

ДЕРЕВЯННЫЕ ОБОЛОЧЕЧНЫЕ СТРУКТУРЫ WOODEN SHELL STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-664-678
 УДК 624.04.012

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Экономическая целесообразность учета совместной работы несущих и ограждающих элементов в большепролетных деревянных пространственных конструкциях

К.П. Пятикрестовский¹ , Б.С. Соколов² 

¹Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций имени В.А. Кучеренко, Москва, Российская Федерация

²Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт бетона и железобетона имени А.А. Гвоздева, Москва, Российская Федерация

✉ moo-shell@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 21 августа 2021 г.

Доработана: 14 ноября 2021 г.

Принята к публикации: 30 ноября 2021 г.

Для цитирования

Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С. Экономическая целесообразность учета совместной работы несущих и ограждающих элементов в большепролетных деревянных пространственных конструкциях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 664–678. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-664-678>

Аннотация. Большепролетные деревянные пространственные конструкции в виде куполов, разрабатываемые в АО «НИЦ „Строительство“» под руководством А.А. Погорельцева, построены в большом количестве для покрытий различных зданий. Такие конструкции обладают высокими показателями эффективности и продолжают совершенствоваться. В 2020 г. разработано «Пособие по учету совместной работы каркаса и ограждения в деревянных пространственных конструкциях зданий и сооружений» как дополнение к п. 9 СП 64.13330.2017, содержащее примеры расчета прочности и оптимизацию размеров сечения ребер, а также пример определения длительной прочности обшивки оболочки. Указанные конструкции, по сути, уникальные, проектируются пока в запас прочности без учета участия ограждающей части (панелей, настилов и др.) в восприятии нагрузок. Учет работы настила, особенно при воздействии несимметричных нагрузок, может привести к экономии материалов. Помимо приведенной теории нелинейного расчета оболочки авторами разработан расчет составных анизотропных панелей, работающих в условиях сложных напряженных состояний, то есть при двухосном сжатии (растяжении) и сдвиге. Расчет таких конструкций, как при кратковременных, так и при длительных нагрузках представляет известные трудности и требует введения непривычных для специалистов проектных организаций теорий прочности и критериев для их описания.

Ключевые слова: большепролетные конструкции, купола, клееная древесина, пластические деформации, сложное напряженное состояние, численные расчеты, метод интегрального модуля, длительная прочность, сдвигающие усилия

Пятикрестовский Константин Пантелеевич, доктор технических наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник, Центрального научно-исследовательского института строительных конструкций имени В.А. Кучеренко, Акционерное общество «Научно-исследовательский центр „Строительство“», Российская Федерация, 109428, Москва, 2-я Институтская ул., д. 6, корп. 1; ORCID: 0000-0002-4431-3899, eLIBRARY SPIN-код: 7983-5656; stroymex@list.ru

Соколов Борис Сергеевич, кандидат технических наук, заведующий лабораторией тонкостенных и пространственных конструкций, Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт бетона и железобетона имени А.А. Гвоздева, Акционерное общество «Научно-исследовательский центр „Строительство“», Российская Федерация, 109428, Москва, 2-я Институтская ул., д. 6, корп. 5; eLIBRARY SPIN-код: 4173-9045; moo-shell@mail.ru

© Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С., 2021

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

The economic feasibility of taking into account the joint work of load-bearing and enclosing elements in large-span wooden spatial structures

Konstantin P. Pyatikrestovsky¹, Boris S. Sokolov²

¹Research Institute of Building Constructions named after V.A. Koucherenko, Moscow, Russian Federation

²Research Institute of Concrete and Reinforced Concrete named A.A. Gvozdev, Moscow, Russian Federation

✉ moo-shell@mail.ru

Article history

Received: August 21, 2021

Revised: November 14, 2021

Accepted: November 30, 2021

For citation

Pyatikrestovsky K.P., Sokolov B.S. The economic feasibility of taking into account the joint work of load-bearing and enclosing elements in large-span wooden spatial structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):664–678. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-664-678>

Abstract. Large-span wooden spatial structures in the form of domes, developed in JSC Research Center of Construction under the leadership of A.A. Pogoreltsev, are built in large numbers for roofing various buildings. Such designs have high performance indicators and continue to improve. In 2020 the “Manual on accounting for the joint work of the frame and fencing in wooden spatial structures of buildings and structures” was developed as an addition to SP 64.13330.2017, containing examples of strength calculation and optimization of rib cross-section dimensions, as well as an example of determining the long-term strength of the shell cladding. These structures, in fact unique, are designed so far in the margin of safety without taking into account the participation of the enclosing part (panels, decking, etc.) in the bearing loads. Taking into account the work of the decking, especially when exposed to asymmetric loads, can lead to material savings. In addition to the above theory of nonlinear shell calculation, the authors have also developed a calculation of composite anisotropic panels operating under complex stress conditions, i.e. under biaxial compression (tension) and shear. The calculation of such structures under both short-term and long-term loads presents certain difficulties and requires the introduction of strength theories and criteria for their description that are unusual for specialists of design organizations.

Keywords: large-span structures, glued wood domes, plastic deformations, complex stress state, numerical calculations, integral module method, long-term strength, shear forces

Введение

В течение трех последних десятилетий сформировалось производство крупных клееных деревянных конструкций, благодаря которому стало возможным проектирование и строительство большепролетных зданий и сооружений, в частности куполов. Количество таких зданий уже исчисляется многими сотнями [1]. Идет отработка всех этапов строительства, изучение возможностей новых типов соединений, защиты элементов конструкций от повреждений и др.

Конструкции куполов диаметром до 100 м, как правило, образуются из каркаса в виде арок, брусев и элементов ограждения – плит или настилов. При этом плиты и настилы закрепляются к каркасу и в дальнейшем вовлекаются в совместную работу с ним. Однако по ряду причин эта совместная работа при проектировании пока не учитывается и часть силового сопротивления системы не используется. В куполах основные ребра каркаса – меридиональные – по устоявшейся традиции принимаются высотой сечения 1/40 пролета и при проектировании с учетом работы плит, заполняющих ячейки между ребрами, остаются недогруженными. В [2] показано, что меридиональные ребра конического купола могут иметь высоту сечения 1/70 пролета, что приводит к экономии материалов ребер до 25 %. При проектировании и строительстве крытого катка в Москве ребра между диафрагмами коротких цилиндрических оболочек выполнены при высоте сечения 1/52,5 пролета, равного 42 м. Объект успешно эксплуатируется в течение 38 лет (это был первый, опытный образец). Эксперименты на моделях и расчет методом интегрального модуля деформаций показали, что при длительных нагрузках можно допускать пластические деформации ползучести наиболее напряженных элементов [3]. В предлагаемой работе выполнены численные ис-

Konstantin P. Pyatikrestovsky, Dr.Sc., senior researcher, executive researcher, Research Institute of Building Constructions named after V.A. Koucherenko, JSC Research Center of Construction; 6 2-ya Institutskaya St, Moscow, 109428, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-4431-3899, eLIBRARY SPIN-code: 7983-5656; stroyemx@list.ru

Boris S. Sokolov, Ph.D. in Engineering, Head of the Laboratory for Thin-Walled and Spatial Structures, Research Institute of Concrete and Reinforced Concrete named A.A. Gvozdev, JSC Research Center of Construction, 6 2-ya Institutskaya St, Moscow, 109428, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7983-5656; moo-shell@mail.ru

следования купола диаметром 60 м при высоте сечения ребер 1/60 пролета вместо 1/40 при длительных нагрузках до 50 лет. Учитывалось снижение нагрузок в отсутствие снега в летнее время. Согласно нашим ранним публикациям, нелинейный расчет определяет силовое сопротивление конструкции с учетом линейной ползучести (первая стадия ползучести по А.Р. Ржаницыну) и установившейся (вторая стадия).

