

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ EXPERIMENTAL RESEARCH

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-1-45-53
УДК 624.04:004

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Модели, эквивалентные по демпфированию, в экспериментах по определению параметров внутреннего трения в материалах

В.Б. Зылев , П.О. Платнов  

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация
✉ manuntdfan@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 27 декабря 2021 г.
Доработана: 14 февраля 2022 г.
Принята к публикации: 22 февраля 2022 г.

Аннотация. Совершенствуются методы экспериментального определения параметров внутреннего трения в материалах. Цель лабораторных экспериментов – получить физические параметры материала, позволяющие учитывать силы демпфирования при одноосном напряженном состоянии. Исследования ориентированы на модель внутреннего трения, которая строится на использовании обобщенной модели Прандтля, дающей частотно независимое внутреннее трение и позволяющей учитывать зависимость внутреннего трения от уровня меняющихся во времени напряжений. На специально изготовленной лабораторной установке записываются затухающие колебания при чистом изгибе. Описывается установка, опорные точки которой совпадают с точками покоя реализуемой формы собственных колебаний. Получен алгоритм камеральной обработки экспериментальных данных. Предлагается использовать виртуальную систему, эквивалентную по демпфированию и являющуюся системой с одной динамической степенью свободы. Привлечение воображаемой системы позволяет, выполнив испытания образца на чистый изгиб, получить данные, соответствующие растяжению – сжатию. Методика дает возможность использовать длинные образцы, что снижает отрицательное влияние концентрации напряжений в заделках, а схема, эквивалентная по демпфированию, – использовать образцы с произвольным поперечным сечением. Приводятся полученные параметры демпфирования для малоуглеродистой стали.

Для цитирования

Зылев В.Б., Платнов П.О. Модели, эквивалентные по демпфированию, в экспериментах по определению параметров внутреннего трения в материалах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 45–53. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-45-53>

Ключевые слова: эксперимент, внутреннее трение, затухающие колебания, численные шаговые методы, обобщенная диаграмма Прандтля, чистый изгиб, эквивалентная по демпфированию модель

Зылев Владимир Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9; ORCID: 0000-0001-5160-0389, eLIBRARY SPIN-код: 5833-9120; zylevzb@ya.ru
Платнов Павел Олегович, аспирант, кафедра строительной механики, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9; ORCID: 0000-0002-9765-7417; manuntdfan@mail.ru

© Зылев В.Б., Платнов П.О., 2022




This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Models equivalent in damping in experiments for determining the parameters of internal friction in materials

Vladimir B. Zylev , Pavel O. Platnov  

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

 manuntdfan@mail.ru

Article history

Received: December 27, 2021

Revised: February 14, 2022

Accepted: February 22, 2022

Abstract. The work is devoted to improving the methods of experimental determination of internal friction parameters in materials. The aim of the laboratory experiments is to obtain physical parameters of the material that allow to take into account the damping forces in a uniaxial stress state. The research is focused on the internal friction model, which is based on the use of the generalized Prandtl model, that gives frequency-independent internal friction and allowing for the dependence of internal friction on the level of time-varying stresses. Damped oscillations during pure bending are recorded on a specially made laboratory installation. The description of the installation, the reference points of which coincide with the fixed points of the realized form of natural oscillations, is provided. The algorithm of cameral processing of experimental data is obtained. It is proposed to use a virtual system equivalent in damping. This is a system with one dynamic degree of freedom. The involvement of an imaginary system permits, after performing tests of the sample for pure bending, to acquire data corresponding to stretching – compression. The technique grants the use of long samples, which reduces the negative effect of stress concentration in the anchorages. The damping equivalent scheme makes it possible to use samples with an arbitrary cross-section. The found damping parameters for low-carbon steel are given.

Keywords: experiment, parameters of internal friction, damped oscillations, numerical step-by-step methods, dynamics problems, generalized Prandtl diagram, pure bending, model equivalent in damping

For citation

Zylev V.B., Platnov P.O. Models equivalent in damping in experiments for determining the parameters of internal friction in materials. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):45–53. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-45-53>

Введение

Учет затухания колебаний конструкций при различных динамических воздействиях (сейсмических, ветровых, ударных, вибрационных и т. д.) представляет достаточно сложную задачу, решение которой имеет большое практическое значение. От правильности учета сил демпфирования зависят максимальные расчетные значения усилий и перемещений в конструкции, которые необходимы для назначения рациональных и безопасных размеров несущих элементов. Отметим некоторые недостатки, которые имеются в наиболее часто используемых подходах к учету сил демпфирования.

