = \left\{ \varphi(a, b, c) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \lambda_y \right\}_{8 \times 1}. \quad (18)$$

Прямые  $(x_{,a}, x_{,b}, x_{,c}, \theta_{,a}, \theta_{,b}, \theta_{,c}, \zeta_{,a}, \zeta_{,b}, \zeta_{,c})$  и обратные  $(a_{,x}, a_{,\theta}, a_{,\zeta}, b_{,x}, b_{,\theta}, b_{,\zeta}, c_{,x}, c_{,\theta}, c_{,\zeta})$  производные координат определяются дифференцированием (18).

*Скалярная аппроксимация перемещений.* Принятые узловые неизвестные шестигранника в локальной и глобальной системах координат записываются матрицами-строками:

$$\left\{ w_y^{tn} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ w^{ti} \dots w^{th}; w_{,a}^{ti} \dots w_{,b}^{ti} \dots w_{,c}^{ti} \dots w_{,c}^{th} \right\}; \quad \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ w^{ti} \dots w^{th}; w_{,x}^{ti} \dots w_{,\theta}^{ti} \dots w_{,\zeta}^{ti} \dots w_{,\zeta}^{th} \right\}; \quad t = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Матрицы-столбцы (19) связаны между собой матричной зависимостью

$$\left\{ w_y^{tn} \right\}_{32 \times 1} = [T] \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1}, \quad (20)$$

где матрица  $[T]$  содержит производные глобальных координат  $x^\omega, \theta^\omega, \zeta^\omega$  узловых точек в локальной системе  $a, b, c$  ( $\omega = i, j, k, l, m, n, p, h$ ).

Обычно в МКЭ компоненты вектора  $\bar{w}$  аппроксимируются выражениями

$$w^t = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ w_y^{tn} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T [T]_{32 \times 32} \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1}; \quad t = 1, 2, 3, \quad (21)$$

где  $\left\{ \Psi \right\}^T$  – аппроксимирующая матрица с элементами в виде полиномов Эрмита третьей степени;

$$\gamma_\mu = \Psi_\mu;$$

$$\gamma_{8+\mu} = \Psi_{8+\mu} x_{,a}^\omega + \Psi_{16+\mu} x_{,b}^\omega + \Psi_{24+\mu} x_{,c}^\omega;$$

$$\gamma_{16+\mu} = \Psi_{8+\mu} \theta_{,a}^\omega + \Psi_{16+\mu} \theta_{,b}^\omega + \Psi_{24+\mu} \theta_{,c}^\omega;$$

$$\gamma_{24+\mu} = \Psi_{8+\mu} \zeta_{,a}^\omega + \Psi_{16+\mu} \zeta_{,b}^\omega + \Psi_{24+\mu} \zeta_{,c}^\omega;$$

$$\omega = i, j, k, l, m, n, p, h;$$

$$\mu = 1, 2, \dots, 8. \quad (22)$$

После дифференцирования (21) находятся производные компонент вектора перемещения по глобальным координатам  $x, \theta, \zeta$

$$w_{,m}^t = \left\{ \Psi_{,m} \right\}_{1 \times 32}^T [T]_{32 \times 32} \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \gamma_{,m} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1}. \quad (23)$$

В аппроксимирующих выражениях (21) и (23) отсутствуют параметры используемой для расчета криволинейной системы координат, поэтому каждая определяется через узловые значения только этой же компоненты.

Указанные недостатки аппроксимирующих выражений (21) и (23) приводят в МКЭ к отсутствию возможности учета элемента как твердого тела.

С учетом (21) и (23) соотношения (14) для приращений деформаций представляются в матричном виде

$$\left\{ \Delta \varepsilon^n \right\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \left\{ w \right\}_{3 \times 6} = [L]_{6 \times 3} [A]_{3 \times 96} \left\{ w_y^\Gamma \right\}_{96 \times 1} = [B_1]_{6 \times 96} \left\{ w_y^\Gamma \right\}_{96 \times 1}, \quad (24)$$

где  $\left\{ w_y^\Gamma \right\}^T = \left\{ \left\{ w_y^1 \right\}^T \left\{ w_y^2 \right\}^T \left\{ w_y^3 \right\}^T \right\}$  – строка узловых неизвестных объемного конечного элемента;

$$[A]_{3 \times 96} = \begin{bmatrix} \left\{ \gamma \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T \\ \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ \gamma \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T \\ \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ \gamma \right\}^T \end{bmatrix}_{1 \times 32}$$

