2022. 18(2). 104–110

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-2-104-110
УДК 539/3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Вынужденные колебания разномодульной балки, находящейся на вязком эластичном основании

Н.С. Рзаев

Бакинский инженерный университет, Баку, Республика Азербайджан
nrzayev@beu.edu.az

История статьи
Поступила в редакцию: 12 февраля 2022 г.
Доработана: 12 апреля 2022 г.
Принята к публикации: 20 апреля 2022 г.

Для цитирования
Рзаев Н.С. Вынужденные колебания разномодульной балки, находящейся на вязком эластичном основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 2. С. 104–110. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-2-104-110

Аннотация. Цели исследования – получение и решение уравнений вынужденных принудительных колебаний балок, изготовленных из разномодульных материалов и находящихся на вязком эластичном основании. Предполагается, что балка, оказывающая разное сопротивление растяжению и сжатию, непрерывная и неоднородная по толщине и длине, совершает вынужденные принудительные колебания под действием силы, изменяющейся по поперечно-гармоническому закону. При решении задачи учитывается сопротивление внешней среды. Поскольку уравнение движения является сложным дифференциальным уравнением с частными производными относительно изгиба, оно решается приближенными аналитическими методами. На первом этапе используется разложение на переменные, а на втором – метод ортогонализации Бубнова – Галеркина. Получены уравнения зависимости между круговой частотой и параметрами, характеризующими сопротивление внешней среды и неоднородность. Проведены вычисления для конкретных значений характеристических функций, приведены результаты в виде таблиц и кривых соответствующих зависимостей. Из уравнений видно, что при решении задач колебательного движения без учета сопротивления внешней среды и разномодульности допускаются серьезные ошибки. Вдобавок по мере увеличения значений параметров, определяющих неоднородность плотности, существенно меняется значение разности частот. Результаты могут быть использованы в отчетах по прочности, устойчивости и частотно-амплитудным характеристикам разномодульных балок, досок и цилиндрических покрытий с учетом сопротивления внешней среды.

Ключевые слова: растяжение, сжатие, изгиб, кручение, эластичность, круговая частота, колебание

Forced oscillations of a multimodular beam on a viscous elastic base

Natig S. Rzayev

Baku Engineering University, Baku, Republic of Azerbaijan
nrzayev@beu.edu.az

Article history
Received: February 12, 2022
Revised: April 12, 2022
Accepted: April 20, 2022

Abstract. The aims of the research are to obtain and to solve equations of forced oscillations of beams made of different modular materials and located on a viscous elastic base. It is assumed that the beam, which has different resistance to expansion and compression and which is continuous and heterogeneous by thickness and length,

Рзаев Натиг Самандар, доктор философии в области механики, доцент кафедры инженерной механики, Бакинский инженерный университет, Азербайджанская Республика, AZ0102, Баку, ул. Хасана Алиева, д. 120; ORCID: 0000-0002-1159-9296, Scopus Author ID: 1651513404465; nrzayev@beu.edu.az
Natig S. Rzayev, Doctor of Philosophy in Mechanics (PhD), Associate Professor of the Department of Engineering Mechanics, Baku Engineering University, 120 Hasan Aliyev St, Baku, AZ0102, Azerbaijan Republic; ORCID: 0000-0002-1159-9296, Scopus Author ID: 1651513404465; nrzayev@beu.edu.az

performs forced oscillations under the action of a force that varies according to the cross-harmonic law. When solving the problem, the resistance of the environment is taken into account. Since the equation of motion is a complicated differential equation with partial derivatives with respect to bending, it is solved by approximate analytical methods. At the first stage, decomposition into variables is used, and at the second stage, the Bubnov – Galerkin orthogonalization method is used. Equations of dependence between the circular frequency and parameters characterizing the resistance of the external environment and heterogeneity are obtained. Calculations were carried out for the specific values of characteristic functions. Results are represented in the form of tables and curves of the corresponding dependencies. It is clear from the obtained equations that serious errors are made in solving problems of oscillating motion without taking into account the resistance of the environment and different modularity. In addition to this, as the values of parameters that determine the heterogeneity of the density increase, the value of the frequency difference changes significantly. The results can be used in reports on solidity, stability and gain-frequency characteristic of different modular beams, boards and cylindrical coatings, taking into account the resistance of the environment.

