2022. 18(1). 22–34

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34
УДК 624.012:691.328.004.12

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Реологические уравнения состояния бетона и релаксация напряжений

Е.А. Ларионов, М.И. Рынковская, Е.А. Гринько✉

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация
✉ grinko-ea@rudn.ru

История статьи
Поступила в редакцию: 10 ноября 2021 г.
Доработана: 15 января 2022 г.
Принята к публикации: 10 февраля 2022 г.

Для цитирования
Ларионов Е.А., Рынковская М.И., Гринько Е.А. Реологические уравнения состояния бетона и релаксация напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 22–34. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34

Аннотация. Рассматриваются некоторые подходы к выводу реологических уравнений механического состояния бетона и в нелинейной постановке обосновывается принцип наложения частичных деформаций. В линейной теории ползучести этот принцип известен как принцип суперпозиции Л. Больцмана частичных деформаций ползучести. Концепция прочностной структуры конструктивного материала является основой для обоснования приводимых в работе утверждений. Статистическое распределение прочности фракций, образующих в объединении конструктивный элемент, позволяет вывод нелинейных уравнений состояния. При этом разбираются так называемые структурные напряжения способных к силовому сопротивлению фракций. Обоснование в нелинейной постановке принципа наложения частичных деформаций означает модификацию принципа суперпозиции Л. Больцмана и его применимость в том числе при нелинейной зависимости деформаций от расчетных напряжений. Устанавливается, что нелинейное относительно расчетных напряжений интегральное уравнение состояния является линейным относительно структурных напряжений. Именно это обстоятельство позволяет его сведение к простому линейному дифференциальному уравнению, что, в частности, упрощает решение релаксационных задач. Эти задачи тесно связаны с расчетом конструкций на долгосрочную безопасность. Существенным моментом в обсуждаемых вопросах выступает наличие единой функции старения бетона, определяющей динамику его механических параметров – модуля упругости и меры ползучести.

Ключевые слова: ползучесть, деформация, релаксация, нелинейность, принцип наложения, уравнение состояния, статистические распределения

Ларионов Евгений Алексеевич, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-4906-5919, Scopus ID: 57195228824, eLIBRARY AuthorID: 365207; evgenylarionov39@yandex.ru

Рынковская Марина Игоревна, кандидат технических наук, доцент, директор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-2206-2563, eLIBRARY SPIN-код: 9184-7432; rynkovskaya-mi@rudn.ru

Гринько Елена Алексеевна, заведующая лабораторией сопротивления материалов, департамент строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-0459-8359, eLIBRARY SPIN-код: 5360-7164; grinko-ea@rudn.ru

Rheological equations of concrete state and relaxation of stress

Evgeny A. Larionov, Marina I. Rynkovskaya, Elena A. Grinko✉

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation
✉ grinko-ea@rudn.ru

Article history
Received: November 10, 2021
Revised: January 15, 2022
Accepted: February 10, 2022

For citation
Larionov E.A., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A. Rheological equations of concrete state and relaxation of stress. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):22–34. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34

Abstract. Some approaches to the derivation of rheological equations of the mechanical state of concrete are considered and the principle of superposition of fraction deformations is justified in a nonlinear statement. In linear creep theory, this principle is known as L. Boltzmann's superposition principle of fraction creep deformations. The concept of the strength structure of the constructive material is the basis for substantiating the statements given in this work. The statistical distribution of the strength of the fractions forming a structural element in the union allows the derivation of nonlinear equations of state. At the same time, the so-called structural stresses of fractions that capable to force resistance are considered. The overlay principle of fraction deformations in non-linear statement is justified. This means the modification of L. Boltzmann's principle of superposition allowing its applicability also under the nonlinear dependence of deformations on stresses. It is established that the integral equation of state, which is nonlinear with respect to calculated stresses, is linear with respect to structural stresses. It is this circumstance that permits its reduction to a simple linear differential equation, which, in particular, simplifies the solution of relaxation problems. These problems are closely related to the calculation of structures for long-term safety.

Keywords: creep, deformation, relaxation, nonlinearity, overlay principle, equation of state, statistical distribution

Введение

Теории ползучести посвящено большое количество работ. Среди значимых для дальнейшего изложения отметим [1–8]. Одним из основных положений этой теории являются уравнения механического состояния бетона, которые выводятся на основе принципа наложения деформаций. Они заключается в суммировании в некоторый момент времени t частичных приращений упругих $\Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,\tau_i)$ и запаздывающих $\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t,\tau_i)$ деформаций от частичных приращений напряжений $\Delta\sigma(\tau_i)$ в предыдущие моменты времени. Это означает, что результат действия последних учитывается в момент времени t. Если деформации $\Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,\tau_i)$ $(\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t,\tau_i))$ взаимонезависимы, то приращение напряжения

$$\Delta\sigma(t,t_0) = \Delta\sigma(t) - \Delta\sigma(t_0) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma(t,\tau_i) \tag{1}$$

порождает приращение упругой деформации

$$\Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,t_0) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,\tau_i) \tag{2}$$

и приращение деформации ползучести

$$\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t,t_0) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Delta\varepsilon_{\text{п}}(t,\tau_i). \tag{3}$$

Evgeny A. Larionov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-4906-5919, Scopus ID: 57195228824, eLIBRARY AuthorID: 365207; evgenylarionov39@yandex.ru

Marina I. Rynkovskaya, PhD, Docent, Director of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-2206-2563, eLIBRARY SPIN-code: 9184-7432; rynkovskaya-mi@rudn.ru