*Векторная аппроксимация перемещений.* При выполнении расчетов в криволинейных системах координат для получения аппроксимирующих выражений искомых величин вводят в рассмотрение векторные узловые неизвестные конечного элемента в локальной и глобальной системах координат выражениями

$$\left\{ \vec{w}_y^{\Pi} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ \vec{w}^j \dots \vec{w}^h : \vec{w}_{,a}^i \dots \vec{w}_{,b}^j \dots \vec{w}_{,c}^k \dots \vec{w}_{,c}^h \right\}; \quad \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ \vec{w}^j \dots \vec{w}^h : \vec{w}_{,x}^i \dots \vec{w}_{,\theta}^j \dots \vec{w}_{,\zeta}^k \dots \vec{w}_{,\zeta}^h \right\}. \quad (25)$$

Между матрицами-столбцами (25) выполняется соотношение

$$\left\{ \vec{w}_y^{\Pi} \right\}_{32 \times 1} = [T] \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1}. \quad (26)$$

Традиционная теория аппроксимаций позволяет определить вектор перемещения внутренней точки конечного элемента через узловые векторы (25) выражением

$$\vec{w} = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ \vec{w}_y^{\Pi} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T [T] \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1}. \quad (27)$$

Дифференцированием (27) по криволинейным координатам  $x, \theta, \zeta$  определяются производные векторов перемещений:

$$\vec{w}_{,m} = \left\{ \gamma_{,m} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1}; \quad m = x, \theta, \zeta. \quad (28)$$

На основании (5), (6) столбец узловых неизвестных  $\left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}$  можно представить матричным выражением

$$\left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = [\vec{G}] \left\{ \alpha_y \right\}_{96 \times 1} = [\vec{G}] [N] \left\{ w_y^{\Gamma} \right\}_{96 \times 1}, \quad (29)$$

где  $\left\{ \alpha_y \right\}_{96 \times 1}^T = \left\{ w^{1i} w^{2i} w^{3i} \dots w^{1h} w^{2h} w^{3h} : \alpha_1^{1i} \alpha_1^{2i} \alpha_1^{3i} \dots \alpha_2^{1i} \alpha_2^{2i} \alpha_2^{3i} \dots \alpha_3^{1i} \alpha_3^{2i} \alpha_3^{3i} \dots \alpha_3^{1h} \alpha_3^{2h} \alpha_3^{3h} \right\}; \quad (30)$

$[\vec{G}]_{32 \times 96}$  – векторы базисных  $\left\{ \vec{g}_1^{0\omega} \vec{g}_2^{0\omega} \vec{g}_3^{0\omega} \right\}$  узловых точек ( $\omega = 1, 2, \dots, 8$ ).

При координатном преобразовании выражения (29) базисные векторы узловых точек конечного элемента в матрице  $[\vec{G}]$  должны быть выражены через базисные векторы внутренней точки конечного элемента соотношением

$$\left\{ \vec{g}_0^{\omega} \right\} = [s^{\omega}] \left\{ \vec{i} \right\} = [s^{\omega}] [S]^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\} = [z^{\omega}] \left\{ \vec{g}^0 \right\}; \quad \omega = i, j, k, l, m, n, p, h. \quad (31)$$

Используя (31) для замены элементов матрицы  $[\vec{G}]$  в (29) и подставляя (29) в (27) и (28), можно сформировать матричные выражения

$$\bar{w} = \{\bar{g}^0\}^T \left[ \gamma_1 \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \dots \gamma_8 \begin{bmatrix} z^h \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \dots \gamma_9 \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \dots \gamma_{17} \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \dots \gamma_{25} \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \dots \gamma_{32} \begin{bmatrix} z^h \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} N \\ 96 \times 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}^0 \\ 1 \times 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H \\ 3 \times 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{w}_{,m} = \begin{bmatrix} \bar{g}^0 \\ 1 \times 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_{,m} \\ 3 \times 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Приравнявая правые части (5), (6) и (32), можно получить аппроксимирующие выражения

$$w^i = \begin{bmatrix} h^i \\ 1 \times 96 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}; \quad \alpha_n^i = \begin{bmatrix} b_n^i \\ 1 \times 96 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}; \quad (i = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3), \quad (33)$$

где матрицы  $\{h^i\}^T$  и  $\{b_n^i\}^T$  являются строками матриц  $[H]$  и  $[H_{,m}]$  соответственно.

