

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМ ОБОЛОЧЕК GEOMETRICAL MODELING OF SHELL FORMS

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-1-64-72
УДК 624.074.4

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Поверхности конгруэнтных сечений маятникового типа на цилиндрах с образующими суперэллипсами

Л.А. Алборова , С.В. Страшнов 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация
✉ dikko@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 21 октября 2021 г.
Доработана: 13 января 2022 г.
Принята к публикации: 1 февраля 2022 г.

Для цитирования

Алборова Л.А., Страшнов С.В. Поверхности конгруэнтных сечений маятникового типа на цилиндрах с образующими суперэллипсами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 64–72.
<http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-64-72>

Аннотация. И.И. Котов в 1972 г. предложил выделить поверхности конгруэнтных сечений в отдельный класс и включить в него поверхности плоскопараллельного переноса, поверхности вращения, резные поверхности Монжа, циклические поверхности с образующей окружностью постоянного радиуса, ротативные, спироидальные и винтовые поверхности. Цель исследования – получение обобщенных параметрических уравнений поверхностей конгруэнтных сечений маятникового типа на прямых цилиндрах при плоскопараллельном переносе подвижных жестких суперэллипсов. Используются методы аналитической геометрии. Для визуализации поверхностей применяются компьютерные системы MathCad и AutoCad. Результаты заключаются в выводе параметрических уравнений изучаемых поверхностей в общем виде, удобном для использования методов компьютерного моделирования. Методика продемонстрирована на пяти примерах с конгруэнтными подвижными суперэллипсами. Отмечается возможность использования полученных форм поверхностей в параметрической архитектуре, архитектуре свободных форм и при формообразовании поверхностей некоторых технических изделий.

Ключевые слова: поверхность конгруэнтных сечений, суперэллипс, плоскопараллельный перенос кривых, астроида, задание поверхности

Surfaces of congruent sections of pendulum type on cylinders with generatrix superellipses

Lana A. Alborova , Stanislav V. Strashnov 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation
✉ dikko@yandex.ru

Article history

Received: November 12, 2021
Revised: January 21, 2022
Accepted: February 11, 2022

Abstract. In 1972, I.I. Kotov proposed to separate the surfaces of congruent sections into a separate class and to include the surfaces of plane-and-parallel translation, surfaces of revolution, carved surfaces of Monge, cyclic surfaces with a generatrix circle of constant radius, rotative, spiroidal, and helical surfaces in it.

Алборова Лана Анатольевна, магистрант, департамент архитектуры, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-7406-0805, eLIBRARY SPIN-код: 3700-2883; dikko@yandex.ru
Страшнов Станислав Викторович, кандидат технических наук, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин, факультет русского языка и общеобразовательных дисциплин, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-6401-2524, Scopus Author ID: 57208507988, eLIBRARY SPIN-код: 2874-2214; strashnov-sv@rudn.ru
Lana A. Alborova, master's student, Department of Architecture, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7406-0805, eLIBRARY SPIN-code: 3700-2883; dikko@yandex.ru
Stanislav V. Strashnov, PhD, Associate Professor of the Department of General Education Courses, Faculty of Russian Language and General Educational Disciplines, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-6401-2524, Scopus Author ID: 57208507988, eLIBRARY SPIN-code: 2874-2214; strashnov-sv@rudn.ru

© Алборова Л.А., Страшнов С.В., 2022

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation

Alborova L.A., Strashnov S.V. Surfaces of congruent sections of pendulum type on cylinders with generatrix superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-64-72>

The aim of the research is to obtain generalized parametric equations of surfaces of congruent sections of the pendulum type on right cylinders with plane-and-parallel translation of movable rigid superellipses. Analytical geometry methods are used. Computer systems MathCad and AutoCAD are applied to visualize surfaces. The results consist in the derivation of parametric equations of the studied surfaces in a general form convenient for the use of computer modeling methods. The technique is demonstrated on five examples with congruent mobile superellipses. The possibility of using obtained surface shapes in parametric architecture, free-form architecture, and in shaping of the surfaces of some technical products is noted.