Elena A. Grinko, Head of the Materials Resistance Laboratory, Department of Construction, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0459-8359, eLIBRARY SPIN-code: 5360-7164; grinko-ea@rudn.ru

В момент t напряжению $\Delta\sigma(\tau_i)$ вследствие эволюции модуля упругости $E(\tau_i)$ отвечает деформация

$$\Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,\tau_i)=\frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(t)}.$$

Согласно (1) и (2) получим соотношение

$$\Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,t_0)=\frac{\Delta\sigma(t,t_0)}{E(t)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(t)}=\sum_{i=1}^{n}\Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,\tau_i), \qquad (4)$$

реализующее наложение частичных упругих деформаций $\Delta\varepsilon_{\text{у}}(t,\tau_i)$. В дальнейшем используется мера ползучести в форме

$$C(t,\tau)=C(\infty,28)\theta(\tau)f(t-\tau). \qquad (5)$$

Здесь $C(\infty,28)$ – предельная мера ползучести, $\theta(\tau)$ – функция старения, отражающая изменение дерформативных свойств бетона во времени, а

$$f(t-\tau)=1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}$$

функция накопления деформаций ползучести. Согласно Л. Больцману [1] при $\theta(\tau)=1$ деформации $\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t,\tau_i)=C(t,\tau_i)\Delta\sigma(\tau_i)$ взаимонезависимы, каждая из них зависит лишь от приращения напряжения $\Delta\sigma(\tau_i)$ и его продолжительности $t-\tau_i$ и не зависит от остальных приращений $\Delta\sigma(\tau_j)$ и $t-\tau_j$ при $i\neq j$. Тем самым

$$\varepsilon_{\text{п}}(t,t_0)=\sum_{i=1}^{n}C(t,\tau_i)\Delta\sigma(\tau_i). \qquad (6)$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и $\Delta\tau_i\to 0$, получим

$$\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}C(t,\tau)d\sigma(\tau), \qquad (7)$$

а интегрируя по частям с учетом $C(t,t)=0$

$$\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t,t_0)=-C(t,t_0)\sigma(t_0)-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \qquad (8)$$

Добавляя порождаемую напряжением $\sigma(t_0)$ деформацию ползучести $C(t,t_0)\sigma(t_0)$ и упругую деформацию $\frac{\sigma(t)}{E(t)}$, получим линейное уравнение механического состояния для нестареющего материала при одноосном нагружении

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \qquad (9)$$

Линейное уравнение состояния

Основной причиной старения бетона являются физико-химические процессы, в результате которых меняются во времени показатели прочности $R(\tau)$, упругости $E(\tau)$ и меры ползучести $C(t,\tau)$. В современных феноменологических теориях ползучести эти изменения учитываются разными для этих показателей функциями старения типа $\theta(\tau)$. Основываясь на экспериментальных данных [9], в [10] установлена их общность и выявлена ее структура:

$$\theta(\tau)=\frac{R(28)}{R(\tau)}=\frac{C(t,\tau)}{C(\infty,28)f(t-\tau)}. \qquad (10)$$

При простейшем нагружении деформация ползучести

$$\varepsilon_{п}(t,\tau) = C(\infty,28)\theta(\tau)f(t-\tau)\sigma(\tau).$$

Обозначим

$$C_0(t,\tau) = C(\infty,28)f(t-\tau) \quad \text{и} \quad \widehat{\sigma}(\tau) = \theta(\tau)\sigma(\tau). \tag{11}$$

С учетом (10)

$$\widehat{\sigma}(\tau) = \frac{R(28)}{R(\tau)}\sigma(\tau) = R(28)\eta(\tau), \tag{12}$$

где $\eta(\tau)$ – уровень напряжений.

Приращению уровня напряжения $\Delta\eta(\tau_i)$ соответствует приращение деформаций ползучести в момент наблюдения t

$$\varepsilon_{п}(t,\tau_i) = C_0(t,\tau_i)\Delta\widehat{\sigma}(\tau_i). \tag{13}$$

Поскольку в линейной постановке приращение $\Delta\varepsilon_{п}(t,\tau_i)$ зависит лишь от величины $\Delta\widehat{\sigma}(\tau_i)$ и длительности $t-\tau_i$, то

$$\Delta\varepsilon_{п}(t,t_0) = \sum_{i=1}^{n} C_0(t,\tau_i)\Delta\widehat{\sigma}(\tau_i)\,, \tag{14}$$

а переходя к пределу, получим

$$\Delta\varepsilon_{п}(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} C_0(t,\tau)d\widehat{\sigma}(\tau). \tag{15}$$

Поскольку

$$d\widehat{\sigma}(\tau) = \theta(\tau)d\sigma(\tau) + \sigma(\tau)\dot{\theta}(\tau)d\tau,$$

то

$$\Delta\varepsilon_{п}(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} C(t,\tau)d\sigma(\tau) + \int_{t_0}^{t} C_0(t,\tau)\sigma(\tau)\dot{\theta}(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Взяв первый интеграл по частям с учетом $C_0(t,t) = 0$, получим

$$\Delta\varepsilon_{п}(t,t_0) = -C(t,t_0)\sigma(t_0) - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau + \int_{t_0}^{t} C_0(t,\tau)\sigma(\tau)\dot{\theta}(\tau)d\tau. \tag{17}$$

Учитывая

$$\int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau = \int_{t_0}^{t} \theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau + \int_{t_0}^{t} C_0(t,\tau)\sigma(\tau)\dot{\theta}(\tau)d\tau,$$