При использовании метода конечных элементов силы внутреннего трения чаще всего вводятся в расчет в соответствии с формулой $\{C\}\dot{\vec{Z}}$, где $\{C\}$ – матрица демпфирования, а $\dot{\vec{Z}}$ – вектор производных по времени от искомым узловых перемещений. Очевидно, что такой подход приводит к частотно зависимому внутреннему трению, не учитывает зависимость сил сопротивления от уровня напряжений, позволяет обеспечить желательное затухание лишь для двух форм собственных колебаний [1] и вызывает ряд других особенностей, противоречащих экспериментальным данным [2–8].

Иной употребительный способ учета сил демпфирования, применяемый при разложении движения по собственным формам, заключается в волевом введении коэффициентов демпфирования к используемым формам колебаний. Такой подход недостаточно обоснован. Кроме того, разложение движения по собственным формам применимо, строго говоря, лишь к линейным системам, поэтому таковыми системами этот подход и ограничивается.

Перечисленные недостатки говорят о необходимости развития и практического внедрения более строгих подходов, что неизбежно связано с экспериментальными изысканиями. Настоящее исследование относится к учету внутреннего трения по модели А.Ю. Ишлинского [9], основанной на представлении

Vladimir B. Zylev, Doctor of Science (Technical), Professor, Head of the Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5160-0389, eLIBRARY SPIN-code: 5833-9120; zylevzb@ya.ru

Pavel O. Platnov, PhD student, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9765-7417; manuntdfan@mail.ru

материала как неоднородного упругопластического тела. В [10] мы описали численную реализацию этого подхода, причем простейшего варианта, основанного на обобщенной модели Прандтля.

Коротко опишем физическую сущность модели. Модель, строго говоря, относится к одноосному напряженному состоянию.

Чтобы обеспечить получение гистерезисных петель при деформациях растяжения – сжатия, действительный стержень заменяется набором полос, площадь которых в сумме равна площади действительного стержня (рис. 1, а).

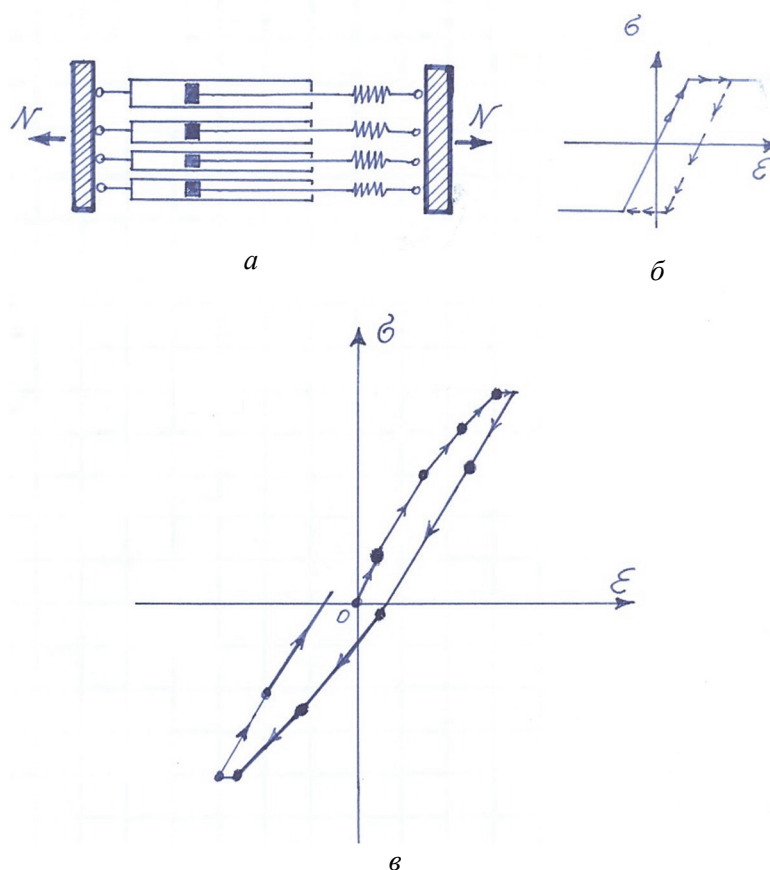


Рис. 1. Модель стержня, обеспечивающая демпфирование:
 а – несколько полос с разными пределами текучести; б – петля гистерезиса с одной полосой;
 в – петля гистерезиса, соответствующая набору полос
Figure 1. Rod model providing damping:
 а – several stripes with different yield stresses; б – hysteresis loop with one stripe;
 в – hysteresis loop corresponding to a set of stripes