Компонентами матрицы  $[z^\omega]^T$  в аппроксимациях (33) учитываются параметры используемой в расчете криволинейной системы координат. Отдельная компонента вектора перемещения зависит от всех компонент векторов перемещений узловых точек их производных, что более адекватно соответствует геометрическому смыслу в криволинейной системе координат.

С учетом (33) компоненты линейного тензора приращений деформаций запишутся матричным выражением

$$\{\Delta \varepsilon^n\} = [L] \{w\} = [L] [H] \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} = [B_2] \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

*Матрица жесткости конечного элемента на шаге нагружения.* Используется функционал, основанный на равенстве работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения.

$$\Pi = \int_V \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \varepsilon^i\} \partial V + \int_V \{\sigma\} \{\Delta \varepsilon^n\} \partial V - \int_s \{w\}^T \{\Delta q\} ds - \int_s \{w\}^T \{q\} ds + \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta \varepsilon^n\} \partial V, \quad (35)$$

где  $q$  и  $\Delta q$  – суммарная и шаговая нагрузка на поверхности  $s$  элемента;  $V$  – объем элемента.

После подстановки аппроксимирующих выражений и минимизации функционала по узловым неизвестным  $\{w_y^\Gamma\}^T$  получается выражение

$$\left\{ \begin{bmatrix} [K] + [K^n] \\ 96 \times 96 \quad 96 \times 96 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости элемента;  $[K^n]$  – матрица за счет нелинейной части приращений деформаций;  $\{F_y\}$  – вектор узловых нагрузок на шаге нагружения;  $\{R\}$  – невязка на шаге нагружения.

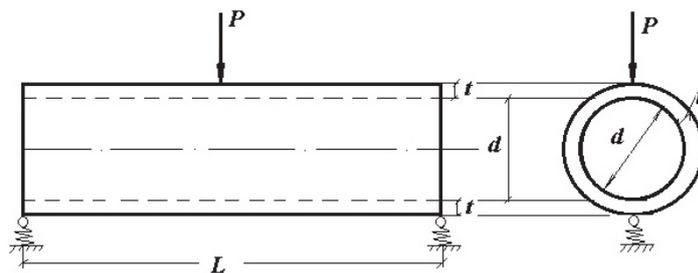
### Результаты и обсуждение

Соотношениями (36) представляются два варианта матрицы жесткости шестигранного конечного элемента в криволинейной системе координат. Первый вариант основан на аппроксимации перемещений, корректной только в декартовой системе координат, когда каждая искомая величина аппроксимируется через узловые значения этой же величины.

Второй вариант основан на математической модели аппроксимации векторных величин, в которой после координатного преобразования получаются аппроксимирующие выражения искомых величин, включающие параметры используемой криволинейной системы координат.

*Пример расчета 1.* Определено напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки диаметром  $d$  и длиной  $L$ , находящейся под действием сосредоточенной силы  $P$  (рис. 1).

Геометрические параметры оболочки приняты следующими:  $L = 0,8$  м;  $d = 0,504$  м;  $t = 0,0254$  м;  $E = 6,9 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu = 0,28$ ;  $P = 6,9$  Н.



**Рис. 1.** Цилиндрическая оболочка на пружинных опорах  
**Figure 1.** Cylindrical shell on spring supports

В качестве опорных устройств в расчете приняты пружины переменной жесткости. В первом варианте расчета считалось, что пружины абсолютно жесткие. Во втором варианте предполагалось, что пружины позволяют смещение всей конструкции на величину  $\Delta$ .

Расчеты выполнялись с использованием разработанного шестигранного конечного элемента на основе двух вариантов аппроксимации искомых величин. В первом варианте использовалась традиционная аппроксимация компонент вектора перемещения (21) и их производных (23).

Во втором варианте расчета применялась разработанная авторами аппроксимация перемещений и их производных (33).