имеем

$$\Delta\varepsilon_{п}(t,t_0) = -C(t,t_0)\sigma(t_0) - \int_{t_0}^{t} \theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{18}$$

добавляя начальную деформацию $C(t,t_0)\sigma(t_0)$, получаем уравнение для деформации ползучести:

$$\varepsilon_{п}(t,t_0) = -\int_{t_0}^{t} \theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{19}$$

Уравнение состояния в линейной постановке

$$\varepsilon(t,t_0) = \varepsilon_{у}(t) + \varepsilon_{п}(t,t_0) \tag{20}$$

содержит упругую деформацию $\varepsilon_у(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)}$ и

$$\varepsilon_у(t) = \varepsilon_у(t_0) + \Delta\varepsilon_у(t, t_0), \tag{21}$$

где приращение $\Delta\varepsilon_у(t, t_0)$ согласно (4) является наложением в момент t частичных приращений $\Delta\varepsilon_у(t, \tau_i)$.

Наложением частичных приращений $\Delta\varepsilon(t, \tau_i) = \Delta\varepsilon_у(t, \tau_i) + \Delta\varepsilon_п(t, \tau_i)$, отвечающих приращениям напряжений, получим линейное уравнение состояния стареющего материала при одноосном нагружении

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \theta(\tau)\sigma(\tau) \frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau. \tag{22}$$

Замечание 1. Равенство (19) можно получить и с помощью полного дифференциала деформации $\varepsilon_п(t, \tau) = C(t, \tau)\sigma(\tau)$:

$$d[C(t,\tau)\sigma(\tau)] = C(t,\tau)d\sigma(\tau) + \sigma(\tau)\left[\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial t} dt\right]. \tag{23}$$

Поскольку

$$\int_{t_0}^{t} C(t, \tau)d\sigma(\tau) = -C(t, t_0)\sigma(t_0) - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau = -\frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t} dt,$$

то при интегрировании (23) получим

$$\Delta\varepsilon_п(t, t_0) = -C(t, t_0)\sigma(t_0) - \int_{t_0}^{t} \theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

а добавлением деформации $C(t, t_0)\sigma(t_0)$ равенство (19).

Приращение упругих деформаций

$$\Delta\varepsilon_у(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} d\varepsilon_у(\tau) = \varepsilon_у(t) - \varepsilon_у(t_0), \tag{24}$$

а добавляя деформацию $\varepsilon_у(t_0)$, получим $\varepsilon_у(t, t_0) = \varepsilon_у(t)$.

В [12] уравнение (22) предлагается выводить с помощью полного дифференциала порожденной простым нагружением деформации $\varepsilon(t, \tau)$, представленной в виде

$$\varepsilon(t, \tau) = \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} + C(t, \tau)\sigma(\tau). \tag{25}$$

Действительно, $d\varepsilon(t, \tau) = d\varepsilon_у(\tau) + d[C(t, \tau)\sigma(\tau)]$, поэтому согласно замечанию 1 и (24) добавлением деформации $\varepsilon_у(t_0) + C(t, t_0)\sigma(t_0)$ получим уравнение (22).

Таким образом, предлагаемый способ представляет другой подход для вывода уравнения состояния и, по существу, формально реализует принцип наложения частичных деформаций. Отметим, что этот подход не связан с ключевой в принципе суперпозиции взаимонезависимостью частичных приращений и отражает реальное свойство деформирования.

Наряду с равенством (25), деформация $\varepsilon(t, \tau)$ представляется в виде [2–4]

$$\varepsilon(t, \tau) = \frac{\sigma(\tau)}{E(t)} + C^*(t, \tau)\sigma(\tau). \tag{26}$$

Согласно (25) и (26)

$$C^*(t, \tau) = C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)}. \tag{27}$$

Это означает, что эволюция модуля $E(\tau)$ отнесена к мере ползучести. В результате при мере $C^*(t,\tau)$ и $E(\tau) = \text{const}$ материал полагается нестареющим (идеальным), поэтому согласно (9) и (27)

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau; \tag{28}$$

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}d\tau - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{29}$$

Замечание 2. Из сравнения равенств (28) и (29) явствует, что вид уравнения состояния определяется выбором мер $C^*(t,\tau)$ и $C(t,\tau)$ [14]. Следует подчеркнуть, что прибавление к определяемой равенством (25) мере задаваемой равенством $C_E(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)}$ меры эволюции $E(\tau)$ служит в [3; 4] для представления уравнения состояния в виде (28) по аналогии с известным уравнением идеального материала.

Эволюция $E(\tau)$ вызывает изменение упругой деформации на величину $J = \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}d\tau$ упругого последействия и тем самым

$$\varepsilon_{\text{у}}(t) - \varepsilon_{\text{у}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}d\tau. \tag{30}$$

Равенствам (25), (26) соответствуют уравнения (28), (29) и

$$(t,t_0) = \varepsilon_{\text{у}}(t_0) + \varepsilon_{\text{п}}(t,t_0); \tag{31}$$

$$\varepsilon(t,t_0) = \varepsilon_{\text{у}}(t) + \varepsilon^*_{\text{п}}(t,t_0). \tag{32}$$

С учетом (30) имеем

$$\varepsilon(t,t_0) = \varepsilon_{\text{у}}(t) - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}d\tau + \varepsilon_{\text{п}}(t,t_0)\,, \tag{33}$$

и согласно (31)–(33) уменьшение деформации $\varepsilon^*_{\text{п}}(t,t_0)$ на величину *J* компенсируется прибавлением к $\varepsilon_{\text{у}}(t)$ величины –*J*. В результате этой операции получим уравнение

$$\varepsilon(t,t_0) = \varepsilon_{\text{у}}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau,$$

эквивалентное (29).