На рис. 1, б показана диаграмма Прандтля для одной полоски. Каждая из полосок подчиняется при деформировании диаграмме Прандтля. Все полоски имеют одинаковый модуль упругости E , но разные пределы текучести и разные площади поперечного сечения. Сначала при малом удлинении все полоски деформируются упруго, и стержень следует закону Гука. Когда для наиболее слабой полоски будет достигнут предел текучести, на диаграмме растяжения стержня (рис. 1, в) появится излом. Следующий излом на диаграмме появится тогда, когда будет достигнут предел текучести второй полоски и т. д. При начале разгрузки стержень сначала будет следовать закону Гука, пока в пластическую деформацию не войдет (теперь уже при сжатии) наиболее слабая полоса. Можно рассматривать модель с разными пределами текучести при растяжении и сжатии, но далее будем полагать их одинаковыми.

Если количество полосок увеличивать, можно получать все более гладкие гистерезисные петли, но чем большее количество полос будет введено в расчет, тем большего машинного времени и памяти будет требовать компьютерная программа, реализующая алгоритм. Рассматриваемая модель хорошо приспособлена для явных вычислительных схем [11–14], когда на каждом временном шаге неизбежно определяются усилия во всех стержнях. В случае используемой модели необходимо следить за состоянием каждой полоски. Здесь приходится мириться с расходом компьютерного времени и памяти.

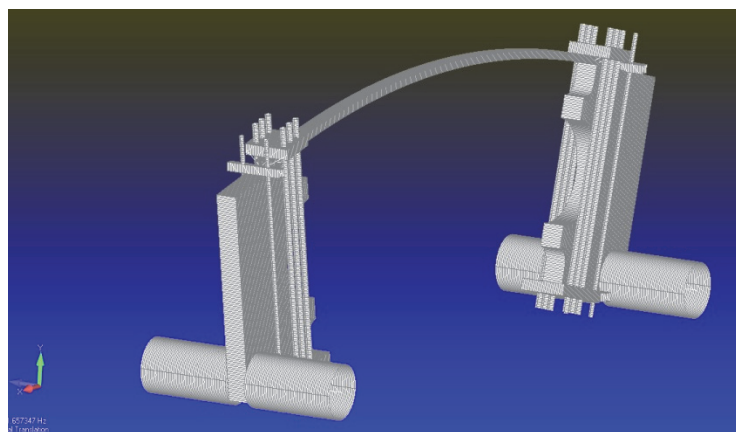
Перечислим основные достоинства и недостатки рассматриваемой модели демпфирования, использующей обобщенную диаграмму Прандтля.

Достоинства: модель дает частотно-независимое внутреннее трение, что подтверждается большим количеством экспериментальных данных [2–10]; неизбежно учитывает зависимость внутреннего трения от уровня напряжений; может учитывать наложение напряжений от различных составляющих нагрузок, что имеет место в реальных системах; позволяет рассчитывать конструкции, состоящие из различных материалов; внутреннее трение учитывается одновременно с пластическими деформациями; допускает использование различных уровней аппроксимации.

Недостатки: модель сложна в использовании; требует существенной траты машинного времени и компьютерной памяти; делает любую задачу сразу нелинейной; в настоящее время мало исследована и не обеспечена необходимыми параметрами материалов. Экспериментальные методы получения параметров модели не отработаны. Частичной ликвидации последнего недостатка и посвящено настоящее исследование.

Методика исследований

В своих экспериментах мы пошли по пути записи свободных колебаний. Заметим, что самая естественная схема испытаний с использованием образца, работающего на растяжение – сжатие с сосредоточенной массой по концам, для стали очень трудно реализуема. Крепление образца к сосредоточенным массам связано с появлением больших неравномерных напряжений в заделках, что неизбежно искажает результаты испытаний для короткого образца. Длинный же образец нельзя использовать, так как он будет терять устойчивость при сжатии. Указанные соображения приводят к схеме установки, где образец работает в условиях изгиба. Очевидно, что в экспериментах лучше всего использовать чистый изгиб, который обеспечит равномерное по длине одноосное напряженное состояние во всех волокнах. Именно схема, реализующая чистый изгиб, была использована в лабораторной установке, которая спроектирована и изготовлена в лаборатории имени Л.Д. Проскурякова в РУТ(МИИТ). На рис. 2, а показана схема установки; на рис. 2, б фрагмент установки с коробчатым образцом (2×4 см, толщина стенки 0,136 см).