Методика нелинейного расчета плоскостного каркаса из клееной древесины совместно с тонкими обшивками подробно опубликована в многочисленных статьях применительно к различным расчетным ситуациям в процессе ее отработки, а также в [3]. В основу методики расчета положен метод интегрального модуля деформаций, разработанный В.М. Бондаренко применительно к железобетонным конструкциям, и приспособлен нами к расчету деревянных конструкций с учетом специфики свойств и работы древесины в конструкции разработанная методика отличается оригинальностью и может рассматриваться как новая теория. Применение этого метода позволяет путем итерационного процесса проследить изменение НДС конструкций при нелинейном и неравновесном длительном деформировании, учесть процесс перераспределения усилий как в отдельных поперечных сечениях, так и по длине меридиональных ребер. Этот метод дает возможность линеаризовать процесс расчета и применять на каждом этапе последовательных приближений теорему Бетти о взаимности работ, теоремы Максвелла о взаимности перемещений, формулы Мора для перемещений. При этом линеаризация сохраняет связь характеристик жесткости с уровнем нагружения. Временная фиксация учитывает влияние режима и длительности нагружения. Диаграмма работы древесины, полученная экспериментально, показана на рис. 1. В качестве аппроксимирующей функции для нелинейного соотношения $\sigma = f(\varepsilon)$ принято уравнение

$$\sigma = E_0 \varepsilon - \frac{E_0^2}{4 \sigma_{\text{III}}} \varepsilon^2. \quad (1)$$

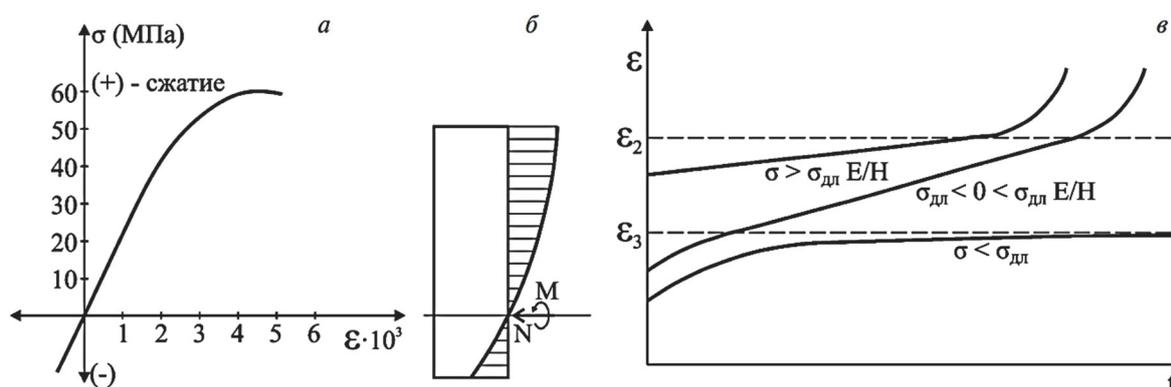


Рис. 1. Диаграмма деформирования древесины:

a – при сжатии – растяжении; *б* – при кратковременном изгибе; *в* – деформирование при длительном действии постоянной нагрузки

Figure 1. A test of deforming wood:

a – under compression and tension; *б* – under short-time bending; *в* – deformation under long period action of constant load

Уравнения механического состояния составляются применительно к трем стадиям ползучести, согласно А.Р. Ржаницыну [4].

Многочисленные расчеты показали, что в диапазоне расчетных напряжений конструкции, как правило, работают в первой стадии – линейной ползучести, хотя допущение не уменьшает общности решения и легко возможен переход во вторую стадию – установившейся ползучести, имеются выражения для определения времени перехода и уравнение механического состояния для этого случая.

В методе интегральных оценок процесс последовательных приближений является способом интегрального уточнения внутренних усилий и напряжений, трансформирующихся во времени вследствие их перераспределения с более нагруженных участков на менее нагруженные.

В статически неопределимых конструкциях, у которых распределение усилий обусловлено характером изменения жесткости, помимо процесса внутренних итераций, требуемого для уточнения жесткостей, необходим сочетающийся с ним процесс внешних итераций, уточняющий по данным жесткостям

закон распределения усилий. Сочетание процессов внутренних и внешних итераций в решении задачи о напряженном и деформированном состояниях заключается в следующем:

1) в обычной упруго-линейной постановке рассчитывается заданная статически неопределимая система и строятся эпюры внутренних усилий (нулевое приближение);

2) назначаются сечения, в которых по данным об усилиях нулевого приближения уточняются расчетные жесткости (снижается модуль деформаций);

3) по новому закону распределения жесткостей повторяется статический расчет системы с учетом переменности расчетных жесткостей вдоль пролетов. Этим уточняются эпюры распределения усилий вдоль осей системы (первое приближение);

4) по усилиям первого приближения вновь уточняются расчетные жесткости, а по ним находятся эпюры усилий во втором приближении и т. д. до стабильной сходимости с заданной степенью точности.

Для учета переменности жесткостей стержней каждый элемент статически неопределимой системы делится на несколько участков, в пределах которых жесткость считается постоянной и равной среднему значению жесткости граничных зон участка. Приведенный модуль деформаций определяется как среднеарифметическое нескольких промежуточных участков.

Изменения внешней нагрузки во времени при расчете приводятся к ступенчатой схеме таким образом, что в пределах каждого из интервалов нагрузка и все характеристики НДС считаются постоянными. Это же относится к изменчивости физико-механических свойств материалов.

Для наиболее распространенного в конструкциях сжато-изгибаемого деревянного элемента можно рассмотреть по аналогии с выводом уравнений для определения длительного модуля деформаций следующий подход. Оценивая реальную деформативность элементов и вместе с тем не оперируя различными модулями деформаций в каждом дискретном слое, можно записать отклонение значений реальных деформаций ε и деформаций $\varepsilon_{\text{ин}}$, определенных с помощью $\varepsilon_{\text{ин}}(x, t)$. Суть интегральной оценки состоит в минимизации отклонения, которая осуществляется для сечения в целом, и после выполнения ряда преобразований выражения для искомого модуля деформаций получается следующее соотношение для первой стадии деформирования (линейная ползучесть):

$$E_{\text{ин}}(x, t) = \Phi(\varepsilon_{\Phi}^A, \vartheta, a) \frac{E_0 - \frac{E_0^2 \varepsilon_{\Phi}^A}{4\sigma_{\text{ин}}}}{1 + \vartheta t^{0,21}} \left[1 + \sum_{i=1}^k \frac{\Delta\sigma_i (1 + \vartheta(t - t_i)^{0,21})}{4\sigma_{\text{ин}} (1 - \frac{E_0}{4\sigma_{\text{ин}}} \varepsilon_{i-1}^a)^2 (1 + \vartheta t^{0,21})} \right]^{-1}, \quad (2)$$

где

$$\Phi(\varepsilon_{\Phi}^A, \vartheta, a) = \frac{1}{1 - \frac{E_0 \varepsilon_{\Phi}^A}{4\sigma_{\text{ин}}}} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^3 - 100\varepsilon_{\Phi}^A \left(1 - \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^4\right)}{1 + \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^3 - 50\varepsilon_{\Phi}^A \left(1 - \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^4\right)}, \quad (3)$$

ε_{Φ}^A – фибровая (наибольшая) относительная деформация на этапе нагружения; $\Delta\sigma_i$ — приращение напряжений на этапе нагружения; b – коэффициент, учитывающий изменение влажности древесины (в случае необходимости); a и b – расстояния от нейтральной оси внецентренно сжатого элемента до его верхней и нижней граней соответственно; ε_{i-1}^A – суммарное значение мгновенных (кратковременных) приращений относительных деформаций; $\sigma_{\text{ин}}$ – кратковременный предел прочности древесины; $\sigma_{\text{ин}} = 55,0$ МПа.