В [12] как основной закон линейной ползучести приводится уравнение [15]

$$\varepsilon(t,t_0) = \delta(t,t_0)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^{t} \delta(t,\tau)d\sigma(\tau), \tag{34}$$

где $\delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)$.

Интегрированием по частям уравнение сводится к (29). Полагая в нем слагаемое –*J* лишним, авторы [12] утверждают, что «принцип наложения является основополагающей ошибкой в теории ползучести». К наличию этого необходимого при мере $C(t,\tau) = C^*(t,\tau) + \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)}$ слагаемого принцип не имеет отношения. На графике функции $\varepsilon_{\text{у}}(t) = \frac{\sigma(\tau)}{E(t)}$ (рис. 1 [12]) прямая $\varepsilon_{\text{у}}(t) = \frac{\sigma_0}{E(t_0)}$ интерпретируется результатом применения принципа наложения, а согласно уравнению (34) при $\sigma(\tau) = \sigma_0$ получается

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{\sigma_0}{E(t_0)} + \left[C^*(t,\tau) + \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(t_0)}\right]\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{E(t)} + C^*(t,\tau)\sigma_0.$$

Это означает, что противопоставляемая этому принципу кривая $\varepsilon_у(t) = \frac{\sigma_0}{E(t)}$ получается как раз наложением в момент t частичных деформаций $\Delta\varepsilon_у(t,\tau_i) = \frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(t)}$; $\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(t)} = \sigma_0$; $\tau_i < \tau_{i+1}$; $0 \le i < n-1$.

Согласно (5) и (27) имеет место равенство

$$C\theta(t)f(t-\tau) = C^* f(t-\tau) + \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)}. \tag{35}$$

При $\tau = 28$ сут. (для бетона) полагают $\theta(28) = 1$. Принимая $f(t-\tau) = 1 - e^{-\gamma(t-\tau)}$, получим

$$C\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] = C^*\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] + \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)},$$

переходом к пределу $t \to \infty$ соотношение между C и C^*

$$C = C^* + \frac{1}{E(\infty)} - \frac{1}{E(28)}. \tag{36}$$

Замечание 3. Мультипликативная форма меры ползучести $C(t,\tau) = C\theta(t)f(t-\tau)$, непосредственно учитывающая влияние старения на упругую и запаздывающую деформации, в отличие от ее вида $C(t,\tau) = C^*(t,\tau) + \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)}$, является естественной. Она более удобна в приложениях, к тому же, соответствуя уравнению (22) (без лишнего, по мнению авторов [12], слагаемого *J*), исключает некорректное заявление об ошибочности принципа наложения.

Уравнения состояния в нелинейной постановке

Линейные уравнения состояния не учитывают экспериментально наблюдаемую нелинейность диаграмм $\sigma - \varepsilon$ и, как впервые отметил А.А. Гвоздев, не пригодны для теории железобетона. Принимая линейную зависимость мгновенных деформаций от напряжений, он полагал запаздывающие деформации нелинейными и состоящими из двух компонент: линейной и нелинейной, возникающей в результате структурных повреждений. Уравнение состояния в двухкомпонентной теории ползучести представлено в виде [16]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \frac{R(t)}{E(t)}\int_{\tau_1}^{t} S(\tau)K(t,\tau)d\tau + \int_0^{\max S} f(S)F[T(S,t)]dS, \tag{37}$$

где $\max S$ – максимальное значение уровня напряжений, достигнутое к моменту времени t; $R(t)$ – прочность; T – суммарная длительность действия этого уровня к моменту t; $K(t,\tau)$ – ядро ползучести, определяющее линейную компоненту деформации ползучести.

В отличие от линейной, нелинейная компонента деформации ползучести не подчиняется принципу наложения.

В.М. Бондаренко [1] полагал зависимость мгновенных деформаций от напряжений также нелинейной и в соответствии с этим вывел следующее нелинейное уравнение состояния:

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{S_м[\sigma(t)]}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} S_п[\sigma(\tau)]\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{38}$$

где $S_м[\sigma(t)]$ и $S_п[\sigma(\tau)]$ – нелинейные функции напряжений мгновенной и запаздывающей деформаций. В [13] и [17] приведено без вывода (ссылаясь на нелинейные диаграммы Еврокода) уравнение состояния

$$\varepsilon(t,t_0) = f_2[\sigma(t)] - \int_{t_0}^{t} f_1[\varepsilon_м(\tau)]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{39}$$

где $\sigma(\tau) = f_1[\varepsilon_м(\tau)]$ и $\varepsilon_м(\tau) = f_2[\sigma(\tau)]$ представляют прямую и обратную функции нелинейной диаграммы $\sigma - \varepsilon$.

Согласно (39) в уравнении состояния наряду с нелинейной зависимостью от напряжений $\varepsilon_м(\tau)$ деформация ползучести $\varepsilon_п(t,\tau)$ полагается линейной.

Замечание 4. Уравнение (39) сводится к линейному дифференциальному уравнению [13], согласно решению которого гипотеза линейной ползучести приводит к уменьшению оценок деформаций в расчетах на долгосрочную безопасность сооружений.