а



б

Рис. 2. Установка для исследования затухающих колебаний:

а – экспериментальная установка, реализующая напряженное состояние, весьма близкое к чистому изгибу (конечно-элементная расчетная схема установки);
б – фрагмент установки с закрепленным образцом коробчатого сечения (фото В.Б. Зылева)

Figure 2. Installation for the study of damped oscillations:

а – an experimental installation implementing a stress state very close to pure bending (finite element calculation scheme of the installation);
б – a fragment of an installation with a fixed sample of a box-shaped cross-section

Стремясь приблизиться к идеальному двутавру для сечения образца, мы использовали коробчатое поперечное сечение, однако наличие стенок вносит искажение в запись. Это искажение можно полностью исключить, применяя при обсчете экспериментальных данных модель, эквивалентную по демпфированию. Подход представляется универсальным, позволяющим отказаться в экспериментах от тяготеения к идеальному двутавру и использовать образцы с произвольной формой поперечного сечения.

Поясним, что мы подразумеваем под схемой, эквивалентной по демпфированию. На рис. 3, а показано поперечное сечение образца; на рис. 3, б система с одной степенью свободы в виде сосредоточенной массы, закрепленной стержнями. Эквивалентная схема имеет столько стержней, работающих на растяжение, на сколько слоев разбивается поперечное сечение.

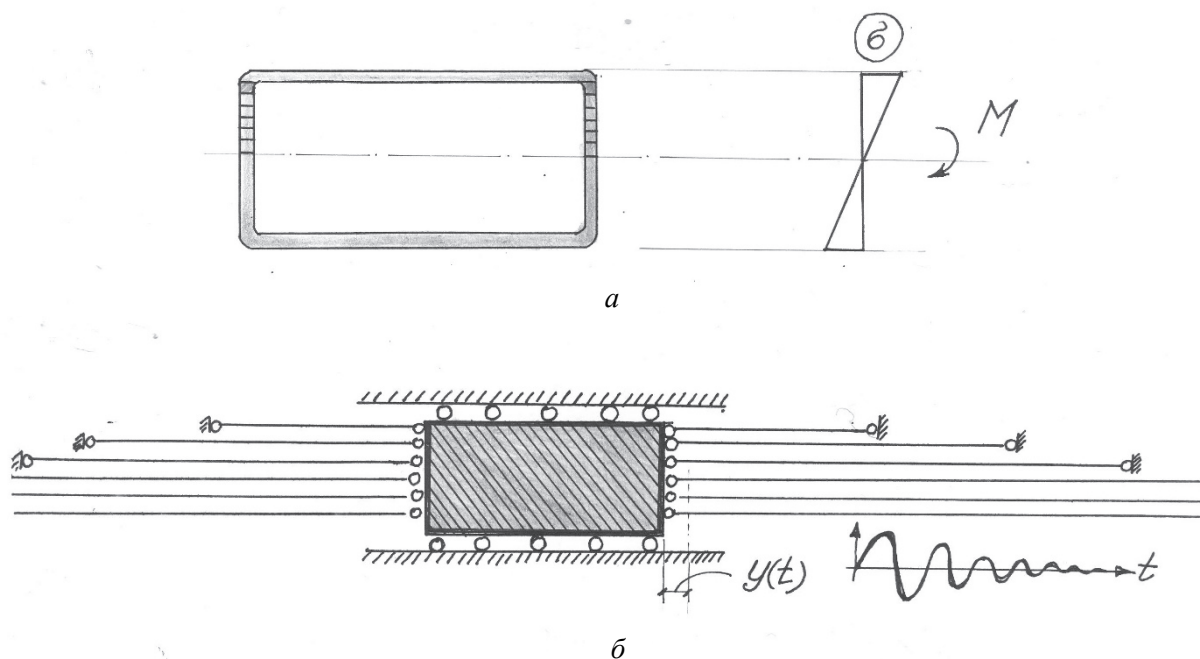


Рис. 3. Схема, эквивалентная по демпфированию:

а – поперечное сечение образца;

б – система с одной степенью свободы, эквивалентная по демпфированию первой форме колебаний экспериментальной установки

Figure 3. Damping equivalent model:

а – sample cross-section;

б – a system with one degree of freedom, equivalent in damping to the first form of oscillation of the experimental installation

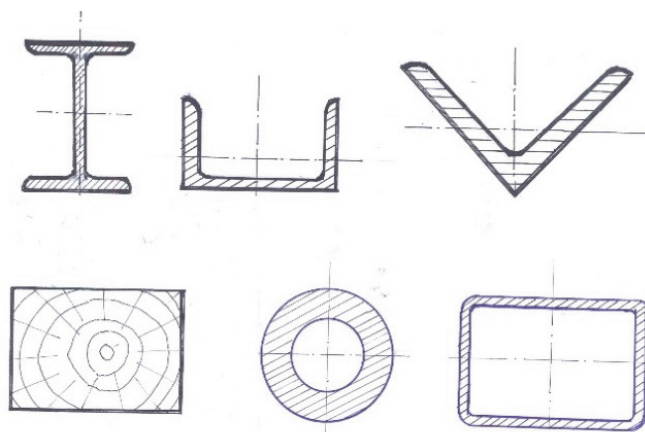


Рис. 4. Типы поперечных сечений образцов,

которые можно использовать с привлечением эквивалентной по демпфированию модели

Figure 4. Types of cross-sections of samples that can be used with the involvement of a damping equivalent model

Стержень, соответствующий верхнему слою, имеет длину действительного образца. Стержни, имитирующие слои, приближенные к нейтральному слою поперечного сечения, имеют большую длину, чтобы в них возникала уменьшенная продольная деформация. Увеличивая длину соответствующего стержня, нужно одновременно уменьшать площадь его поперечного сечения. Этим будет достигаться условие, при котором каждому уровню амплитудного напряжения будут соответствовать одинаковые объемы материала в реальной установке и эквивалентной схеме. Величину сосредоточенной массы всегда можно подобрать так, чтобы частоты колебаний схемы на рис. 3, б и в экспериментальной модели были бы одинаковыми, но в нашем случае в этом нет необходимости, так как рассматриваемая модель является частотно независимой. Отметим, что параметры схемы, эквивалентной по демпфированию, должны создаваться для каждого поперечного сечения образца и его длины заново. Предложенная методика позволяет использовать для образцов стержни самого разнообразного поперечного сечения. Практическому назначению алгоритма очевидно соответствуют сечения, показанные на рис. 4.

Поскольку система, эквивалентная по демпфированию, представляет динамическую систему всего с одной степенью свободы (рис. 3, б), ее компьютерный анализ выполняется очень быстро. Последнее обстоятельство существенно при подборе параметров демпфирования, которое требует многократного запуска компьютерной программы.

Выполняя эксперимент, мы стремились избежать всех видов потерь энергии, кроме внутреннего трения в материале образца. В соответствии с этим выполняли следующие мероприятия: подвешивали массивные стальные плиты (массой 70 кг) в точках покоя [8] на подшипниках; создавали заделки образца стальными пластинами толщиной 2,9 см с усилием затяжки шпилек по 8 т в каждой (см. рис. 2, б); записывали колебания при помощи лазерного луча бесконтактным образом; брали длины образцов, равные 1,6 м, а для контроля – 2,78 м, для того чтобы ослабить влияние особенностей в заделках.

Результаты

Материал стального образца испытывался в испытательной машине до разрыва. При этом предел текучести незначительно превышал 300 МПа.

В начале эксперимента вручную путем длительного раскачивания системы в установке возбуждалась форма колебаний, показанная на рис. 2, а. Качество полученной экспериментальной формы вполне удовлетворительное, о чем можно судить по совпадению экспериментальных и расчетных частот в табл. 1. Кроме того, при записи 600 периодов частоты в начале и в конце записи отличались очень незначительно.