Для проверки принятых расчетных положений проведены экспериментальные исследования основных типов оболочек покрытий зданий, а также конструкций инженерных сооружений и жилых домов при несимметричных нагрузках, когда наиболее отчетливо проявляются перераспределение усилий и нелинейные деформации, в том числе при запроектных нагрузках.

Краткое описание исследуемых конструкций

Схема ребристо-кольцевого купола показана на рис. 2. Диаметр купола 60 м, высота 20 м. Ребра из клееной древесины меридиональные располагаются с шагом 3,926 м по железобетонному опорному кольцу. В вершине купола ребра крепятся к металлическому фонарному кольцу. Ребра через одно приняты укороченными вследствие уменьшения напряжений из-за сгущения ребер. Высота ребер принята равной $1/60$ диаметра, то есть 1000 мм, ширина 140 мм.

Кольцевые ребра сечением bh 140×200 мм располагаются с шагом 2,464 м ортогонально к меридиональным ребрам.

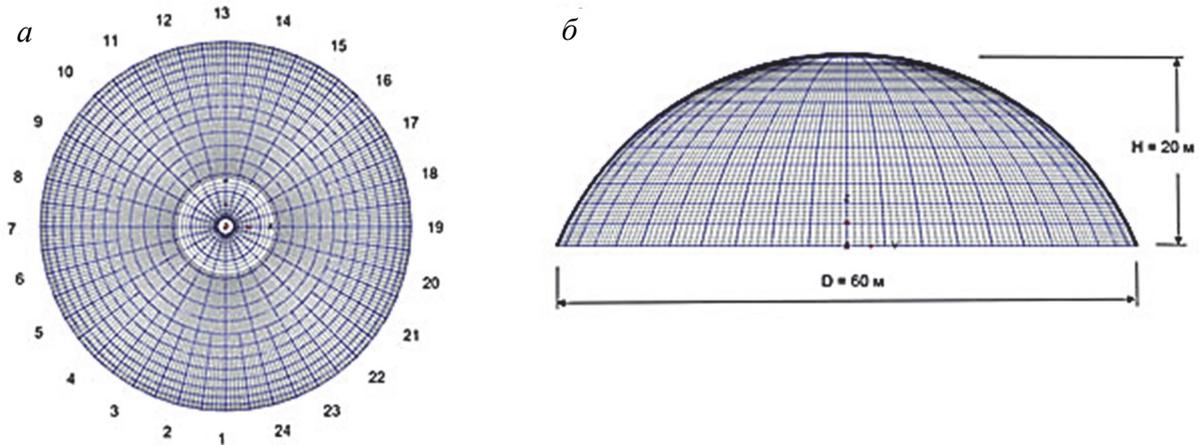


Рис. 2. Схема ребристо-кольцевого купола:

a – план; *б* – фасад

Figure 2. A configuration of rib-and-annular dome:

a – a plan; *б* – a facade

Ячейки между ребрами заполняются дощато-гвоздевыми плитами с опиранием на черепные бруски. В угловых зонах зазоры ячеек между плитами и ребрами заполняются полимерцементным раствором (рис. 3). Плиты заполнения ячеек выполняются из двух слоев досок толщиной 25 мм. При этом оказалось возможным обеспечить приведенную к сплошной толщину плит, равную 40 мм. Расчеты выполняли также и для приведенной толщины плит 20 мм.

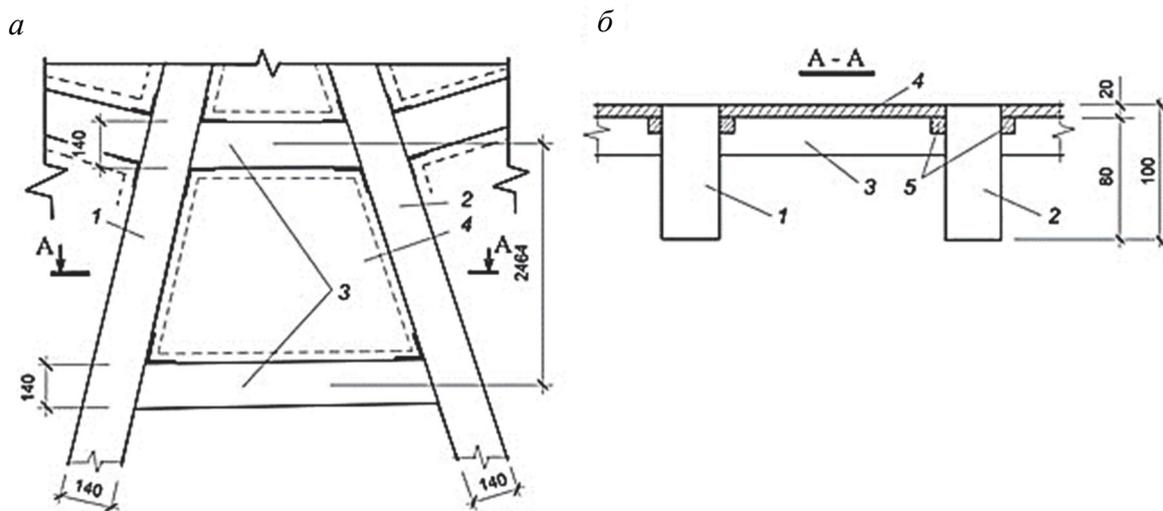


Рис. 3. Схема опирания плит на каркас купола:

a – план; *б* – разрез; 1, 2 – радиальные ребра; 3 – кольцевые ребра

Figure 3. An outline of resting plates on the frame of the dome:

a – a plan; *б* – a cross-section; 1, 2 – the radial ribs; 3 – the annular ribs

Расчеты конструкций в режиме реального времени выполнены методом конечных элементов с использованием программного комплекса MicroFe с контролем НДС обшивок при помощи критериев прочности Г.А. Гениева.

Программа нагружения при численных расчетах показана на рис. 4. Нагрузка принята равномерно распределенной на левой половине купола (рис. 2). Режим приложения нагрузок в основном по возможности отражает сезонные изменения снеговой нагрузки и возможность неравномерного ее распределения по поверхности.