В статистической теории прочности расчетная модель структуры бетона представляется набором частиц (зерен), соединенных неравновесными связями, прочность которых является случайной величиной. Прочность связей существенно ниже прочности зерен, и накопление повреждений в бетоне рассматривается как процесс постепенного разрушения этих связей. Данная модель поведения бетона восходит к Вейбулу [18] и получила развитие в [19–21]. Полагается, что связи деформируются линейно, модули деформаций у них одинаковы, поэтому диаграмма деформирования бетона линейна в процессе нагружения.

Нелинейность деформаций от нагрузки $N(\tau)$, наблюдаемая в экспериментах, связывается с постепенным разрушением более слабых связей и перераспределением нагружения на целые в момент τ более сильные связи. Это вызывает уменьшение способной к силовому сопротивлению площади нормального сечения $A(\tau)$ и рост напряжения в оставшихся связях. Диаграммы получаются нелинейными, поскольку при их построении используются напряжения, найденные по площади сечения A:

$$\sigma(\tau) = \frac{N(\tau)}{A}. \tag{40}$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_c(\tau) = \frac{N(\tau)}{A(\tau)} \tag{41}$$

названо структурным, а усредненное напряжение $\sigma(\tau)$, вычисленное в предположении работоспособности всей площади, – расчетным [22; 23]. Согласно (40) и (41)

$$\sigma_c(\tau) = \frac{A}{A(\tau)}\sigma(\tau) = S_0(\tau)\sigma(\tau). \tag{42}$$

Функция $S_0(\tau) = \frac{A}{A(\tau)}$, учитывающая разрушение связей, есть функция напряжений [2].

Например, в форме П.И. Васильева [11]

$$S_0(\tau) = 1 + v\left[\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}\right]^m, \tag{43}$$

где v и m – эмпирические параметры.

Перераспределение напряжений, порождающее нелинейность деформаций, вызывает взаимозависимость последних от частичных приращений напряжений $\Delta\sigma(\tau_i)$, потому что эффект каждого догружения $\Delta\sigma(\tau_i)$ в момент t определяется площадью $A(\tau_i)$, зависящей от всех догружений $\Delta\sigma(\tau_j)$; $j \leq i$.

Уравнение состояния представляет НДС целых на промежутке $[t_0, t]$ звеньев, образующих часть V_t элемента V.

Рассмотрим часть V_τ элемента V, состоящую из целых звеньев в момент τ.

Под действием неубывающего нагружения часть V_τ в момент t уменьшается до V_t, образованной совокупностью оставшихся целых звеньев. Деформации частей V_t и V_τ под действием $\sigma_c(\tau)$ совпадают. Приращения $\Delta\sigma_c(\tau_i)$ не разрушают звенья V_t, и именно это влечет независимость величины

$$\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t, \tau_i) = \mathrm{C}_0(t, \tau_i)\Delta\sigma_c(\tau_i) \tag{44}$$

от остальных приращений $\Delta\sigma_c(\tau_j)$; $j \neq i$, а потому

$$\Delta\varepsilon_{\text{п}}(t, t_0) = \sum_{i=1}^{n} C_0(t, \tau_i)\Delta\sigma_c(\tau_i). \tag{45}$$

Соотношение (45) является аналогом принципа наложения Л. Больцмана в нелинейной постановке. С помощью приведенных в линейной постановке построений уравнение нестареющего материала в нелинейной постановке [24; 25]

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma_c(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma_c(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau; \tag{46}$$

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S_0(t)\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}S_0(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{47}$$

Для стареющего материала рассматриваем частичные приращения

$$\Delta\varepsilon_{п}(t,\tau_i)=C_0(t,\tau_i)\Delta\,\tilde{\sigma}_c(\tau_i);$$

$$\tilde{\sigma}_c(\tau_i)=\theta(\tau_i)\sigma_c(\tau_i)=R(28)\eta_c(\tau_i),$$

где $\eta(\tau_i)$ – уровень структурного напряжения.

Повторением построений в линейной постановке выводим уравнение состояния для стареющего материала

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma_c(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\theta(\tau)\sigma_c(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{48}$$

Упругая деформация в нелинейной постановке

$$\varepsilon_{у}(t)=\frac{\sigma_c(t)}{E(t)}=\frac{S_0(t)\sigma(t)}{E(t)}=\frac{[1+\alpha(t)]\sigma(t)}{E(t)}=\frac{\sigma(t)}{E(t)}+\frac{\alpha(t)\sigma(t)}{E(t)},$$

где $\alpha(t)=v\left[\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}\right]^m$.

Из (37) вытекает, что нелинейная часть $\varepsilon_{ун}(t)$ деформации $\varepsilon_{у}(t)$ должна соответствовать последнему слагаемому в его правой части.

Поскольку за малый промежуток времени $t-t_0$ величина $\Delta\varepsilon_{п}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C_{н}(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau$ также мала, то предположение, что отмеченное слагаемое представляет кратковременную ползучесть, влечет допущение, что $C(t,t)\neq 0$, и тем самым принятие $k<1$ в функции $f(t-\tau)$. На самом деле начальный всплеск практически реализуется за счет деформации $\varepsilon_{мн}(t_0)=\alpha(t_0)\frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}$, отвечающей приросту напряжения $\sigma(\tau)$ на целых звеньях бетонного элемента.

Замечание 6. Соотнесение в [16] деформации $\varepsilon_{ун}(t)$ в разряд деформации ползучести отмечено в [12].