Таблица 1

Экспериментальные и расчетные частоты при различном количестве добавочных грузов

Масса дополнительных навешенных грузов на каждую плиту, кг	Расчетная частота по методу конечных элементов, Гц	Экспериментальная частота, Гц	Процент расхождения
0	2,61	2,63	0,7
30	1,98	2,03	2,5
60	1,66	1,71	3,0

Table 1

Experimental and calculated frequencies for different amounts of additional loads

Weight of additional suspended loads on each plate, kg	Calculated frequency by the finite element method, Hz	Experimental frequency, Hz	Percentage of discrepancy
0	2.61	2.63	0.7
30	1.98	2.03	2.5
60	1.66	1.71	3.0

По разметке на экране, который находился на расстоянии 12 м от экспериментальной модели, устанавливалась амплитуда колебаний 96 см, при которой максимальные напряжения цикла в крайних волокнах образца составляли 200 МПа, точнее относительная деформация в крайнем волокне образца составляла 0,001. Эти данные получаются в предположении, что образец находится в состоянии чистого изгиба. В действительности это не совсем так по двум причинам. Во-первых, образец обладает собственной массой. Как показал конечно-элементный расчет (расчетная схема на рис. 2, а), напряжения в среднем сечении

образца на 1,1 % больше, чем в заделке. Во-вторых, в сечениях образца действует продольная сила. За счет этого напряжения в нижнем крайнем волокне на 2,8 % больше, чем в верхнем волокне среднего сечения образца (данные конечно-элементного расчета при использовании стержневых элементов для образца). Последнее обстоятельство можно учесть в рамках схемы, эквивалентной по демпфированию, однако в рамках данной работы этими уточнениями мы пренебрегли.

Далее на видеокамеру записывалось светящееся пятно лазерного луча на протяжении 600 периодов затухающих колебаний. Путем визуальной обработки видеозаписи создавался цифровой файл, который представлял значения последовательных затухающих амплитуд колебаний. На рис. 5 представлен график убывающих амплитуд, где по горизонтали отложен номер периода, а по вертикали – безразмерная амплитуда A_n/A_0 .

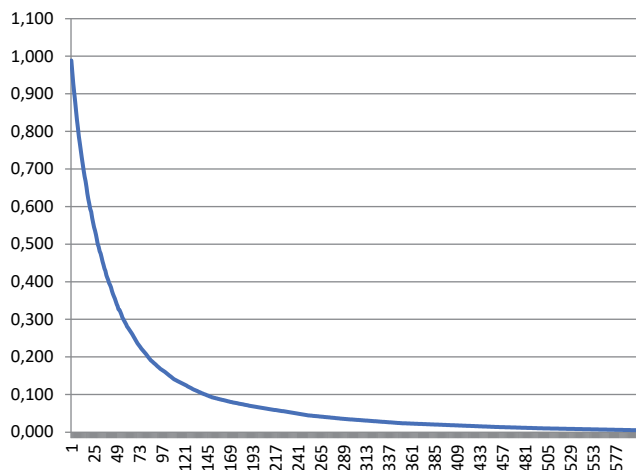


Рис. 5. Экспериментальный график убывающих амплитуд для стального образца (600 периодов)
Figure 5. Experimental graph of decreasing amplitudes for a steel sample (600 periods)

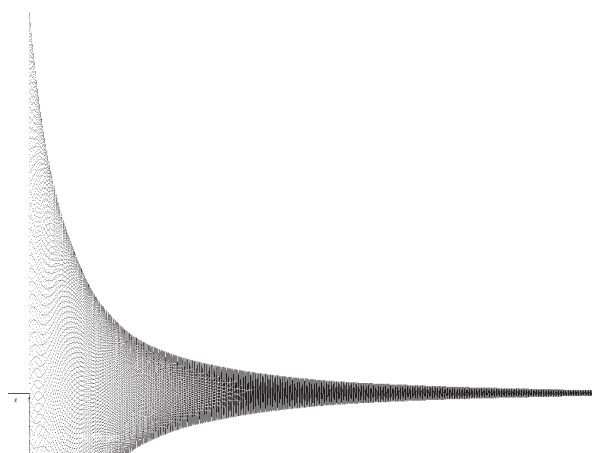


Рис. 6. График убывающих амплитуд, полученный расчетом схемы, эквивалентной по демпфированию, с подобранными параметрами
Figure 6. A graph of decreasing amplitudes obtained by calculating a damping equivalent model with selected parameters

На рис. 6 показан график убывающих амплитуд для схемы, эквивалентной по демпфированию, полученный на компьютере с использованием нашей программы [12; 13] при подобранных параметрах демпфирования. Если эти графики наложить, они совпадают с точностью до толщины линии на рис. 5.

Подобранные параметры демпфирования для материала данного образца представлены в табл. 2.