Keywords: surfaces, congruent sections, superellipse, plane-parallel transfer, curves, astroid, surface assignment

Введение

В последнее время было опубликовано несколько работ [1–4], посвященных образованию поверхностей конгруэнтных сечений маятникового типа на произвольных цилиндрах с образующими плоскими кривыми в виде окружностей [1; 2], парабол [2; 3] и эллипсов [4]. *Поверхностью конгруэнтных сечений* называется поверхность, несущая на себе непрерывное однопараметрическое семейство плоских линий. Получается такая поверхность в результате перемещения какой-либо плоской линии (образующей). Простейшими видами поверхностей конгруэнтных сечений являются *поверхности плоскопараллельного переноса* относительно плоскости проекций [5]. Плоскопараллельным переносом фигуры относительно плоскости проекций называется такое ее перемещение в пространстве, при котором каждая из ее точек перемещается в своей плоскости уровня. Разновидностями поверхностей плоскопараллельного переноса являются *поверхности прямого переноса* [6] (рис. 1).



Рис. 1. Круговая поверхность переноса
(Черемушкинский рынок, Москва, фото И.А. Мамиевой)

Количество рассматриваемых поверхностей можно значительно расширить, если принять образующие конгруэнтные плоские кривые, заданные в виде

$$|z|^n = T^n \left(1 - \frac{|y|^m}{W^m} \right),$$

где n и m – постоянные неотрицательные числа.

Давая различные значения параметрам n и m , можно получить различные замкнутые и разомкнутые плоские кривые. При $n = m$ получают замкнутые кривые, называемые суперэллипсами [7]. Суперэлли-

липы с $T = W$ называют кривыми Ламе¹, при $n = m = 2$ и $T = W$ получают окружность, а при $n = m = 2$ и $T \neq W$ – эллипс. Чем больше значение параметра $n = m$, тем точнее форма суперэллипса приближается к прямоугольному контуру.

Учитывая способ формирования рассматриваемых поверхностей, их также можно причислить к классу кинематических поверхностей [8].

Пока суперэллипсы и кривые Ламе позволили расширить круг решаемых геометрических задач только в судостроении [9]. В архитектуре и строительстве нашли применение поверхности конгруэнтных сечений маятникового типа с простыми образующими кривыми Ламе в форме круга и эллипса [2; 3]. В [10] приводится пример применения поверхности конгруэнтных сечения для покрытия моста через р. Куру (рис. 2).



Рис. 2. Стекланный мост Мира, Тбилиси, Грузия (фото И.А. Мамиевой)



Рис. 3. Торговый центр, Химки, Россия (фото И.А. Мамиевой)

В г. Химки Московской области также есть пример поверхности конгруэнтных сечений (рис. 3). Необходимость в построении огибающей семейства конгруэнтных кривых возникает при формообразовании поверхностей технических изделий [11].

¹ Weisstein E.W. Lamé Curve // Wolfram MathWorld. URL: <https://mathworld.wolfram.com/LameCurve.html> (accessed: 30.05.2021).

Постановка задачи

Рассмотрим прямой цилиндр с направляющим суперэллипсом, заданным в виде

$$z_0 = \pm T \left(1 - \frac{|y_0|^m}{W^m} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1)$$

и подвижный образующий суперэллипс, заданный в местной системе координат в виде

$$Z = \pm t \left(1 - \frac{|Y|^k}{\omega^k} \right)^{1/s}, \quad (2)$$

где n, m, k, s – постоянные неотрицательные числа; геометрические параметры T, W, t, ω показаны на рис. 4.

Тогда область, охватываемую при движении центра подвижного суперэллипса (2) по контуру неподвижного суперэллипса (1), можно, согласно рис. 4, задать уравнениями

$$y = y(y_0, Y) = y_0 + Y, \quad z = z(y_0, Y) = |z_0| + Z = \left[T \left(1 - \frac{|y_0|^m}{W^m} \right)^{1/n} \pm t \left(1 - \frac{|Y|^k}{\omega^k} \right)^{1/s} \right]; \quad (3)$$

$$y = y(y_0, Y) = y_0 + Y, \quad z = z(y_0, Y) = -|z_0| + Z = \left[-T \left(1 - \frac{|y_0|^m}{W^m} \right)^{1/n} \pm t \left(1 - \frac{|Y|^k}{\omega^k} \right)^{1/s} \right], \quad (4)$$

где $W \leq y_0 \leq W$; $-\omega \leq Y \leq \omega$.