Результаты вариативных расчетов при абсолютной жесткости пружинных опор представлены в таблице в зависимости от густоты сетки дискретизации четвертой части оболочки.

**Результаты вариативных расчетов при абсолютной жесткости пружинных опор**

Густота сетки	Прогиб $w$ , м	
	Вариант расчета 1	Вариант расчета 2
3×3×1	$2,15 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
4×4×1	$2,18 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$
5×5×1	$2,19 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$
6×6×1	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$

**Results of variable calculations with absolute stiffness of spring supports**

Mesh density	Deflection $w$ , m	
	Calculation option I	Calculation option II
3×3×1	$2.15 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$
4×4×1	$2.18 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
5×5×1	$2.19 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
6×6×1	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$

Табличные результаты свидетельствуют, что значения перемещения точки приложения силы  $P$  совпадают в случае использования каждого из вариантов аппроксимации искомых величин шестигранника. На рис. 2 представлен график изменения окружных нормальных напряжений внутренних волокон точки  $P$  в зависимости от жесткости пружинных опор, позволяющих смещение конструкции на величину  $\Delta$ .

Как видно из графика, смещение цилиндрической оболочки на 0,1 м как твердого тела не приводит к изменению окружных нормальных напряжений (линия II).

Использование аппроксимации искомых величин МКЭ в варианте I приводит к значительным изменениям окружного нормального напряжения (линия I).

Значения нормальных напряжений по варианту II остались неизменными и при  $\Delta = 1$  м, что свидетельствует о решении проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела на основе разработанного варианта II аппроксимации компонент вектора перемещения через узловые значения компонент.

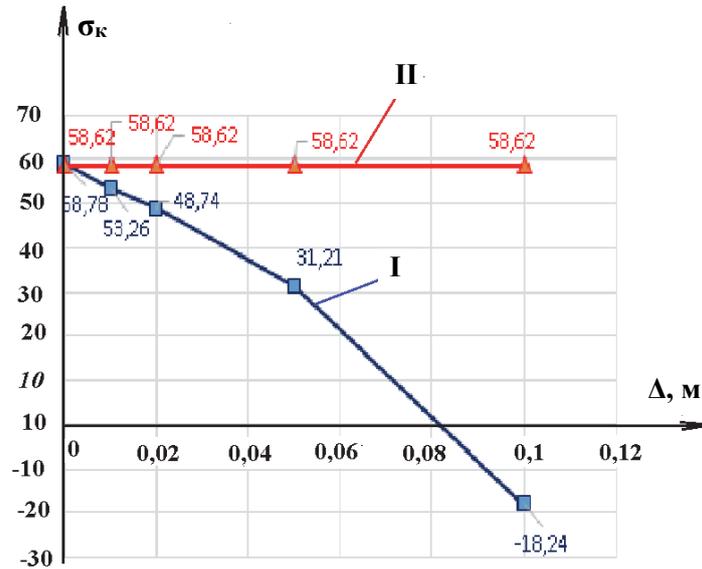


Рис. 2. График изменения окружного нормального напряжения  
Figure 2. Graph of changes in the circumferential normal stress

*Пример расчета 2.* Рассматривалось деформированное состояние цилиндрической панели, защемленной по концам [22] (рис. 3).

В качестве исходных данных приняты следующие величины: толщина поперечного сечения арки –  $t = 0,00476$  м; ширина поперечного сечения арки –  $b = 0,00254$  м; внутренний радиус  $R = 3,381$  м; сектор круговой арки  $\alpha = 0,256$  рад.; модуль упругости материала арки  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ . Нагружение цилиндрической панели осуществлялась сосредоточенной силой  $P$ , прикладываемой в ее вершине.

На графике (рис. 4) приведены значения перемещений точки приложения груза в зависимости от величины силы, где использованы обозначения:  $P$ , кН – значение сосредоточенной силы;  $w_1$ , м – перемещения точки, найденные при использовании скалярной аппроксимации перемещений в дискретном элементе;  $w_2$ , м – численные значения перемещений, найденные на основе аппроксимации перемещений в векторной формулировке;  $w_3$ , м – перемещения, приведенные в [22] на основе итерационной процедуры.