Keywords: tension, compression, bending, torsion, elastic, frequently, vibration

For citation

Rzayev N.S. Forced oscillations of a multimodular beam on a viscous elastic base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2022;18(2):104–110. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-2-104-110

Введение

В современное время балки, доски и покрытия из различных материалов находят широкое применение в возведении строительных комплексов, машиностроении, строительстве магистральных железнодорожных путей и многих других областях. В процессе эксплуатации они подвергаются воздействию различных внешних сил. Последние теоретические и экспериментальные исследования показывают, что физико-механические свойства многих материалов не подчиняются законам теорий классической упругости и пластичности, а связь между напряжением и деформацией зависит от вида нагрузки. Примерами являются некоторые виды чугуна, полимеры, композиты и ряд других материалов [1–8].

Одной из важнейших задач, стоящих сегодня перед исследователями-инженерами при вычислении прочности, устойчивости и частотно-амплитудных характеристик конструкций, является правильная оценка свойств материалов используемых конструктивных элементов и учет воздействия контактирующей окружающей среды, применение эффективных и проверенных математических методов решения.

С учетом вышеизложенного решение задачи и анализ полученных результатов создают ряд трудностей. А если их не учитывать, то могут быть допущены серьезные ошибки. С этой целью решается задача о вынужденных колебаниях балки, находящейся на вязком эластичном основании и оказывающей разное сопротивление растяжению и сжатию [9–12].

Постановка и решение задачи

Предполагается, что балка, оказывающая разное сопротивление растяжению и сжатию, совершает вынужденные колебания под действием силы, изменяющейся по поперечно-гармоническому закону. Поперечное сечение балки имеет две оси симметрии [13–15].

Сила поперечного воздействия подчиняется закону

$$P(x,t) = P_0(x)\sin\omega t. \tag{1}$$

А реакция вязкого упругого основания подчиняется закону

$$q(x,t) = C_1 W + C_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где $P_0(x)$ – непрерывная функция; ω – частота; t – время; C_1, C_2 – характеристики основания; W – прогиб.

Нормальное напряжение по поперечному сечению балки распределяется по следующему закону:

$$\sigma = E^+(e - z\wp);\;\; z \in S_1;$$

$$\sigma = E^-(e - z\wp);\;\; z \in S_2, \tag{3}$$

где E^+, E^- – модули упругости при растяжении и сжатии; e, $\wp$ – деформация и кривизна центральной линии соответственно.

Деформация, кривизна и граница z_0 нейтральной линии связаны выражением

$$e = z_0 \wp. \tag{4}$$

Уравнение равновесия (условие отсутствия продольной силы) записывается следующим образом:

$$\iint\limits_{S} \sigma ds = \iint\limits_{S_1} \left(e - z\wp\right) ds + \alpha \iint\limits_{S_2} \left(e - z\wp\right) ds = 0. \tag{5}$$

Отсюда получаем

$$z_0 = \frac{\iint\limits_{S_1} zds + \alpha \iint\limits_{S_2} zds}{\iint\limits_{S_1} ds + \alpha \iint\limits_{S_2} ds} \wp. \tag{6}$$

Изгибающий момент M рассчитывается следующим образом:

$$M = E^{+} \iint\limits_{S} \sigma ds = \iint\limits_{S_1} \left(e - z\wp\right) zds + \iint\limits_{S_2} \left(e - z\wp\right) zds. \tag{7}$$

Учитывая (5) в (7), выражение изгибающего момента пишется как

$$\frac{M}{E^{+}\wp} = \frac{\left(\iint\limits_{S_1} zds + \alpha \iint\limits_{S_2} zds\right)^2}{\iint\limits_{S_1} ds + \alpha \iint\limits_{S_2} ds} - \left[\iint\limits_{S_1} z^2 ds + \alpha \iint\limits_{S_2} z^2 ds\right]. \tag{8}$$

Примем следующие обозначения:

$$K = \frac{1}{J_\rho} \frac{\left(\iint\limits_{S_1} zds + \alpha \iint\limits_{S_2} zds\right)^2}{\iint\limits_{S_1} ds + \alpha \iint\limits_{S_2} ds} - \left[\iint\limits_{S_1} z^2 ds + \alpha \iint\limits_{S_2} z^2 ds\right], \tag{9}$$

где J_ρ – момент инерции поперечного сечения одномодульной балки.