В формулах (3) и (4) y_0 и Y – независимые переменные параметры.

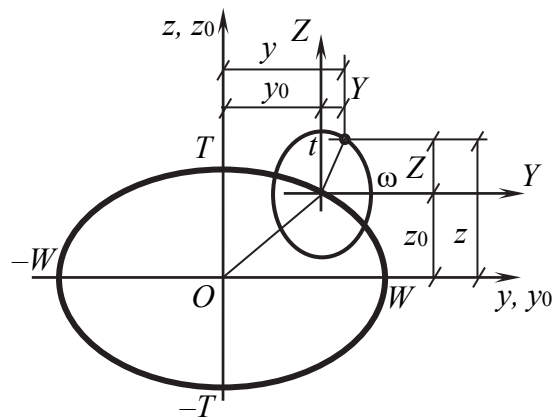


Рис. 4. Схема образования поверхности конгруэнтных сечений

Учитывая, что подвижный суперэллипс совершает колебательные движения маятникового типа и одновременно равномерно перемещается вдоль оси x_0 (рис. 4), можно записать:

$$y_0 = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (5)$$

где A – максимальное отклонение центра подвижного суперэллипса от оси Oz , то есть амплитуда синусоиды в горизонтальной плоскости xOy ; l – шаг полуволны синусоиды.

В этом случае параметрические уравнения поверхности конгруэнтных сечений маятникового типа будут иметь вид

$$x = x(x); \quad y = y(x, Y) = y_0 + Y; \quad (6)$$

$$z = z(x, Y) = |z_0| + Z = T \left(1 - \frac{|y_0|^m}{W^m} \right)^{1/n} \pm t \left(1 - \frac{|Y|^k}{\omega^k} \right)^{1/s} \quad (7)$$

и

$$z = z(x, Y) = -|z_0| + Z = -T \left(1 - \frac{|y_0|^m}{W^m} \right)^{1/n} \pm t \left(1 - \frac{|Y|^k}{\omega^k} \right)^{1/s}. \quad (8)$$

Причем формула (7) используется при построении поверхности с линией центров с $z_0 > 0$, а формула (8) при $z_0 < 0$. Пределы изменения параметра x выбираются произвольно, по необходимости.

Пример 1. Пусть формулы (1) и (2) задают окружности, то есть $m = n = k = s = 2$, а $T = W = 3$ м, $t = \omega = 1$ м, $A = 2$ м, $l = 2$ м, $-t \leq Y \leq t$, $0 \leq x \leq 4l$.

В этом случае формулы (5)–(8) примут вид

$$x = x(x) = x; \quad y = y(x, Y) = y_0 + Y;$$

$$z = z(x, Y) = |z_0| + Z = (T^2 - y_0^2)^{1/2} \pm (t^2 - Y^2)^{1/2},$$

где

$$y_0 = A \sin(\pi x / l).$$

Поверхность изображена на рис. 5. Ее можно отнести к подгруппе циклических поверхностей с плоскостью параллелизма из класса «Циклические поверхности». Некоторые разновидности этих поверхностей представлены в [12].