Таблица 2

Подобранные параметры модели демпфирования для материала образца

Доля площади полосы, %	0,81	0,21	0,38	0,2	0,43	0,69	0,67	0,96	0,85	94,8
Относительная деформация до текучести в полоске $\epsilon_t \times 10^5$	0,25	1,23	2,474	4,687	7,812	12,57	21,61	42,19	63,28	150

Table 2

Selected parameters of the damping model for the sample material

The share of the strip area, %	0.81	0.21	0.38	0.2	0.43	0.69	0.67	0.96	0.85	94.8
Relative deformation to yield in the strip $\epsilon_t \times 10^5$	0.25	1.23	2.474	4.687	7.812	12.57	21.61	42.19	63.28	150

Как видно из табл. 2, мы ориентируемся на модель стержня с разбивкой на десять воображаемых полос. Использование в расчетах такого материала будет приводить к демпфированию при напряжениях, больших 0,5 МПа. При напряжениях, меньших 0,5 МПа, демпфирование будет отсутствовать. Если тре-

буется смоделировать внутреннее трение при весьма малых напряжениях, необходимо вводить в модель еще большее количество полос в области малых ε_T .

Процесс камеральной обработки кривой затухания (рис. 5) является достаточно трудоемким. Сначала определяется площадь самой слабой полосы путем расчета на компьютере эквивалентной по демпфированию системы при колебаниях с малой начальной амплитудой. Когда удается получить совпадение кривых на рис. 5 и 6 на завершающем участке, можно перейти к определению площади следующей по значению предела текучести полосы и т. д. При этом требуется многократный расчет эквивалентной системы на компьютере. Положительным здесь является высокая скорость решения для эквивалентной по демпфированию системы, так как эта система всего с одной степенью свободы. В данном случае время одного решения составляет несколько секунд. Эквивалентная по демпфированию система содержала 40 стержней. Как показало сравнение получаемых результатов, возможно было использовать и более грубую эквивалентную систему, содержащую 20 стержней.

Использование модели, эквивалентной по демпфированию, позволяет правильно учесть работу материала образца с пониженным уровнем напряжений. Чтобы оценить соответствующее уточнение путем компьютерного расчета, сравнивались убывающие амплитуды при колебаниях образца действительного коробчатого сечения с убывающими амплитудами, полученными для идеального двутавра. Например, на 150-м цикле идеальный двутавр дал на 21 % меньшую амплитуду, чем образец коробчатого сечения. Дальнейшие амплитуды имели еще большее отличие. Приведенные значения характеризуют порядок уточнения, который дает использование схемы, эквивалентной по демпфированию. Следует отметить, что используемый нами в данном случае образец достаточно близок к идеальному двутавру. Для сечений другого типа (см. рис. 4) получаемые уточнения будут существенно большими.

Приведенными в табл. 2 значениями можно приближенно пользоваться для низколегированной стали, однако надо иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, мы стремились получить затухание для однородного напряженного состояния. Реальная система во многом характеризуется конструкционным демпфированием, трением в опорных частях и т. д. Все эти виды демпфирования индивидуальны для каждой конструкции. Во-вторых, при испытаниях разных партий образцов получают достаточно отличающиеся кривые затухания. Например, в [11] аналогичные образцы коробчатого поперечного сечения давали меньшее демпфирование.

Заключение

Предложенная в работе методика камеральной обработки эксперимента, основанная на компьютерном расчете системы, эквивалентной по демпфированию, позволяет использовать образцы с произвольным поперечным сечением при записи колебаний лабораторной установки, реализующей схему чистого изгиба образца.

Приведен пример определения параметров демпфирования малоуглеродистой стали образца коробчатого поперечного сечения. Параметры получены для модели внутреннего трения, основанной на обобщенной диаграмме Прандтля.

Список литературы

1. Тягин А.Г. Обобщение комбинированного асимптотического метода на задачи с динамическим воздействием на верхнее строение. Ч. III. Оценка консерватизма релеевской модели демпфирования при расчете на удар самолета // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 2. С. 44–49.
2. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 154 с.
3. Сорокин Е.С. Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания // *Исследования по динамике сооружений*. М.: Госстройиздат, 1951. С. 5–90.
4. Nicanor C., Ramona C.N., Petrica V., Iulian I., Maricel A. Experimental and theoretical results concerning internal friction investigation of a shape memory alloy based on copper // *Metalurgia International*. 2010. Vol. 15. No. 12. Pp. 48–58.
5. Гильманова И.Ф., Смирнова Т.В. Способ измерения внутреннего трения в материале // *Достижения вузовской науки*. 2016. № 20. С. 117–123.
6. Хромов Е.В., Хромов О.В., Хромов И.В. Экспериментальные исследования нелинейного характера функции внутреннего трения для стальной балки // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2015. № 5 (313). С. 24–28.
7. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 193 с.