Если обозначить через M_0 значение изгибающего момента для одномодульной балки, то значение изгибающего момента для однородной по высоте балки можно выразить следующим образом:

$$M = M_0 K\left(S_1, S_2\right). \tag{10}$$

Если балка неоднородна по длине, то выражение (10) запишется так

$$M = M_0 K\left(S_1, S_2\right) f\left(x\right). \tag{11}$$

Предполагается, что функция $f(x)$ является непрерывной функцией, включая производную второго порядка ($M = M_0K(S_1, S_2)$; $E^{+} = E_0^{+} f(x)$; $\rho = \rho_0\psi(x)$).

Уравнение движения записывается следующим образом:

$$M_0 K\left(S_1, S_2\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f\left(x\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] + C_1 W + C_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \rho_0 \psi\left(x\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P\left(x\right) e^{i\omega t} \tag{12}$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]+\bar{C}_1 W+\bar{C}_2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\bar{\rho}_0\psi(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=P(x)e^{i\omega t}. \tag{13}$$

Поскольку уравнение (13) сложное, его точное решение можно получить для однородной балки. В этом случае уравнение (13) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\bar{C}_1 W+\bar{C}_2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\bar{\rho}_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=P(x)e^{i\omega t}. \tag{14}$$

Если, используя метод разложения на переменные, произвести замену $W=V(x)e^{i\omega t}$, то уравнение (14) упрощается:

$$\frac{d^4 V}{dx^4}-n^4 V=P(x). \tag{15}$$

Здесь $n^4=\left[\bar{C}_1-\omega^2\left(\bar{C}_2+\bar{\rho}_0\right)\right]$.

Задавая закон распределения $P(x)$, поищем решение (15) в виде

$$V=V_0+V_x. \tag{16}$$

Это нетрудно решить: V_0 – общее, а V_x – частное решение однородного уравнения.

Найдем решение уравнения (14), используя метод разложения на переменные и метод ортогонализации Бубнова – Галеркина. Поищем функцию сгиба в виде

$$W=V(x)e^{i\omega t} \tag{17}$$

и, если записать ее значение в уравнение движения, получим следующее уравнение ($P=P_0\sin\frac{\pi}{l}x$):

$$f(x)\frac{d^4 V}{dx^4}+2f'(x)\frac{d^3 V}{dx^2}+2f''(x)\frac{d^2 V}{dx^2}+\bar{C}_1 V-\omega^2\left(\bar{C}_2+\rho_0\psi(x)\right)V-P_0\sin\frac{\pi x}{l}=0. \tag{18}$$

В первом приближении, если записать условие ортогонализации для балки, концы которой закреплены в шарнирах ($V=\sin\pi\bar{x}$; $f(x)=1+\varepsilon\bar{x}$; $\psi(\bar{x})=1+\mu\bar{x}$):

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\varepsilon\bar{x}\right)\sin\pi\bar{x}-2\varepsilon l^{-1}\cos\pi\bar{x}+\bar{C}_1\sin\pi\bar{x}-\omega^2\left(\bar{C}_2+\rho_0\left(1+\mu\bar{x}\right)\right)V-P_0\sin\pi\bar{x}\right]=0. \tag{19}$$

Принимая во внимание

$$\int_0^1\sin^2\pi\bar{x}dx=\frac{1}{2};\qquad\int_0^1\bar{x}\sin^2\pi\bar{x}dx=\frac{1}{4};\qquad\int_0^1\sin 2\pi\bar{x}dx=0;$$

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1+0,5\varepsilon\right)+\bar{C}_1-\omega^2\left[\bar{C}_2+\rho_0\left(1+0,5\mu\right)\right]-\bar{P}_0=0. \tag{20}$$

Следовательно, можем писать

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1+0,5\varepsilon\right) + \bar{C}_2 - \bar{P}_0}{\bar{C}_2 + \rho_0 \left(1+0,5\mu\right)}. \tag{21}$$

При $\bar{P}_0 = 0$ получим решение свободных колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1+0,5\varepsilon\right) + \bar{C}_2}{\bar{C}_2 + \rho_0 \left(1+0,5\mu\right)}. \tag{22}$$

Запишем выражения (21) и (22) следующим образом:

$$\Delta = \omega_0^2 - \omega^2 = \frac{\bar{P}_0}{\bar{C}_2 + \rho_0 \left(1+0,5\mu\right)} \tag{23}$$

или

$$\Delta = \frac{\bar{P}_0 \rho_0^{-1}}{\bar{C}_2 \rho_0^{-1} + \left(1+0,5\mu\right)}. \tag{24}$$

Если балка находится на основании Винклера, то выражение (24) имеет следующий вид:

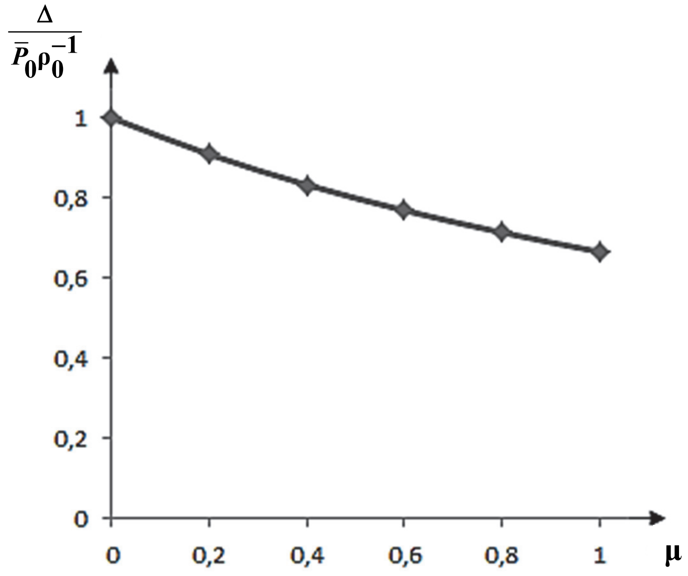
$$\Delta = \frac{\bar{P}_0 \rho_0^{-1}}{1+0,5\mu}; \qquad \frac{\Delta}{\bar{P}_0 \rho_0^{-1}} = \frac{1}{1+0,5\mu}. \tag{25}$$

Отчет представлен в таблице и на рисунке.

Вычисленные значения отношения $\frac{\Delta}{\bar{P}_0 \rho_0^{-1}}$ по параметру μ, характеризующему неоднородности

Calculated values of the ratio $\frac{\Delta}{\bar{P}_0 \rho_0^{-1}}$ according to the parameter μ characterizing the heterogeneity

μ	$\frac{\Delta}{\bar{P}_0 \rho_0^{-1}}$
0	1
0,2	0,909
0,4	0,833
0,6	0,769
0,8	0,714
1	0,666



Зависимость между разностью частот и параметром, характеризующим неоднородность
Dependence between the frequency difference and the parameter characterizing the heterogeneity

Заключение

Получены уравнения зависимости между круговой частотой и параметрами, характеризующими сопротивление внешней среды и неоднородность. Проведены вычисления для конкретных значений характеристических функций, приведены результаты в виде таблиц и кривых соответствующих зависимостей. Из полученных уравнений видно, что при решении задач колебательного движения без учета сопротивления внешней среды и разномодульности допускаются серьезные ошибки. Вдобавок по мере увеличения значений параметров, определяющих неоднородность плотности, существенно меняется значение разности частот.

Полученные результаты могут быть использованы в отчетах по прочности, устойчивости и частотно-амплитудным характеристикам разномодульных балок, досок и цилиндрических покрытий с учетом сопротивления внешней среды.

Список литературы

1. *Толоконников Л.А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инженерный журнал. МТТ. 1968. № 6. С. 108–110.

2. *Новацкий В.* Динамика сооружений. М.: Госстройиздат, 1963. 376 с.

3. *GadjievV.D., Rzayev N.S.* Lateral oscillations of a beam made of multi-modulus material lying on inhomogeneous visco-elastic foundation // Transaction of NAS of Azerbaijan. 2014. Vol. XXXIV. No. 1. Pp. 125–130.

4. *Gadjiev V.D., Rzayev N.S.* Oscilllations of a nonhomogeneous different modulus beam with a load moving on it situated on nonhomogeneous viscoelastic foundation // Transaction of NAS of Azerbaijan. 2013. Vol. XXXIII. No. 4. Pp. 133–138.

5. *Рзаев Н.С.* Свободное колебание неоднородного разномодульного стержня, лежащего на двухконстантов основани // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 38–43.

6. *Рзаев Н.С.* Об устойчивости плоской формы изгиба балок, изготовленных из материала разносопротивляющихся и сжатию // Elmi əsərlər. 2016. Cild 1. № 3. C. 172–176.

7. *Рзаев Н.С.* К устойчивости упругопластического стержня, лежащего на неоднородно упругом основании // Nəzəri və tətbiqi mexanika jurnalı. 2014. № 2. С. 132–137.

8. *Пастернак П.Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов поете. М.: Сройиздат, 1954. 89 с.