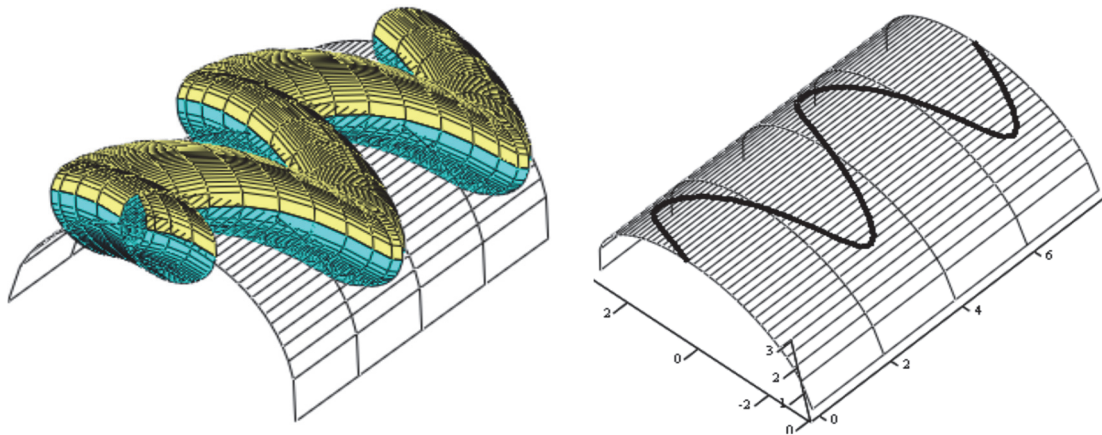


Рис. 5. Циклическая поверхность на круговом цилиндре и линия центров подвижной окружности на цилиндре

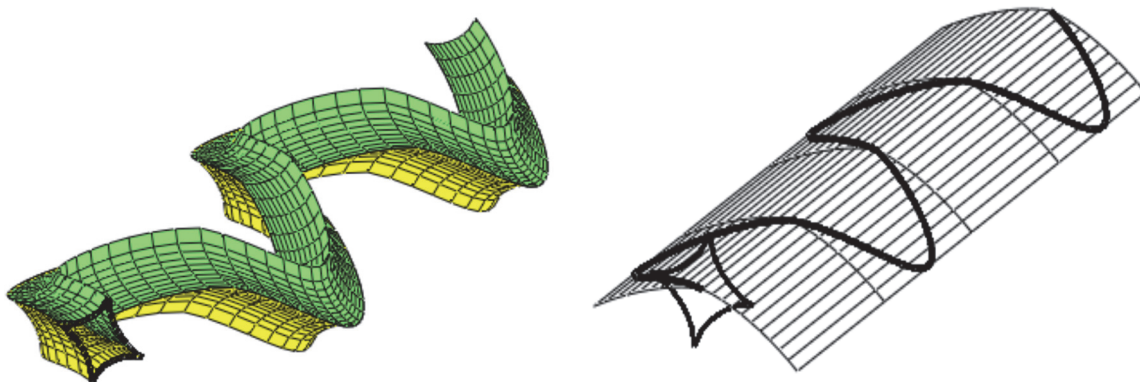


Рис. 6. Конгруэнтная поверхность с образующей астроидой на овальном цилиндре и линия центров подвижной астроиды на цилиндре

Пример 2. Пусть поперечное сечение прямого цилиндра имеет форму суперэллипса, заданного в виде (1), где $T = 1$ м, $W = 1,5$ м; $m = n = 10/7$, а у подвижного суперэллипса $k = s = 2/3$, $t = \omega = 0,5$ м, то есть подвижный суперэллипс представляет собой астроиду [8]. Кроме того $-\omega \leq Y \leq \omega$, $0 \leq x \leq 4l$, $l = 2$ м, $A = 1$ м. Подставляя приведенные значения в формулы (5)–(8), получаем параметрические уравнения искомой поверхности. Сама поверхность изображена на рис. 6.

Пример 3. Пусть формулы (1), (2) имеют вид

$$z_0 = \pm T \left(1 - \frac{|y_0|}{W} \right); \quad Z = \pm t \left(1 - \frac{|Y|}{\omega} \right),$$

то есть $m = n = k = s = 1$, а $T = 1$ м, $W = 1,5$ м, $t = \omega = 0,5$ м, $A = 1$ м, $-t \leq Y \leq t$, $0 \leq x \leq 4l$, $l = 1$ м.

В этом случае с помощью формул (5)–(8) можно построить коробчатую поверхность, показанную на рис. 7. Коробчатые поверхности могут найти применение в некоторых отраслях народного хозяйства. Разнообразные коробчатые поверхности с криволинейными линиями центров изучаются в [13].