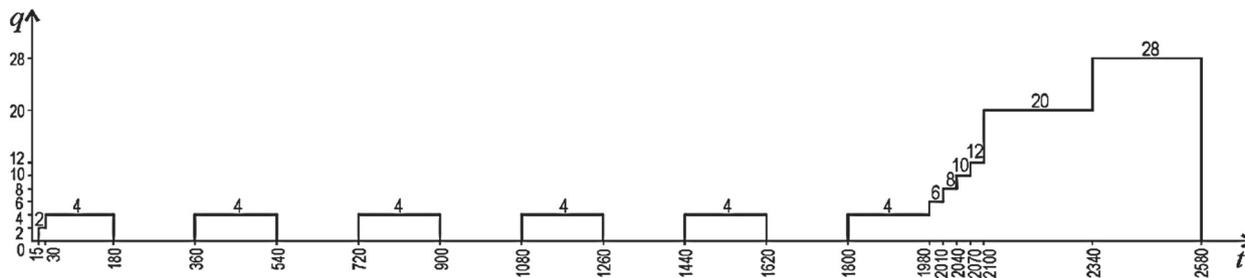


Рис. 4. Режим приложения нагрузок, кПа, сут.
Figure 4. A regime of load action, kPa, days

Таблица 1

Напряженно-деформированное состояние купола с обшивками толщиной 40 мм

Этапы нагружения	q , кПа	Время выдержки t	Напряжения в меридиональных ребрах σ , МПа	Напряжения сдвига τ , МПа	Максимальные прогибы U_z , мм	Интегральный модуль $E_{инт}$, МПа
1	Собственный вес	1 мин	0,0255	0,011	0	14 120
3	2	15 сут.	0,873	0,503	-3,5	14 109
5	4	180	1,45	0,97	-6,35	13 785
9	4	360	1,474	0,972	-6,54	13 715
13	4	720	1,46	0,972	-6,57	13 685
17	4	1080	1,453	0,972	-6,58	13 526
22	4	1620	1,451	0,971	-6,62	13 465
27	6	1980	2,02	1,446	-9,57	13 227
32	10	2070	3,20	2,378	-15,7	13 212
34	12	2100	3,776	2,847	-18,7	13 204
36	20	2340	6,126	4,66	-30,75	13 157
38	28	2580	8,46	6,519	-43,15	13 116
39	36	2580	10,67	8,37	-55,26	12 457

Table 1

A stress-strain state of the dome with sheathing of 40 mm thickness

Stages of loading	q , kPa	Time delay, t	Stresses in meridian ribs, σ , MPa	Shearing stresses, τ , MPa	Maximum deflections, U_z , mm	Integrated circuit module, $E_{инт}$, MPa
1	Собственный вес	1 мин	0,0255	0,011	0	14 120
3	2	15 сут.	0,873	0,503	-3,5	14 109
5	4	180	1,45	0,97	-6,35	13 785
9	4	360	1,474	0,972	-6,54	13 715
13	4	720	1,46	0,972	-6,57	13 685
17	4	1080	1,453	0,972	-6,58	13 526
22	4	1620	1,451	0,971	-6,62	13 465
27	6	1980	2,02	1,446	-9,57	13 227
32	10	2070	3,20	2,378	-15,7	13 212
34	12	2100	3,776	2,847	-18,7	13 204
36	20	2340	6,126	4,66	-30,75	13 157
38	28	2580	8,46	6,519	-43,15	13 116
39	36	2580	10,67	8,37	-55,26	12 457

Обработка результатов численных расчетов проводилась в соответствии с программой выявления влияния нелинейности деформаций, вызванных длительным действием нагрузки, сезонным изменением интенсивности нагрузки, выявлением особенностей совместной работы каркаса и заполнения его ячеек, особенностей перераспределения усилий при неравномерных нагрузках.

Основными характеристиками, принятыми при обработке результатов, являются меридиональные и кольцевые усилия в элементах каркаса, сдвигающие усилия и напряжения в обшивках, прогибы всей конструкции и изменения модулей деформации в зависимости от величины и времени действия нагрузок.

Характеристики НДС определялись последовательно при 39 этапах нагружения (табл. 1). Максимальное время приложения сезонных нагрузок принято равным 1980 сут., или 5,42 года. Далее нагрузка принималась ступенчато возрастающей для оценки возможностей запроектных условий работы конструкции.

Результаты расчетов

Исследовано поведение купола при односторонней нагрузке с интенсивностью, изменяющейся во времени. Имитировали отсутствие снеговой нагрузки в летний период, а в зимний период принимали ее интенсивность несколько завышенной по отношению к средней полосе европейской части России. Расчет методом интегрального модуля деформаций позволяет определять силовое сопротивление конструкций в любой момент ее эксплуатации при произвольно меняющейся нагрузке.

Таблица 2

Напряженно-деформированное состояние купола при постоянной односторонней нагрузке 3,2 кПа, толщина обшивок 20 мм

Этапы	Время выдержки, сут.	Максимальный изгибающий момент в меридиональных ребрах, M , кНм	Максимальные нормальные напряжения в меридиональных ребрах, σ_{mr} , МПа	Максимальные сдвигающие напряжения, τ , МПа	Прогиб, U_z , мм	Интегральный модуль деформаций $E_{ин}$, МПа
1	0	1380,0	1,527	2,03	13,3	14 399
2	1	1417,0	1,581	2,03	13,66	14 200
3	180	1428,0	1,582	2,04	13,72	14 027
4	730	1443,0	1,585	2,02	13,92	13 884
5	18 250	1462,0	1,590	2,03	14,27	13 186
				1,980	14,9	

Table 2

A stress-strain state of the dome under action of constant one-side load 3.2 KPa, the thickness is 20 mm

Stages	Time delay, t	Maximum bending moment in meridian ribs, M , kNm	Maximum normal stresses in meridian ribs, σ_{mr} , MPa	Maximum shearing stresses, τ , MPa	Deflection, U_z , mm	Integrated circuit module of deformations, $E_{ин}$, MPa
1	0	1380,0	1,527	2,03	13,3	14 399
2	1	1417,0	1,581	2,03	13,66	14 200
3	180	1428,0	1,582	2,04	13,72	14 027
4	730	1443,0	1,585	2,02	13,92	13 884
5	18 250	1462,0	1,590	2,03	14,27	13 186
				1,980	14,9	

Особое внимание уделено эффективности совместной работы каркаса из клееной древесины и обшивок из деревянных панелей.

Основные показатели, по которым осуществляется анализ НДС исследуемой конструкции, следующие: величина прикладываемых нагрузок по этапам и продолжительность выдержки конструкции под этой нагрузкой, напряжения в меридиональных ребрах, касательные напряжения в примыканиях элемен-

тов обшивки к ребрам, максимальные прогибы и величина интегрального модуля деформаций ребер, который изменяется в зависимости от величины напряжения.

Выяснилось, что при приведенной толщине обшивки, равной 40 мм, силовое сопротивление оболочки велико, и даже при максимальной нагрузке – 3,2 кПа, превышающей расчетную в 10 раз, напряжения в сечениях меридиональных ребер не достигли расчетной величины. Максимальное напряжение при нагрузке 36 кПа составило 10,67 МПа, что меньше расчетного значения 13 МПа.