9. *Markin A.A., Sokolova M.Yu.* Constitutive relations of nonlinear thermoelasticity of anisotropic bodies // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2003. Vol. 44. Issue 1. Pp. 141–145. https://doi.org/10.1023/A:1021702418574

10. *Arbeloda-Monsalve L.G., Zapata-Medina D.G., Aristizabal-Ochoa J.D.* Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: dynamic-stiffness matrix and load vector // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 310. Pp. 1057–1079.

11. *Zhaohua F., Cook R.D.* Beam elements on two-parameter elastic foundations // Journal of Engineering Mechanics. 1983. Vol. 109. Pp. 1390–1402.

12. *Sofiyev A.H., Omurtag M.H., Schnack E.* The vibration and stability of orthotropic conical shells with non-homogeneous material properties under a hydrostatic pressure // Journal of Sound and Vibration. 2009. Vol. 319. Pp. 963–983.

13. *Гасымов Г.М., Рзаев Н.С.* Поперечное колебание стержня, лежащего на неоднородно вязкоупругом основании // Elmi əsərlər. 2013. Cild 1. № 3. С. 41–45.

14. *Гаджиев В.Д.* Собственное колебание ортотропной круговой пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании // Вестник современной науки. 2016. № 5. С. 20–24.

15. *Гасымов Г.М.* О свободном колебании непрерывно неоднородной прямоугольной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основанных конструкций и сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 14–19.

References

1. Tolokonnikov L.A. On the relationship between tensions and deformations in different modular isotropic medium. *Engineering Journal of Solid Mechanics*. 1968;(6):108–110. (In Russ.)

2. Novatsky V. *Dynamics of constructions*. Moscow; 1963. (In Russ.)

3. GadjievV.D., Rzayev N.S. Lateral oscillations of a beam made of multi-modulus material lying on inhomogeneous visco-elastic foundation. *Transaction of NAS of Azerbaijan*. 2014;XXXIV(1):125–130. (In Russ.)

4. Gadjiev V.D., Rzayev N.S. Oscilllations of a nonhomogeneous different modulus beam with a load moving on it situated on nonhomogeneous viscoelastic foundation. *Transaction of NAS of Azerbaijan*. 2013;XXXIII(4):133–138. (In Russ.)

5. Rzaev N.S. A free oscillation of an heterogeneous different modular rod lying on a base of two constants. *Building Mechanics of Engineering Structures and Constructions*. 2016;(6):38–43. (In Russ.)

6. Rzaev N.S. On the stability of the flat shape of the bending of beams made of materials with different resistance to compression. *Scientific Notes*. 2016;1(3):172–176. (In Russ.)

7. Rzaev N.S. On the stability of an elastic-plastic rod lying on a heterogeneous elastic base. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2014;(2):132–137. (In Russ.)

8. Pasternak P.L. *Fundamentals of a new method for calculating the foundations on elastic base by means of two coefficients of poete*. Moscow: Sroyizdat Publ.; 1954. (In Russ.)

9. Markin A.A., Sokolova M.Yu. Constitutive relations of nonlinear thermoelasticity of anisotropic bodies. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2003;44(1):141–145. https://doi.org/10.1023/A:1021702418574

10. Arbeloda-Monsalve L.G., Zapata-Medina D.G., Aristizabal-Ochoa J.D. Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: dynamic-stiffness matrix and load vector. *Journal of Sound and Vibration*. 2008;310: 1057–1079.

11. Zhaohua F., Cook R.D. Beam elements on two-parameter elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*. 1983;109:1390–1402.

12. Sofıyev A.H., Omurtag M.H., Schnack E. The vibration and stability of orthotropic conical shells with non-homogeneous material properties under a hydrostatic pressure. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;319:963–983.

13. Gasymov G.M., Rzaev N.S. Transverse oscillation of the rod lying on a heterogeneous viscous-elastic base. *Scientific Notes*. 2013;1(3):41–45. (In Russ.)

14. Gadjiev V.D. A natural oscillation of the orthotropic circular plate lying on a heterogeneous viscous-elastic base. *Bulletin of Modern Science*. 2016;(5):20–24. (In Russ.)

15. Gasymov G.M. On a free oscillation of a continuous heterogeneous rectangular plate lying on structures and constructions with a heterogeneous viscous elastic bases. *Building Mechanics of Engineering Structures and Constructions*. 2017;(5):14–19. (In Russ.)