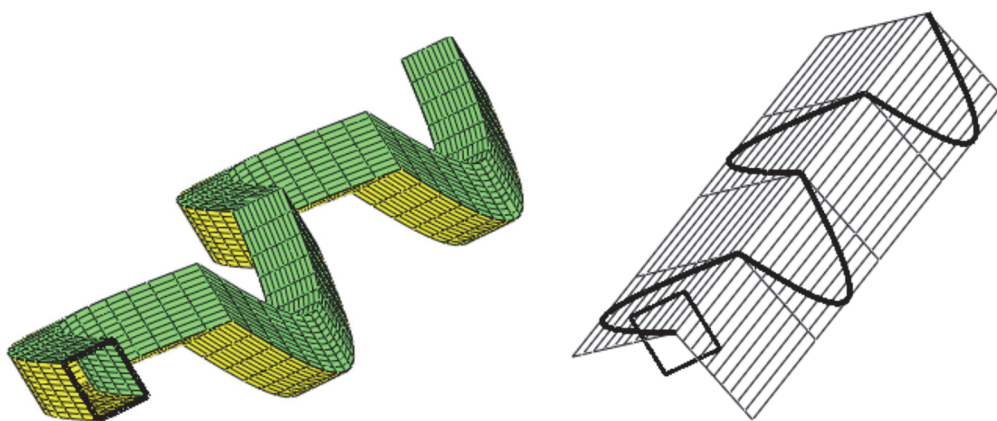


Рис. 7. Конгруэнтная коробчатая поверхность на коробчатом цилиндре и линия центров подвижного четырехугольника на коробчатом цилиндре

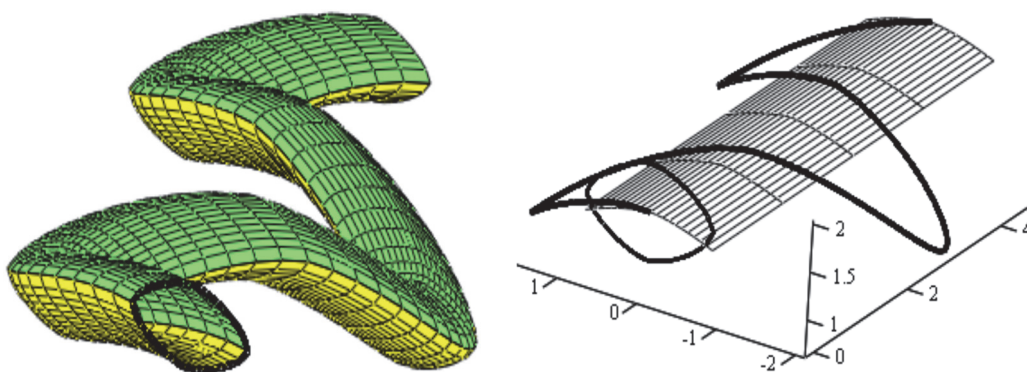


Рис. 8. Конгруэнтная поверхность с образующим овалом на овальном цилиндре и линия центров подвижного овала

Пример 4. Пусть центр подвижного овала (2) с $k = s = 1,5$; $t = 0,5$ м, $\omega = 0,8$ м движется по неподвижному овалу (суперэллипсу) (1) с $m = n = 1,5$; $T = 1,5$ м; $W = 2,5$ м и, кроме того, $A = 2$ м, $l = 2$ м, $-\omega \leq Y \leq \omega$, $0 \leq x \leq 3l$.

В этом случае формула (5) и параметрические уравнения проектируемой поверхности примут вид

$$\begin{aligned} x &= x(x); \quad y = y(x, Y) = y_0 + Y; \\ z = z(x, Y) &= |z_0| + Z = T \left(1 - \frac{|y_0|^{1,5}}{W^{1,5}} \right)^{1/1,5} \pm t \left(1 - \frac{|Y|^{1,5}}{\omega^{1,5}} \right)^{1/1,5}; \\ y_0 &= 2\sin(\pi x/2). \end{aligned}$$

Поверхность представлена на рис. 8.

Новая постановка задачи

Суперэллипсы (1), (2), учитывая, что $m = n$ и $k = s$, можно представить в виде

$$y_0 = y_0(\beta) = W \cos^{2/m} \beta; \quad z_0 = z_0(\beta) = T \sin^{2/m} \beta; \quad (9)$$

$$Y = Y(\gamma) = \omega \cos^{2/k} \gamma; \quad Z = Z(\gamma) = t \sin^{2/k} \gamma, \quad (10)$$