8. Зылев В.Б., Платнов П.О. Использование точек покоя при экспериментальном изучении внутреннего трения в материале // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 5. С. 399–404. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-399-404>
9. Иллинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 704 с.
10. Зылев В.Б., Григорьев Н.А. Обобщенная модель Прандтля для учета сил внутреннего трения // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2011. № 1 (234). С. 58–62.
11. Зылев В.Б., Платнов П.О. Экспериментальное исследование зависимости параметров демпфирования от начальной пластической деформации, уровня напряжений и частоты // *Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли РФ в 2019 году: в 2 т. Т. 2. М., 2020. С. 197–203.*
12. Александров А.В., Потанов В.Д., Зылев В.Б. *Строительная механика: в 2 кн. Кн. 2. Динамика и устойчивость упругих систем*. М.: Высшая школа. 2008. 384 с.
13. Зылев В.Б., Штейн А.В. Численное решение задачи о нелинейных колебаниях системы нитей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1986. № 6. С. 58–61.
14. Scerrato D., Giorgio I., Madeo A., Darve F., Limam A. A simple non-linear model for internal friction in modified concrete // *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. Pp. 136–152. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.021>

References

1. Tyapin A.G. Generalization of the combined asymptotic method to problems with dynamic effects on the upper structure. Part III. Evaluation of the conservatism of the Rayleigh damping model when calculating the impact of an aircraft. *Mechanics and Analysis of Constructions*. 2016;(2):44–49. (In Russ.)
2. Sorokin E.S. *On the theory of internal friction at oscillations of elastic systems*. Moscow: Gosstroizdat Publ.; 1960. (In Russ.)
3. Sorokin E.S. Method of taking into account the inelastic resistance of a material when calculating structures for vibrations. In: *Research on the Dynamics of Structures*. Moscow: Gosstroizdat Publ.; 1951. p. 5–90. (In Russ.)
4. Nicanor C., Ramona C.N., Petrica V., Iulian I., Maricel A. Experimental and theoretical results concerning internal friction investigation of a shape memory alloy based on copper. *Metallurgia International*. 2010;15(12):48–58.
5. Gilmanova I.F., Smirnova T.V. Method of measuring internal friction in the material. *Achievements of university Science*. 2016;(20):117–123. (In Russ.)
6. Khromov E.V., Khromov O.V., Khromov I.V. Experimental study of nonlinear character of the internal friction function for a steel beam. *Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. 2015;(5(313)):24–28. (In Russ.)
7. Panovko Ya.G. *Internal friction during vibrations of elastic systems*. Moscow: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Fiziko-Matematicheskoi Literatury; 1960. (In Russ.)
8. Zylev V.B., Platnov P.O. The use of fixed points in experimental research of the internal friction of material. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):399–404. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-399-404>
9. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. Moscow. FIZMATLIT Publ.; 2003. (In Russ.)
10. Zylev V.B., Grigoriev N.A. Generalized Prandtl model for accounting for internal friction forces. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2011;(1(234)):58–62. (In Russ.)
11. Zylev V., Platnov P. Experimental research of the dependence of damping parameters on the initial plastic deformation, stress level and frequency. *Fundamental, Exploratory and Applied Research of the Russian Academy of Architecture and Construction on Scientific Support for the Development of Architecture, Urban Planning and the Construction Industry of the Russian Federation in 2019 (vol. 2)*. Moscow; 2020. p. 197–203.
12. Alexandrov A.V., Potapov V.D., Zylev V.B. Dynamics and stability of elastic systems. *Structural Mechanics (book 2)*. Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 2008.
13. Zylev V.B., Stein A.V. Numerical solution of the problem of nonlinear oscillations of a system of threads. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1986;(6):58–61. (In Russ.)
14. Scerrato D., Giorgio I., Madeo A., Darve F., Limam A. A simple non-linear model for internal friction in modified concrete. *International Journal of Engineering Science*. 2014;80:136–152. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.021>