Аналогично прогибы на протяжении всего процесса нагружения 7,07 года измеряются несколькими миллиметрами и при рассматриваемой максимальной нагрузке составили лишь 55,26 мм, то есть 1/1086 диаметра купола. При нагрузке же 4 кПа величина прогиба составила 6,35 мм, причем при выдержке оболочки под этой нагрузкой в течение 1440 сут. (почти 4 года) она возросла до 6,62 мм (или 1/9050 диаметра D), то есть на 0,28 мм. Аналогично и максимальная величина нормальных и касательных напряжений за этот срок практически не изменилась (табл. 1, гр. 4).

Меридиональные ребра каркаса принимали уменьшенной высоты сечения до 1/60 пролета. Максимальное нормальное напряжение в приопорной части меридиональных ребер – 172,5 кН/м² \approx 0,2 МПа.

Невольно приходит мысль, что оболочка толщиной 40 мм почти совсем не требует наличия ребер (устойчивость здесь не рассматривается). В то же время следует отметить, что величина интегрального модуля деформаций при нагрузке 4 кПа уменьшилась с 1,4 10⁴ до 1,35 10⁴ МПа – на 3,3 %.

Для сравнения были взяты данные численного эксперимента этой оболочки с толщиной обшивки 20 мм при нагрузке 3,2 кПа (табл. 2). В результате выдержки оболочки в течение 50 лет прогиб оболочки увеличился с 13,3 до 14,9 мм (до 1/4027 диаметра). Напряжения в меридиональных ребрах увеличились с 1,53 до 1,6 МПа (на 4,1 %). Абсолютная величина напряжений меньше расчетного сопротивления 13 МПа. Сдвигающие напряжения от выдержки под нагрузкой не увеличились.

Падение модуля деформаций за 2 года: 14399/13186 = 1,09 раза, то есть меньше, чем на 10 %.

Расчет каркаса из ребер купола без обшивки показал, что при той же нагрузке 3,2 кПа прогиб в середине загруженной части составил 293 мм, или 1/205 диаметра, а максимальные напряжения оказались равными 10,95 МПа, то есть довольно близко к расчетному сопротивлению 13,0 МПа. Отметим, что эти результаты получены при относительной высоте сечения ребер $h/D = 1/60$, то есть уменьшенной относительно рекомендуемой нормами для плоскостных конструкций, равной 1/40 диаметра.

Выгиб ребра с противоположной стороны составил 1/206 D , то есть практически одинаковый с прогибом, и для плоскостной конструкции (балок чердачных перекрытий и прогонов, стропильных ног) находится в допустимых пределах ($< 1/200 D$). Однако для балок и ферм покрытий нормами прогиб ограничивается 1/300 D .

Проверим уровень напряжений.

Максимальный момент $M = 309,386$ кНм, соответствующая продольная сила в приопорной зоне $N = 333,3$ кН при сечении $bh = 0,2 \times 1$ м

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{33\ 330}{200} + \frac{3\ 093\ 860}{33\ 333} = 10,95 \text{ МПа} < R_u = 13,0 \text{ МПа},$$

то есть довольно близко к расчетному сопротивлению, но следует учитывать, что это для $h/D = 1/60 < 1/40$, что уже свидетельствует о пространственной работе каркаса купола.

В кольцевых ребрах максимальное усилие $N = 109,88$ кН; $M = 16,1$ кНм; $bh = 0,1 \times 0,2$ м.

$$\sigma = \frac{10\ 988}{200} + \frac{16\ 100}{666,6} = 54,9 + 24,15 = 7,91 \text{ МПа} < 13,0 \text{ МПа}.$$

Вопросам прочности древесины при двухосных напряженных состояниях посвящено довольно большое количество теоретических и экспериментальных исследований. Многие авторы критериев прочности, ставших теперь классическими, признают их сложность для практического применения.

Г.А. Гениев [5–7] посвятил многие годы разработке приемлемых с практической точки зрения критериев прочности различных материалов. Хотя основные положения его критериев прочности опубликованы [8; 9], приведем здесь вывод критерия длительной прочности анизотропного материала для использования его при исследованиях плоского напряженного состояния обшивок большепролетного купола.

Механические (физические) модели анизотропного материала для определения его длительной прочности

На рис. 5 представлена механическая модель анизотропного материала, позволяющая дать аналитическое и количественное определение его длительной и динамической прочности с единой физической концепции в широком диапазоне времени действия внешней нагрузки: от многих дней и месяцев до десятых и сотых долей секунды.

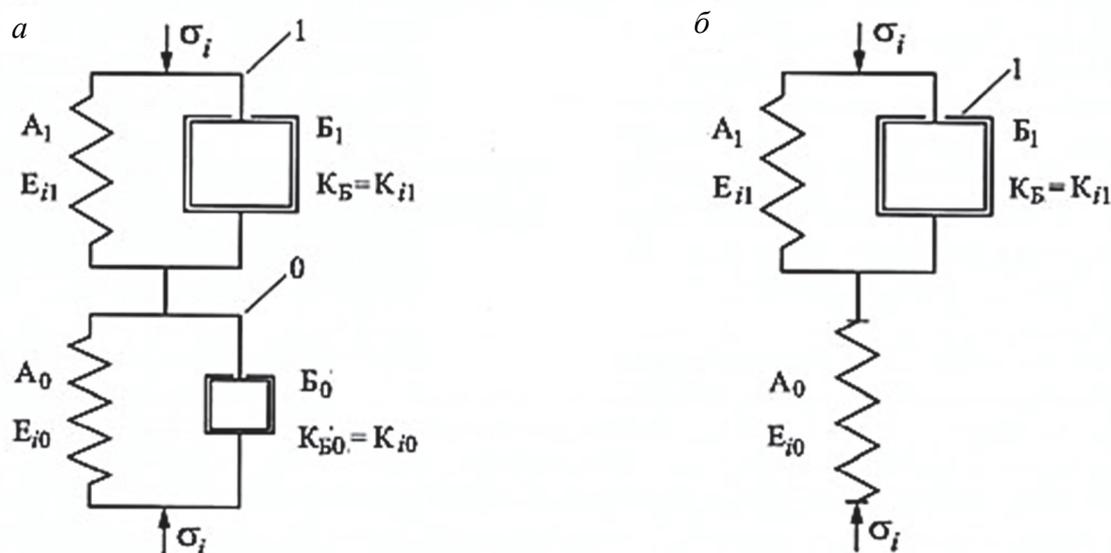


Рис. 5. Механические модели:
a – анизотропный материал; *б* – для определения длительной прочности
Figure 5. Mechanical models:
a – anisotropic material; *б* – for the determination of long-term strength

Модель состоит из двух последовательно соединенных элементов: элемента 0 и элемента 1, каждый из которых представляет, вообще говоря, модель Кельвина – Фойгта – параллельно соединенные элементы A_0 и B_0 , A_1 и B_1 , характеризующиеся различными значениями их прочностных и деформационных параметров.

Целесообразным с практической точки зрения представляется отдельный подход к определению длительной и динамической прочности анизотропного материала, поскольку отрезки времени t_d и t_0 имеют совершенно различный порядок. Действительно, при определении длительной прочности (масштаб времени t_d) работа элемента B_0 практически не оказывает влияния на конечный результат, а при определении динамической прочности (масштаб времени t_0) работа элемента 1 – накопление длительных деформаций ползучести – за этот малый отрезок времени еще не может проявиться.

Полученные критерии длительной прочности анизотропного материала (в частности, древесины) формулируются для элементарного (конечного) объема материала, находящегося в условиях однородного сложного плоского напряженного состояния.