тогда уравнение поверхности конгруэнтных сечений маятникового типа можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= x(x); \quad y = y(x, \gamma) = y_0 + Y = A \sin(\pi x/l) + \omega \cos^{2/k} \gamma; \\ z = z(x, \gamma) &= z_0 + Z = T \sin^{2/m} \beta + t \sin^{2/k} \gamma = T \{ 1 - |\cos^2 \beta| \}^{1/m} + t \sin^{2/k} \gamma = T \{ 1 - |(A/W) \sin(\pi x/l)|^m \}^{1/m} + t \sin^{2/k} \gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Надо иметь в виду, что $0 \leq x \leq C$; β, γ – углы, отсчитываемые от горизонтальной оси x или X (рис. 4); C – требуемая длина поверхности,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{z_0} = \frac{W}{T} \operatorname{ctg}^m \beta,$$

где α – угол, отсчитываемый от вертикальной оси Oz_0 по часовой стрелке (рис. 4).

Пример 5. Пусть центр подвижного овала (10) с $k = 1,5$; $t = 0,5$ м, $\omega = 0,8$ м движется по неподвижному овалу (суперэллипсу) (9) с $m = 1,5$; $T = 1,5$ м, $W = 2,5$ м и, кроме того, $A = 2,5$ м, $l = 2$ м, $-\omega \leq Y \leq \omega$, $0 \leq x \leq 4l$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

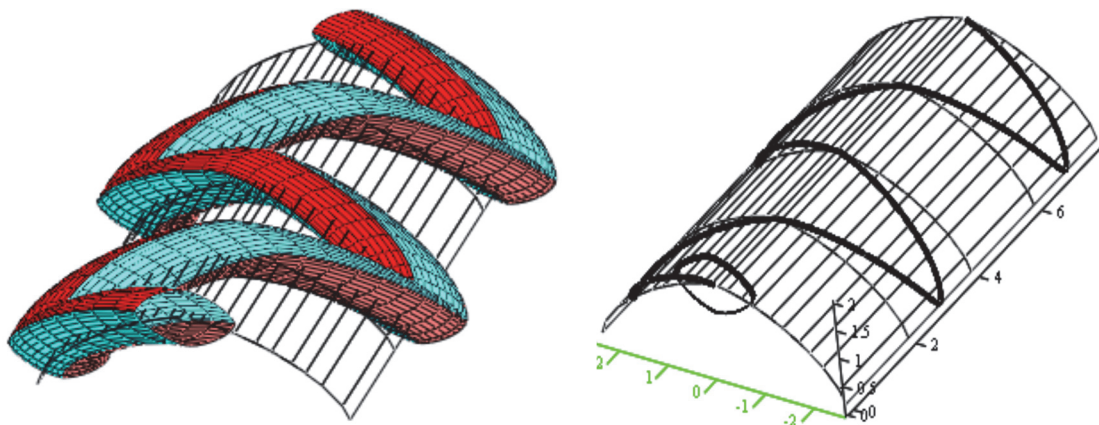


Рис. 9. Конгруэнтная поверхность с образующим овалом на овальном цилиндре и линия центров подвижного овала (10)

Подставляя вышеприведенные геометрические параметры в параметрические уравнения поверхности (11), получаем поверхность маятникового типа с конгруэнтными кривыми, представленную на рис. 9.

Результаты

Получены параметрические уравнения поверхностей конгруэнтных сечений в форме суперэллипсов на прямых цилиндрах с направляющими суперэллипсами. Приведенная методика построения рассматриваемых поверхностей плоскопараллельного переноса проиллюстрирована на пяти примерах. Четыре полученные поверхности представлены впервые (рис. 5–8). С помощью полученных параметрических уравнений общего вида можно построить большое число новых поверхностей конгруэнтных сечений маятникового типа, а также винтовых поверхностей. По-видимому, поверхности конгруэнтных сечений маятникового типа можно выделить в отдельную подгруппу класса «Поверхности конгруэнтных сечений».

Заключение

Рассмотрены поверхности, образованные суперэллипсами, то есть с $n = m$ и $s = k$. Полученные параметрические уравнения поверхности общего вида дают возможность рассматривать случаи, когда $n \neq m$ и $s \neq k$. Это еще больше расширит круг рассматриваемых поверхностей конгруэнтных сечений, так как формулы (1), (2) могут описывать параболы, гиперболы и другие разомкнутые плоские кривые.