Релаксационные задачи

Расчет железобетонных конструкций связан с определением напряжений в бетоне и арматуре по известным в них деформациям и приводит к необходимости решения релаксационных задач [16]. Перераспределение напряжений между бетоном и арматурой значительно влияет на их напряженно-деформированное состояние.

Стандартным методом решения релаксационных задач является определение ядра релаксации, сопряженное с медленно сходящимся рядом. Применение преобразования Лапласа в сочетании с методом малого параметра трудоемко [16]. В данной работе задача релаксации напряжений в бетоне решается сведением интегрального уравнения состояния к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. При этом существенно, что в линейной и нелинейной постановках структура уравнения одинакова. Кроме того, из соотношения $C(t,\tau)=\frac{\varphi(t,\tau)}{E(t)}$, где $\varphi(t,\tau)=E(28)C_0(t,\tau)$ – характеристика ползучести без учета старения, следует равенство

$$C(t,\tau)=\frac{E(28)}{E(\tau)}C_0(t,\tau).$$

Это позволяет определить общую функцию старения для мгновенных и запаздывающих деформаций:

$$\theta(\tau)=\frac{E(28)}{E(\tau)}=\frac{C(t,\tau)}{C_0(t,\tau)}. \tag{49}$$

Согласно (22) при $C_0(t,\tau) = C(\infty,28)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \gamma C(\infty,28)E(28)\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau.$$

Обозначим $\varepsilon_{у}(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}$ и, учитывая, что предельная характеристика ползучести $\varphi = C(\infty,28)E(28)$, получим

$$\varepsilon(t,t_0) = \varepsilon_{у}(t) + \gamma\varphi e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t}\varepsilon_{у}(\tau)e^{\gamma\tau}d\tau. \quad (50)$$

Сведем интегральное уравнение состояния в дифференциальную форму. Умножим правую и левую части (49) на $e^{\gamma t}$:

$$e^{\gamma t}\varepsilon(t,t_0) = e^{\gamma t}\varepsilon_{у}(t) + \gamma\varphi\int_{t_0}^{t}\varepsilon_{у}(\tau)e^{\gamma\tau}d\tau \quad (51)$$

и продифференцируем (50) по t с учетом $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau = f(t)$. Получим

$$e^{\gamma t}[\dot\varepsilon(t) + \gamma\varepsilon(t)] = e^{\gamma t}\left[\dot\varepsilon_{у}(t) + \gamma\varepsilon_{у}(t)\right] + \gamma\varphi e^{\gamma t}\varepsilon_{у}(t).$$

Или

$$\dot\varepsilon_{у}(t) + b\varepsilon_{у}(t) = \dot\varepsilon(t) + \gamma\varepsilon(t);\, b = \gamma(1+\varphi). \quad (52)$$

Общим решением однородного уравнения $\dot\varepsilon_{у}(t) + b\varepsilon_{у}(t) = 0$ является $\varepsilon_{у0}(t) = Ce^{-bt}$, а общее решение (51) находим методом вариации произвольной постоянной, представляя его в виде $\varepsilon_{у}(t) = C(t)e^{-bt}$ и подставляя его в (51), получим

$$\dot C(t)e^{-bt} - bC(t)e^{-bt} + bCe^{-bt} = \varphi_0(t);$$

$$\varphi_0(t) = \dot\varepsilon(t) + \gamma\varepsilon(t);\ \dot C(t)e^{-bt} = \varphi_0(t) \text{ и } C(t) = \int e^{bt}\varphi_0(t)dt = \Phi_0(t) + C.$$

Тем самым общее решение (51)

$$\varepsilon_{у}(t) = Ce^{-bt} + e^{-bt}\Phi_0(t) = Ce^{-bt} + \Phi(t);\ \Phi(t) = e^{-bt}\Phi_0(t). \quad (53)$$

Согласно (50) имеем $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_{у}(t_0)$ и $\varepsilon(t_0) = \Phi(t_0) + Ce^{-bt}$, откуда $C = [\varepsilon(t_0) - \Phi(t_0)]e^{bt}$.

Итак,

$$\varepsilon_{у}(t) = [\varepsilon(t_0) - \Phi(t_0)]e^{-b(t-t_0)} + \Phi(t); \quad (54)$$

$$\sigma(t) = E(t)[\varepsilon(t_0) - \Phi(t_0)]e^{-b(t-t_0)} + E(t)\Phi(t). \quad (55)$$

В нелинейной постановке уравнение (48) с помощью проведенных для уравнения (22) операций также сводится к уравнению (51), поэтому

$$\sigma_c(t) = E(t)[\varepsilon(t_0) - \Phi(t_0)]e^{-b(t-t_0)} + E(t)\Phi(t). \quad (56)$$

По найденному формулой (55) структурному напряжению $\sigma_c^*(t)$ искомое расчетное напряжение $\sigma^*(t)$ определяется решением уравнения

$$S_0[\sigma(t)]\sigma(t) = \sigma^*(t). \quad (57)$$

Рассмотрим модельные случаи деформаций.

1. $\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0$.

Имеем $\varepsilon_{уч}(t) = \frac{\gamma\varepsilon_0}{b} = \frac{\varepsilon_0}{1+\varphi}$ и согласно (54)

$$\sigma(t) = \frac{E(t)\varepsilon_0\varphi e^{-\gamma(1+\varphi)(t-t_0)}}{1+\varphi} + \frac{E(t)\varepsilon_0}{1+\varphi}. \quad (58)$$

2. $\varepsilon(t) = V(t - t_0)$.