Критерии кратковременной прочности анизотропного материала

Согласно [5; 6], возможны три независимых механизма разрушения анизотропного материала: от отрыва (растяжения), смятия (сжатия) и сдвига, реализация которых зависит от вида напряженного состояния в рассматриваемой точке тела. Эти механизмы могут иметь место как при кратковременном действии внешней нагрузки (соответствующем времени проведения стандартных испытаний), так и при длительном и динамическом действии нагрузки.

В связи с этим полученные в [5; 6] критерии кратковременной прочности анизотропного материала (соответствующие предельным состояниям элемента A_0 – рис. 5 – для случаев отрыва, смятия и сдвига) строились на основании следующих очевидных физических предпосылок:

– для случая отрыва

$$\frac{d}{d\varphi} [\sigma_n(\varphi) - R_p(\varphi)] = 0; \quad (4)$$

– для случая смятия

$$\frac{d}{d\varphi} [\sigma_n(\varphi) + R_c(\varphi)] = 0; \quad (5)$$

– для случая сдвига

$$\frac{d}{d\psi} [\tau_m(\psi) - R_{cd}(\psi)] = 0, \quad (6)$$

где $\sigma_n(\varphi)$ и $\tau_m(\psi)$ – нормальные и касательные напряжения на искомым опасных площадках отрыва, смятия и сдвига (нормали к которым определяются неизвестными заранее углами φ и ψ); $R_p(\varphi)$, $R_c(\varphi)$ и $R_{cd}(\psi)$ – абсолютные значения предельных нормальных и касательных напряжений при отрыве, смятии и сдвиге, полученные из опытов при принудительном действии одноосных напряжений растяжения, сжатия и сдвига как функций углов φ и ψ .

При этом

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n(\varphi) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \\ \tau_m(\psi) &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\psi - \tau_{xy} \cos 2\psi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – нормальные и касательные напряжения в главных осях анизотропии материала (для древесины – вдоль и поперек волокон); φ и ψ – углы между осью X и соответствующими нормальями, а также

$$\left. \begin{aligned} R_p(\varphi) &= R_{px} \cos^2 \varphi + R_{py} \sin^2 \varphi; \\ R_c(\varphi) &= R_{cx} \cos^2 \varphi + R_{cy} \sin^2 \varphi; \\ R_{cd}(\psi) &= C_x \cos^2 \psi + C_y \sin^2 \psi, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где R_{px} , R_{py} – пределы кратковременной прочности на отрыв вдоль осей X и Y (вдоль и поперек волокон); R_{cx} , R_{cy} – пределы кратковременной прочности на смятие вдоль осей X и Y ; C_x и C_y – пределы кратковременной прочности на сдвиг вдоль площадок с нормальями, совпадающими с осями X и Y .

На основании указанных утверждений и проведения соответствующих выкладок в [5; 7; 10] были получены следующие аналитические выражения для критериев кратковременной прочности анизотропных материалов:

– для случая отрыва

$$(R_{px} - \sigma_x)(R_{py} - \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (9)$$

– для случая смятия

$$(R_{cx} + \sigma_x)(R_{cy} + \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (10)$$

– для случая сдвига

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 4(C_x + \tau_{xy})(C_y - \tau_{xy}) = 0. \quad (11)$$

Критерии длительной прочности анизотропного материала

Как уже указывалось, для определения длительной прочности анизотропного материала целесообразно использовать его механическую модель, представленную на рис. 5.

При приложении к последовательно соединенным элементам 0 (A_0) и 1 (A_1, B_1) обобщенного внешнего долговременного силового воздействия $\sigma_i \rightarrow (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ суммарные обобщенные деформации элементов 0 и 1

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i0} + \varepsilon_{i1};$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + \varepsilon_{x1}, \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + \varepsilon_{y1}, \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy0} + \varepsilon_{xy1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Независимые пределы прочности материала в главных осях анизотропии (при отрыве, смятии и сдвиге) определяются достижением значениями суммарных деформаций ε_i соответствующих предельных значений – $\varepsilon_{i0} \rightarrow (\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \varepsilon_{xy0})$, равных предельным деформациям элемента A_0 при кратковременном действии внешней нагрузки – $\varepsilon_{i0} = \frac{R_i}{E_{i0}}$:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{R_x}{E_{x0}}; \quad \varepsilon_{y0} = \frac{R_y}{E_{y0}}; \quad \varepsilon_{xy0} = \frac{R_{xy}}{E_{xy0}}, \quad (13)$$

где $R_x = R_{px}$ или R_{cx} , $R_y = R_{py}$ или R_{cy} , $R_{xy} = C_x$ или C_y ; E_{x0} , E_{y0} и E_{xy0} – линейные модули упругости элемента A_0 в направлениях X и Y (вдоль и поперек волокон) и его обобщенный модуль сдвига соответственно.

Деформации элемента 1 ε_{i1} определяются из следующих очевидных зависимостей:

$$\sigma_i = \sigma_{iA1} + \sigma_{iB1}; \quad \sigma_{iA1} = E_{i1} \varepsilon_{i1}; \quad \sigma_{iB1} = K_{i1} \frac{d\varepsilon_{i1}}{dt}, \quad (14)$$

где E_{i1} – обобщенные модули упругости элемента A_1 ; K_{i1} – модули вязкого сопротивления элемента B_1 . На основании (14)

$$\frac{d\varepsilon_{i1}}{dt} + \frac{E_{i1}}{K_{i1}} \varepsilon_{i1} = \frac{\sigma_i}{K_{i1}},$$

и при

$$t = 0, \quad \varepsilon_{i1} = 0 \quad - \varepsilon_{i1} = \frac{\sigma_i}{E_{i1}} (1 - e^{-\omega_{i1} t}), \quad \omega_{i1} = \frac{E_{i1}}{K_{i1}}. \quad (15)$$

Таким образом, в соответствии с (12):

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_{i0}} \left[1 + \delta_i (1 - e^{-\omega_i t}) \right] = \frac{\sigma_i}{E_{i0}} \Psi_i(t), \quad (16)$$

где $\delta_i = E_{i0}/E_{i1}$.

На основании (13) и (16), пределы длительной прочности анизотропного материала в направлениях главных осей анизотропии $\bar{R}_i = R_i(\bar{t}_\delta)$

$$\bar{R}_i = \sigma_i = \frac{E_{i0} \varepsilon_i}{\Psi_i(t_d)} = \frac{E_{i0} \varepsilon_{i0}}{\Psi_i(t_d)} = \frac{R_i}{\Psi_i(t_d)}, \quad \bar{R}_x = \frac{R_x}{\Psi_x(t_d)}; \quad \bar{R}_y = \frac{R_y}{\Psi_y(t_d)}; \quad \bar{R}_{xy} = \frac{R_{xy}}{\Psi_{xy}(t_d)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_x(t_d) &= 1 + \delta_x (1 - e^{-\omega_{x1} t_d}) > 1; \\ \Psi_y(t_d) &= 1 + \delta_y (1 - e^{-\omega_{y1} t_d}) > 1; \\ \Psi_{xy}(t_d) &= 1 + \delta_{xy} (1 - e^{-\omega_{xy1} t_d}) > 1, \end{aligned} \quad (18)$$

а $t = t_d$ – заданное предельное время действия внешней долговременной нагрузки.