Анализ приведенных на графике численных результатов показывает, что значения перемещений  $w_1$ , полученные на основе использования скалярной аппроксимации, оказались отличающимися от двух других в пределах 8 % при нагрузках меньших 0,1 кН. При большем значении нагрузки в случае скалярного варианта аппроксимации перемещений происходит сбой вычислительного процесса.

Результаты перемещений, полученные на основе аппроксимации искомых величин в векторной формулировке, находятся в хорошем соответствии с результатами [22], что свидетельствует о корректности разработанного алгоритма векторной аппроксимации перемещений.

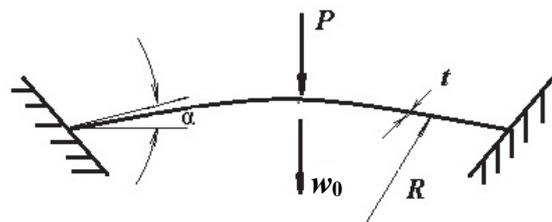


Рис. 3. Расчетная схема цилиндрической панели, защемленной на концах  
Figure 3. Design diagram of a cylindrical panel pinched at the ends

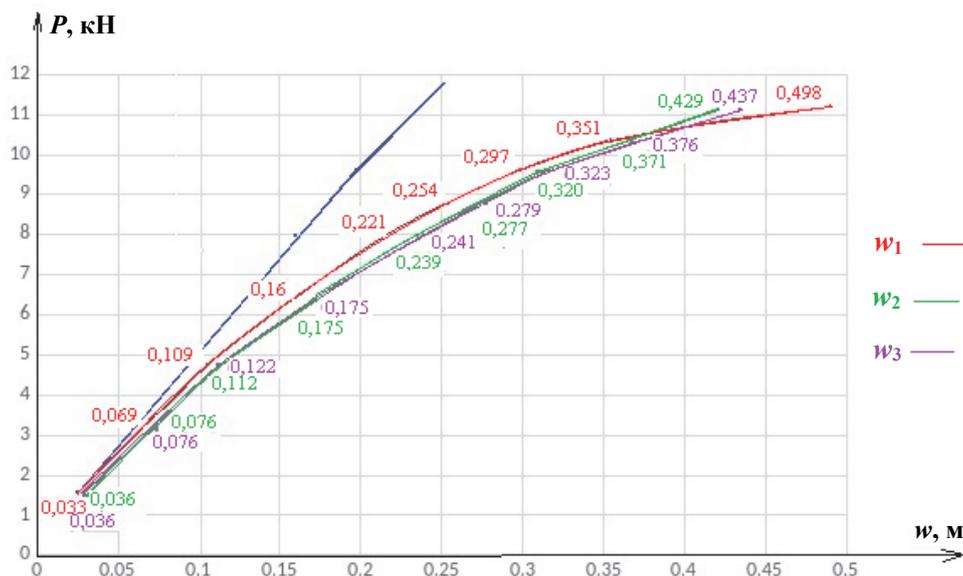


Рис. 4. График значений перемещений  $w$  в точки приложения сосредоточенной силы  $P$   
 Figure 4. Graph of displacement values  $w$  of the point of application of concentrated force  $P$

### Заключение

Векторная аппроксимация искомых величин МКЭ при расчетах в криволинейных системах координат является более корректной, так как позволяет учитывать в аппроксимирующих выражениях параметры используемой криволинейной системы координат. При использовании скалярного варианта аппроксимации искомых величин МКЭ тип криволинейной системы координат во внимание не принимается, что приводит к некорректности аппроксимирующих соотношений.

### Список литературы

1. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. М.: Инфра-Инженерия, 2014. 480 с.
2. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 608–616. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 574 с.
4. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // The Open Construction and Building Technology Journal. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.
5. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Sugiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 10. No. 5. Article 051012. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>
6. Ким А.Ю., Полников С.В. Сравнение экспериментального и численного исследования большепролетного пневматического линзообразного сооружения // Научное обозрение. 2016. № 15. С. 36–41.
7. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 1. С. 36–42.
8. Козлов В.А. Напряженно-деформированное состояние многосвязных призматических конструкций, закрепленных по скошенному сечению // Научный журнал строительства и архитектуры. 2015. № 4 (40). С. 11–17.
9. Киселев А.П., Киселева Р.З., Николаев А.П. Учет смещения как жесткого целого осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 59–64
10. Гуреева Н.А., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Сравнительный анализ конечно-элементных формулировок при плоском нагружении упругого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 139–145. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145>
11. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р., Андреев А.С., Клочков М.Ю. Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 31–37. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37>