При $\varphi_0(t) = V(1 + \gamma(t - t_0))$ частное решение уравнения (51) ищем в виде

$$\varepsilon_{уч}(t) = M(t - t_0) + N,$$

поэтому

$$bM(t - t_0) + M + bN = V\gamma(t - t_0) + V; \quad bM = V\gamma; \quad M = \frac{V}{1+\varphi}; \quad M + bN = V;$$

$$N = \frac{V-M}{b} = \frac{V\varphi}{\gamma(1+\varphi)^2}.$$

Тем самым

$$\varepsilon_{уч}(t) = \frac{V(t-t_0)}{1+\varphi} + \frac{V\varphi}{\gamma(1+\varphi)^2}$$

и

$$\sigma(t) = -\left[\frac{E(t)V\varphi}{\gamma(1+\varphi)^2}\right] e^{-\gamma(1+\varphi)(t-t_0)} + \frac{E(t)V(t-t_0)}{1+\varphi} + \frac{E(t)V\varphi}{\gamma(1+\varphi)^2}. \quad (59)$$

В нелинейной постановке равенствами (57), (58) определяются структурные напряжения, а расчетные напряжения – решением уравнения (56).

Заключение

На основе концепции прочностной структуры бетона, статистического распределения прочности его фракций модифицируется известный в линейной теории ползучести принцип суперпозиции Л. Больцмана. С опорой на данную модификацию выводится нелинейное уравнение механического состояния материала.

Нелинейная зависимость деформаций от напряжений является следствием разброса прочности связей.

Принцип наложения сформулирован Л. Больцманом для идеального нестареющего материала. При учете старения этот принцип реализуется относительно приращений расчетных и структурных напряжений.

Список литературы

1. *Boltzmann L.E.* Zur Theorie der Elastishen Nachwirkung // Wiener. 1874. Ber. 10. Pp. 275–306.

2. *Бондаренко В.М., Бондаренко С.В.* Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М.: Стройиздат, 1982. 287 с.

3. *Александровский С.В., Васильев П.И.* Экспереметальные исследования ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1976. С. 97–152.

4. *Арутюнян Н.Х.* Ползучесть стареющих материалов // Механика твердого тела. 1967. № 6. 200 с.

5. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

6. *Гвоздев А.А.* Замечание о нелинейной ползучести бетона при одноосном сжатии // Известия АН СССР. МТТ. 1972. № 5. С. 33.

7. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

8. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 419 с.

9. *Александровский С.В., Соломонов В.В.* Зависимость деформаций ползучести бетона от начального уровня напряжений // Межотраслевые вопросы строительства. Отечественный опыт: реферативный сборник. М., 1972. Вып. 6. С. 6–12.

10. *Назаренко В.Г.* Развитие основ теории расчета железобетонных конструкций с учетом особенностей режимного нагружения: дис. … д-ра техн. наук, М., 1988. 367 с.

11. *Васильев П.И.* К вопросу выбора феноменологической теории ползучести бетона // Ползучесть строительных материалов и конструкций. М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1964. С. 106–114.

12. *Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н., Манченко М.М.* Принцип наложения как основополагающая ошибка теории ползучести и стандартов по железобетону // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 92–104. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104

13. *Санжаровский Р.С., Манченко М.М.* Ползучесть бетона и его мгновенная нелинейность деформирования в расчетах конструкций и сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 2. С. 33–40.

14. *Назаренко В.Г., Звездов А.И., Ларионов Е.А., Квасников А.* Некоторые аспекты теории ползучести бетона // Журнал бетон и железобетон. 2021. № 1 (603). С. 40–43.

15. *Ciorino M.A.* Analysis structural effects time-dependent behavior of concrete an internationally harmonized format // Plenary Papers of All-Russian (International) Conference on Concrete and and Reinforced Concrete. 2014. Vol. 7. Pp. 338–350.

16. *Галустов К.З.* Нелинейная теория ползучести и расчет железобетонных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 248 с.

17. *Санжаровский Р.С.* Нелинейная наследственная теория ползучести // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 63–68.

18. *Wiebull W.* A statistical representation of fatigue failures in solids // Trsan. Roy. Inst. Techn. 1949. No 27. 51 p.

19. *Холмянский М.М.* Бетон и железобетон: деформативность и прочность. М.: Стройиздат, 1997. 576 с.

20. *Болотин В.В.* Некоторые вопросы теории хрупкого разрушения // Расчеты на прочность. 1962. Вып. 8. С. 36–52.

21. *Харлаб В.Д.* Обобщение вейбулловской статистической теории хрупкого разрушения // Механика стержневых систем и сплошных сред. 1987. № 11. С. 150–152.

22. *Бондаренко В.М., Ларионов Е.А.* Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 2. С. 16–22.

23. *Ларионов Е.А., Римшин В.И., Жданова Т.В.* Принцип наложения деформаций в теории ползучести // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 483–496. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-483-496

24. *Ларионов Е.А., Ларионов А.Е.* К теории нелинейной ползучести // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 58–65.

25. *Ларионов Е.А., Ларионов А.Е.* К теории нелинейной ползучести // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 4. С. 35–39.

26. *Василькова Н.Т., Башкатова М.Е., Ларионов Е.А.* Релаксация напряжений при осевом нагружении железобетонного бруса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 24–29.

27. *Larionov E., Zveryaev E.* Stress relaxation of construction elements // MATEC. Web of Conferences. 2017. No. 117. 00101.