Таким образом, определение длительной прочности анизотропного материала сводится к изменению, а именно уменьшению значений пределов кратковременной прочности в направлениях главных осей анизотропии согласно зависимостям (17) и (18). Внося (17) в критерии (9), (10), (11), запишем окончательные выражения для критериев длительной прочности анизотропного материала в параметрической зависимости от t_d :

– для случая отрыва

$$\left[\frac{R_{px}}{\Psi_{px}(t_d)} - \sigma_x \right] \left[\frac{R_{py}}{\Psi_{py}(t_d)} - \sigma_y \right] - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (19)$$

– для случая смятия

$$\left[\frac{R_{cx}}{\Psi_{cx}(t_d)} + \sigma_x \right] \left[\frac{R_{cy}}{\Psi_{cy}(t_d)} + \sigma_y \right] - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (20)$$

– для случая сдвига

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 4 \left[\frac{C_x}{\Psi_{xy}(t_d)} + \tau_{xy} \right] \left[\frac{C_y}{\Psi_{xy}(t_d)} - \tau_{xy} \right] = 0. \quad (21)$$

В критерии (19), (20), (21) помимо пределов кратковременной прочности ($R_{px}, R_{py}, R_{cx}, R_{cy}, C_x, C_y$) входят три безразмерных параметра – $\delta_x = \frac{E_{x0}}{E_{x1}}$, $\delta_y = \frac{E_{y0}}{E_{y1}}$, $\delta_{xy} = \frac{E_{xy0}}{E_{xy1}}$ и три размерные величины $\omega_{i1} \text{ (сек}^{-1}\text{)} - \omega_{x1} = E_{x1}/K_{x1}$, $\omega_{y1} = E_{y1}/K_{y1}$, $\omega_{xy1} = E_{xy1}/K_{xy1}$.

Численные значения δ_i и ω_{i1} определяются на основании экспериментальных данных. Определение характеристик для расчета длительной прочности древесины выполнено согласно предложениям Г.А. Гениева для анизотропных материалов. Используются результаты экспериментальных исследований длительного сопротивления древесины ели по опытам 1950–1955-х гг. Н.Л. Леонтьева [11; 12].

Для всех трех указанных видов сопротивления древесины ели отношения $\bar{R}_{px}(t_d) / R_{px}$, $\bar{R}_{cx}(t_d) / R_{cx}$ и $\bar{R}_{xy}(t_d) / R_{xy}$ при $t_d \rightarrow \infty$ (при практически неограниченном времени действия нагрузки) оказались с достаточной степенью точности равными 0,5, то есть максимальное снижение длительной прочности составило 50 % от кратковременной. Это позволило на основании экспериментального результата – $\Psi_x(\infty) = \Psi_{xy}(\infty) = 1/0,5 = 2$ оценить значения параметров δ_x и δ_{xy} , а именно $\delta_x = \delta_{xy} = 1$. В дальнейшем значение δ_y (сопротивление поперек волокон) было также принято равным единице.

Аналитическая аппроксимация графиков длительного сопротивления древесины позволила установить следующие значения величин ω_{x1} :

- при растяжении – $\omega_{x1} = 1,65 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при сжатии – $\omega_{x1} = 2,50 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при скалывании – $\omega_{xy1} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$.

Значения ω_{y1} (при сопротивлении поперек волокон) с учетом большего влияния ползучести материала в этом главном направлении анизотропии ($K_{y1} < K_{x1}$) были приняты равными:

- при растяжении – $\omega_{y1} = 3,30 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при сжатии – $\omega_{y1} = 5,00 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при сдвиге – $\omega_{xy1} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$.

Расчет оболочки в целом [10] с учетом обшивки показал ее большую роль в восприятии нормальных и особенно сдвигающих усилий.

Для анализа нами выбрана простейшая конструкция заполнения ячеек между ребрами в виде дощато-гвоздевых щитов с перекрестным расположением досок.

В конструкции цилиндрической оболочки (рис. 6) использованы панели в виде каркаса из досок толщиной 40 мм с одной нижней обшивкой из досок толщиной 25 мм. Благодаря включению этого способа заполнения ячеек между ребрами удалось успешно осуществить применение ребер с отношением высоты сечения 1/56 пролета [10].

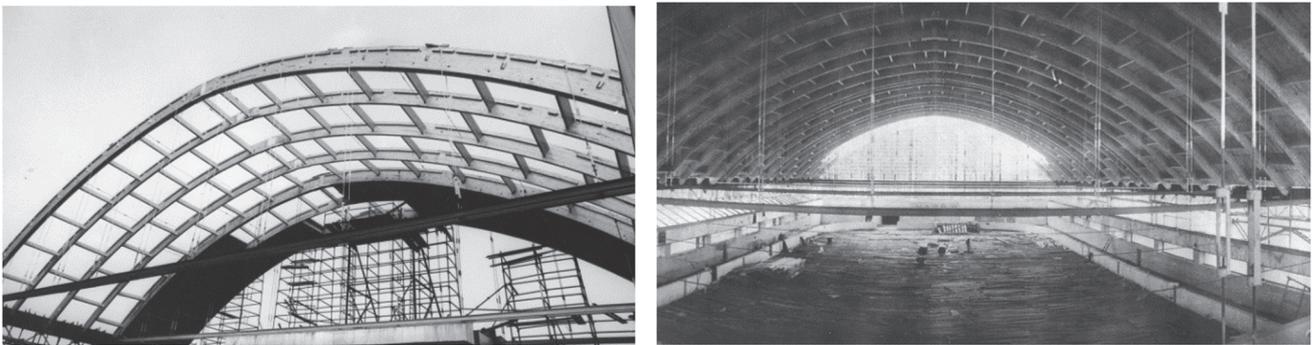


Рис. 6. Монтаж короткой цилиндрической оболочки пролетом 42 м
Figure 6. An erection of the short cylindrical shell with a 42 m span

На основании общего расчета конструкции по данным о сдвигающих усилиях определены основные параметры щитов.

Размеры средней ячейки между ребрами каркаса приняты 2,49×2,49 м, количество досок шириной 13 см для каждого слоя щита равно 19 шт. Количество гвоздей при установке по 2 гвоздя в каждом пересечении досок равно $19^2 \times 2 = 722$. При перекосе щита от сдвига гвозди вызывают смятие древесины под ними. Их несущая способность, согласно нормам, составляет $T = 0,8 a \cdot d \cdot n = 0,8 \times 4 \times 0,3 \times 722 = 693 \text{ кН}$, где d – диаметр гвоздя, см; a – толщина щита; n – количество гвоздей.

Сдвигающие напряжения при максимальном сдвиге по конечно-элементному расчету составляют

$$\tau = \frac{\sum T}{bl} = \frac{693}{0,04 \times 2,49} = 6957,8 \text{ кН/м}^2 = 6,96 \text{ МПа.}$$

Полученное значение τ намного превышает расчетное сопротивление даже скалыванию древесины поперек волокон 0,8 МПа. Согласно расчету, такое сдвигающее напряжение достигается только на 38 этапе при нагружении 28 кПа и суммарной выдержке при возрастающей нагрузке в течение 2580 сут. (7 лет).

Приведем результаты расчета, соответствующие 27 этапу нагружения при 6 кПа и выдержке перед этим в течение 1980 сут. (5,42 лет) при постоянной односторонней нагрузке 4 кПа. Максимальные сдвигающие напряжения при этом составили 1,45 МПа. При нагрузке 2 кПа, соответственно, 0,5 МПа.