Список литературы

1. Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л. К вопросу о поверхностях конгруэнтных сечений маятникового типа на круговом цилиндре // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Киев: КНУБА, 2011. Вип. 88. С. 196–200.
2. Krivoshapko S.N., Shambina S.L. The pendulum type surfaces with congruential cross sections // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 2. С. 165–174. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-165-174>
3. Гринько Е.А. Поверхности плоскопараллельного переноса конгруэнтных кривых // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 3. С. 71–77. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.3.71.77>
4. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Поверхности конгруэнтных сечений на цилиндрах // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 12. С. 1620–163. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.12.1620-1631>
5. Кириллов С.В. Поверхности плоскопараллельного переноса // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей. М.: МАИ, 1973. Вып. 10. С. 21–25. (Труды Московского авиационного института имени С. Орджоникидзе. Вып. 268).
6. Gbaguidi Aïssè G.L. Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 308–314. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>
7. Méndez I., Casar B. A novel approach for the definition of small-field sizes using the concept of superellipse // Radiation Physics and Chemistry. 2021. Vol. 189. 109775. <https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2021.109775>
8. Abd-Ellah H.N., Abd-Rabo M.A. Kinematic surface generated by an equiform motion of astroid curve // International Journal of Engineering Research and Science. 2017. No 3(7). Pp. 100–114. <https://doi.org/10.25125/engineering-journal-IJO-ER-JUL-2017-13>
9. Карневич В.В. Гидродинамические поверхности с мидель-шпагоутом в форме кривых Ламе // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 4. С. 323–328. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-4-323-328>
10. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 150–165.
11. Ляшков А.А. Геометрическое и компьютерное моделирование основных объектов формообразования технических изделий // Омский научный вестник. Серия: Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2017. Т. 1. № 2. С. 9–16.
12. Иванов В.Н. Геометрия циклических оболочек переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 2. С. 3–8.
13. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование многогранных коробчатых криволинейных поверхностей на базовой циклической поверхности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 3–10.

References

1. Krivoshapko S.N., Shambina S.L. On the question of surfaces of congruent sections of pendulum type on a circular cylinder. *Applied Geometry and Engineering Graphics*. 2011;(88):196–200. (In Russ.)

2. Krivoschapko S.N., Shambina S.L. The pendulum type surfaces with congruential cross sections. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(2):165–174. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-165-174>
3. Grinko E.A. Surfaces of plane-parallel transfer of congruent curves. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2021;3:71–77. (In Russ.) <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.3.71.77>
4. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. Surfaces of congruent sections on cylinder. *Vestnik MGSU*. 2020;15(12):1620–1631. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.12.1620-1631>
5. Kirillov S.V. Plane-parallel transfer surfaces. *Cybernetics of Graphics and Applied Geometry of Surfaces*. 1973; (10):21–25. (In Russ.)
6. Gbaguidi Aïssè G.L. Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):308–314. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>
7. Méndez I., Casar B. A novel approach for the definition of small-field sizes using the concept of superellipse. *Radiation Physics and Chemistry*. 2021;189:109775. <https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2021.109775>
8. Abd-Ellah H.N., Abd-Rabo M.A. Kinematic surface generated by an equiform motion of astroid curve. *International Journal of Engineering Research and Science*. 2017;(3(7)):100–114. <https://doi.org/10.25125/engineering-journal-IJO-ER-JUL-2017-13>
9. Karnevich V.V. Hydrodynamic surfaces with midsection in the form of Lamé curve. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(4):323–328. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-4-323-328>
10. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametrical architecture in contemporary buildings and structures. *Academia. Architecture and Construction*. 2020;1:150–165. (In Russ.)
11. Lyashkov A.A. Geometric and computer modeling of the main objects for shaping of technical products. *Omsk Scientific Bulletin. Series: Aviation-Rocket and Power Engineering*. 2017;1(2):9–16. (In Russ.)
12. Ivanov V.N. Geometry of the cyclic translation surfaces with generating circle and directrix meridians of the base sphere. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2011;(2):3–8. (In Russ.)
13. Ivanov V.N. Geometry and forming of the polyhedral box type surfaces on base cyclic surface. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(2):3–10. (In Russ.)