28. *Persoz B.* Le principe de superposition de Boltzmann // Cahier groupe Franc, etudes rheol. 1957. Vol. 2. No. 1. Pp. 126–151.

29. *Sanjarovsky R.S., Ter-Emmnilyan T.N., Manchenko M.M.* Insolvent nays of development of the modern theory of reinforced concrete // Structural Mechanics of Engineering Construction and Buildings. 2018. Vol. 14. No. 5. Pp. 379–389. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-5-379-389

References

1. Boltzmann L.E. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Sitzungsberichte Kaiserliche Akademie Wissenhaft Wien Mathematische-Naturwissenhaft.* 1874;70:275–306.

2. Bondarenko V.M., Bondarenko S.V. *Engineering methods of the nonlinear theory of reinforced concrete.* Moscow: Stroyizdat Publ.; 1982. (In Russ.)

3. Aleksandrovskii S.V., Vasilev P.I. Experimental study of creep of concrete. *Creep and Shrinkage of Concrete and Reinforced Concrete Structures.* Moscow: Stroiizdat Publ.; 1976. p. 97–152. (In Russ.)

4. Arutyunyan N.Kh. Creep of aging materials. *Mechanics of Solids.* 1967;6:200. (In Russ.)

5. Arutyunyan N.H., Kolmanovskii V.B. *Theory of creep of inhomogeneous bodies*. Moscow: Nauka Publ.; 1983. (In Russ.)

6. Gvozdev A.A. Remark on the nonlinear theory of concrete creep under uniaxial compression. *Izvestiya AN SSSR, MTT.* 1972;(5):33. (In Russ.)

7. Rabotnov Yu.N. *Creep of construction elements.* Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.)

8. Rzhanitsyn A.R. *The creep theory*. Moscow; 1968. (In Russ.)

9. Aleksandrovskii S.V., Solomonov V.V. Dependence of creep deformations of concrete on the initial level of stress. *Intersectoral Issues of Construction. Domestic Experience: an Abstract Collection.* 1972;(6):6–12. (In Russ.)

10. Nazarenko V.G. *Development of the fundamentals of the theory of calculation of reinforced concrete structures taking into account the peculiarities of regime loading* (dissertation of the Doctor of Technical Sciences). Moscow; 1988. (In Russ.)

11. Vasilyev P.I. On the question of choosing a phenomenological theory of concrete creep. *Creep of Building Materials and Structures.* Moscow; 1964. p. 106–114. (In Russ.)

12. Sanjarovskii R.S., Ter-Emmanuilyan T.N., Manchenko M.M. Superposition principle as the fundamental error of the creep theory and standards of the reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2018;14(2):92–104. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104

13. Sanzarovsky R.S., Manchenko M.M. The creep of concrete and its instantaneous nonlinearity of deformation in the structural calculations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2015;(2):33–40. (In Russ.)

14. Nazarenko V.G., Zvezdov A.I., Larionov E.A., Kvasnikov A.A. Some aspects of the concrete creep theory. *Concrete and Reinforced Concrete Magazine.* 2021;(1(603)):40–43. (In Russ.)

15. *Ciorino M.A.* Analysis structural effects time-dependent behavior of concrete an internationally harmonized format. *Plenary Papers of All-Russian (International) Conference on Concrete and Reinforced Concrete.* 2014;7:338–350.

16. Galustov K.Z. *Nonlinear theory of concrete creep and calculation of reinforced concrete structures.* Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)

17. Sanjarovskii R.S. Non-linear hereditary creep theory. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(1):63–68. (In Russ.)

18. Wiebull W. A statistical representation of fatigue failures in solids. *Trsan. Roy. Inst. Techn.* 1949;27:51.

19. Kholmyanskiy M.M. *Concrete and reinforced concrete: deformability and strength*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1997. (In Russ.)

20. Bolotin V.V. Some questions of the theory of brittle fracture. *Strength Calculations.* 1962;(8):36–52 p. (In Russ.)

21. Kharlab V.D. Generalization of the Weibull statistical theory of brittle fracture. *Mekhanika Sterzhnevykh Sistem i Sploshnykh Sred*. 1987;(11):150–152.

22. Bondarenko V.M., Larionov E.A. Strains superposition principle when construction elements have structural damages. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2011;(2):16–22. (In Russ.)

23. Larionov E.A., Rimshin V.I., Zhdanova T.V. Principle of the overlay deformations in the theory of creep. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2019;15(6):483–496. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-483-496

24. Larionov E.A., Larionov A.E. Nonlinear creep theory. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions.* 2015;(2):58–65. (In Russ.)

25. Larionov E.A., Larionov A.E. The theory of nonlinear creep of materials. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions.* 2017;(4):35–39. (In Russ.)

26. Vasilkova N.T., Bashcatova M.E., Larionov E.A. Stress relaxation of reinforced concrete beam under axial load. *Structural Mechanics of Engineering Construction and Buildings.* 2012;(1):24–29.

27. Larionov E., Zveryaev E. Stress relaxation of construction elements. *MATEC. Web of Conferences.* 2017;117:00101.

28. Persoz B. Le principe de superposition de Boltzmann. *Cahier groupe Franc, etudes rheol.* 1957;2(1):126–151.

29. Sanjarovsky R.S., Ter-Emmnilyan T.N., Manchenko M.M. Insolvent nays of development of the modern theory of reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Construction and Buildings.* 2018;14(5):379–389. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-5-379-389