Для сравнения выполнили еще расчеты исследуемого купола при других размерах толщины щитов. При толщине 2 см и нагрузке 2 кПа максимальные напряжения равны 2,43 МПа, а при толщине 8 см и этой же нагрузке величина напряжений понизилась до 1,0 МПа.

Отметим, что наряду с дощатыми настилами вполне возможно заполнение ячеек выполнять композитными материалами, как повышенной прочности и уменьшенной толщины, так и пористыми материалами низкой теплопроводности.

Конструкция способна воспринимать нагрузки большой интенсивности в течение длительного времени при меридиональных ребрах уменьшенной высоты сечения до 1/60 диаметра. Это свидетельствует также о том, что купол обеспечивает высокую степень конструктивной безопасности и подходит для возведения сооружений, эксплуатирующихся в жестких условиях, диктуемых природными и техногенными воздействиями.

Заключение

Время требует новых подходов к построению норм проектирования с учетом сложных напряженных состояний и включения в нормы эффективных расчетов с использованием ЭВМ. При этом необходимо упрощать расчетные методики и применять простые критерии прочности.

Совместная работа ребер каркаса куполов с элементами заполнения ячеек между ними оказывает большое влияние на повышение силового сопротивления конструкции в целом.

Нелинейные расчеты с применением метода интегральных оценок позволяют анализировать силовое сопротивление сложных современных деревянных и, возможно, других комплексных конструкций с учетом длительного нагружения любыми неравномерными нагрузками во времени и по величине.

Выполнены расчеты куполов с уменьшенной высотой сечения ребер на 20 % по сравнению с принятыми устоявшимися рекомендациями по проектированию. Проанализировано состояние конструкции и ее силового сопротивления в различных условиях нагружения и с различной жесткостью панелей заполнения ячеек.

Обоснована возможность уменьшения высоты сечения меридиональных ребер. Предлагается в дальнейшем исследовать и другие возможности экономии материалов этих распространенных конструкций.

Проверена возможность восприятия каркасом с уменьшенными сечениями ребер нагрузок в монтажном состоянии и установлена допустимость восприятия этих нагрузок.

В целом применяемая новая эффективная методика расчета и рекомендации по проектированию могут обеспечить экономию материалов на покрытие до 25 %.

Таким образом, несмотря на имеющийся эффективный математический аппарат расчета конструкций с учетом нелинейной работы древесины, в нормах отсутствуют рекомендации по его применению и нет указаний на необходимость конструирования с учетом совместной работы элементов для обеспечения конструктивной безопасности сооружений при одновременном снижении расхода материалов.

Упрощения компьютерного расчета можно достичь путем автоматизации поиска сечений с наибольшими напряжениями на каждом шаге итераций и расчетной корректировки модуля деформации в одном этом сечении, а в остальных сечениях по линейному закону или по параболе, соответствующей эпюре моментов.

Список литературы

1. Турковский С.Б., Погорельцев А.А., Преображенская И.П. Клееные деревянные конструкции с узлами на клеенных стержнях в современном строительстве (система ЦНИИСК). М.: РИФ «Стройматериаль», 2013. 308 с.

2. Кривошапко С.Н., Пятикрестовский К.П. Из истории строительства деревянных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 3–18.
3. Пятикрестовский К.П. Нелинейные методы механики в проектировании современных деревянных конструкций. М.: МГСУ, 2014. 320 с.
4. Ржаницын А.Р. Теоретические предпосылки к построению методов расчета деревянных конструкций во времени // Исследования прочности и деформативности древесины. М.: Госстройиздат, 1956. С. 21–31.
5. Гениев Г.А. О критерии прочности древесины при плоском напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. 1981. № 3. С. 15–20.
6. Гениев Г.А., Курбатов А.С. О предельных прочностных зависимостях для анизотропных материалов при сдвиге // Методы расчета и оптимизации строительных конструкций на ЭВМ. М., 1990. С. 60–67.
7. Гениев Г.А., Курбатов А.С., Самедов Ф.А. Вопросы прочности и пластичности анизотропных материалов. М.: Интербук, 1993. 187 с.
8. Гениев Г.А., Пятикрестовский К.П. Вопросы длительной и динамической прочности анизотропных конструкционных материалов. М., 2000. 38 с.
9. Пятикрестовский К.П. Расчет ребристых пространственных конструкций из древесины и фанеры на длительные нагрузки // Строительная механика и расчет сооружений. 2008. № 5. С. 42–48.
10. Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С. Нелинейный расчет статически неопределимых деревянных конструкций и оптимизация размеров сечений ребер куполов // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: сб. тезисов VII Международного симпозиума. Новосибирск, 2018.
11. Леонтьев Н.Л. Упругие деформации древесины. М.: Гослесбумиздат, 1952. 120 с.
12. Леонтьев Н.Л. Длительное сопротивление древесины. М. – Л.: Гослесбумиздат, 1957. 132 с.

References

1. Turkovskiy S.B., Pogoreltzev A.A., Preobrazhenskaya I.P. *Adhesive wooden structures with nots on pasted rods in modern building*. Moscow: RIF “Stroymaterialy” Publ.; 2013. (In Russ.)
2. Krivoshapko S.N., Pyatikrestovskiy K.P. On history of building of wooden shells and their opportunities at present and in the future. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(1):3–18. (In Russ.)
3. Pyatikrestovsky K.P. *Non-linear methods in design of modern wooden structures*. Moscow: MGSU Publ.; 2014. (In Russ.)
4. Rzhantzin A.R. Theoretical approaches to the construction of methods of analysis of wooden structures in time. *Studies of the Strength and Deformability of Wood*. Moscow: Gosstroyizdat Publ.; 1956. p. 21–31. (In Russ.)
5. Geniev G.A. On the criteria of strength of wood for plane stress state. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1981;(3):15–20. (In Russ.)
6. Geniev G.A., Kurbatov A.S. On ultimate strength relations for anisotropic materials under shear. *Methods of Calculation and Optimization of Building Structures on a Computer*. Moscow; 1990. p. 60–67. (In Russ.)
7. Geniev G.A., Kurbatov A.S., Samedov F.A. *Problems of strength and plasticity of anisotropic materials*. Moscow: Interbuk Publ.; 1993. (In Russ.)
8. Geniev G.A., Pyatikrestovsky K.P. *Problems of long-term and dynamic strength of anisotropic constructive materials*. Moscow; 2000. (In Russ.)
9. Pyatikrestovsky K.P. An analysis of rib spatial structures from wood and plywood on sustained loads. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2008;(5):42–48. (In Russ.)
10. Pyatikrestovsky K.P., Sokolov B.S. Non-linear analysis of statically indeterminate wooden structures and optimization of dimensions of cross-sections of the ribs of domes. *Actual Problems of Computer Modeling of Constructions and Structures: Collection of Abstracts of the 7th International Symposium*. Novosibirsk; 2018. (In Russ.)
11. Leontiev N.L. *Elastic deformation of wood*. Moscow: Goslesbumizdat Publ.; 1952. (In Russ.)
12. Leontiev N.L. *Long-term resistance of wood*. Moscow, Leningrad: Goslesbumizdat Publ.; 1957. (In Russ.)