12. Gureeva N., Kiselev A., Kiseleva R., Nikolaev A. Vector approximation in the roller shells nonlinear calculations on the fem basis // *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 974. Pp. 718–722.
13. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ицанов Т.Р., Андреев А.С. Векторная аппроксимация в МКЭ для оболочки вращения при учете сдвиговых деформаций // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2020. № 4. С. 35–43. <https://doi.org/10.31857/S0235711920040070>
14. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams // *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 578–579. Pp. 858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
15. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
16. Кантин Л. Смещение криволинейных конечных элементов как жесткого целого // *Ракетная техника и космонавтика*. 1970. Т. 8. С. 84–88.
17. Nguyen N., Waas A.M. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. No. 9 (67). Pp. 351–352. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>
18. Lei Z., Gillot F., Jezequel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.
19. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // *Computational Mechanics*. 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.
20. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 10. No. 5. Article 051018. <https://doi.org/10.1115/1.4030212>
21. Sartorato M., Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // *Composite Structures*. 2015. Vol. 127. Pp. 185–198. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.03.009>
22. Papenhausen J. Eine energiegrechte, incrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente // *Techn.-Wiss. Mitt. Inst. Konstr. Ingenieurlau Ruhr*. 1975. Vol. 13. Issue III. Pp. 1–133.
23. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шугабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

## References

1. Petrov V.V. *Nonlinear incremental structural mechanics*. Moscow: Infra-Engineering Publ.; 2014. (In Russ.)
2. Kositsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical analysis of cylindrical shell stability interacting with inhomogeneous soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):608–616. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
3. Sedov L.I. *Continuum mechanics*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
4. Krivoschapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. Geometry, static, vibration and buckling analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2016;10:3–28.
5. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Sugiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015;10(5):051012. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>
6. Kim A.Yu., Polnikov S.V. Comparing the experimental and computational investigations of longspan air lentiform structure. *Scientific Review*. 2016;(15):36–41. (In Russ.)
7. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. A method of determination of stress-strain state of 3D structures of complex form. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(1):36–42. (In Russ.)
8. Kozlov V.A. Stress and strain of multiply connected prismatic structures, mounted on a skewed cross-section. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2015;(4):11–17. (In Russ.)
9. Kiselev A.P., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P. Accounting for displacement as a rigid whole of an axisymmetrically loaded shell of rotation based on FEM. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):59–64. (In Russ.)
10. Gureeva N.A., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Comparative analysis of finite element formulations under plane loading of an elastic body. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):139–145. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145>
11. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ishchanov T.R., Andreev A.S., Klochkov M.Yu. Consideration of geometric nonlinearity in finite element strength calculations of thin-walled shell-type structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):31–37. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37>
12. Gureeva N., Kiselev A., Kiseleva R., Nikolaev A. Vector approximation in the roller shells nonlinear calculations on the fem basis. *Materials Science Forum*. 2019;974:718–722.

13. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ishchanov T.R., Andreev A.S. Vector approximation in the FEM for the shell of rotation taking into account shear deformations. *Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability*. 2020;(4):35–43. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0235711920040070>
14. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;578–579:858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
15. Gallager R. *Method of finite elements. Basics*. Moscow: Mir Publ.; 1984. (In Russ.)
16. Kantin L. Displacement of curvilinear finite elements as a rigid whole. *Rocket Technology and Cosmonautics*. 1970;8:84–88. (In Russ.)
17. Nguyen N., Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016;(9):351–352. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>
18. Lei Z., Gillot F., Jezequel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015;54:105–119.
19. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Computational Mechanics*. 2015;56(1):87–95.
20. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015;10(5):051018. <https://doi.org/10.1115/1.4030212>
21. Sartorato M., Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Composite Structures*. 2015;127:185–198. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.03.009>
22. Papenhausen J. Eine energiegrechte, inkrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente. *Techn.-Wiss. Mitt. Inst. Konstr. Ingenieurlehre Ruhr*. 1975;13(III):1–133.
23. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)