

## ДИНАМИКА ОБОЛОЧЕК SHELL DYNAMICS

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638  
 УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Определение собственных частот колебаний армированной цилиндрической оболочки

М.А. Рустамова 

Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджанская Республика  
 ✉ mehsetir@gmail.com

#### История статьи

Поступила в редакцию: 9 июня 2021 г.  
 Доработана: 29 сентября 2021 г.  
 Принята к публикации: 14 октября 2021 г.

#### Для цитирования

Рустамова М.А. Определение собственных частот колебаний армированной цилиндрической оболочки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 628–638. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638>

**Аннотация.** Исследуются свободные колебания армированной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Рассматривается случай ортотропной оболочки, когда нити корда укладываются симметрично относительно меридиана оболочки. Движение жидкости потенциально, описывается волновым уравнением. Жидкость движется без отрыва от стенок цилиндров. Давление жидкости учитывается в уравнениях движения оболочек, а скорости жидкости и оболочки приравниваются на границах. Представление решения в гармоническом виде сводится к системе трансцендентных уравнений. При сравнении решений задач без жидкости и с жидкостью находится зависимость частоты системы без жидкости с частотой системы с жидкостью. Для решения уравнения предложен обратный метод, который позволил построить более точный частотный спектр свободных колебаний системы. При некоторых значениях параметров системы определены собственные частоты колебаний цилиндра.

**Ключевые слова:** цилиндр, плотность нитей корда, горизонтальное перемещение, плотность жидкости, объемная доля корда

### Determination of natural vibration frequencies of reinforced cylindrical shell

Mexseti Akif Rustamova 

Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic  
 ✉ mehsetir@gmail.com

#### Article history

Received: June 9, 2021  
 Revised: September 29, 2021  
 Accepted: October 14, 2021

**Abstract.** Free vibrations of a reinforced cylindrical shell filled with liquid are investigated. The case of an orthotropic shell is considered when the cord filament is placed symmetrically with respect to the meridian of the shell. The motion of a fluid is potential and is described by a wave equation. The fluid moves

Рустамова Мехсети Акиф кызы, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, доцент отдела волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, д. 9; ORCID: 0000-0001-5192-1166, eLIBRARY SPIN-код: 2290-2409, Scopus Author ID: 55489058000, Web of Science Researcher ID: AAE-2689-2019; mehsetir@gmail.com  
 Mexseti Akif Rustamova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Associate Professor, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Vahabzade St, Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic; ORCID: 0000-0001-5192-1166, eLIBRARY SPIN-code: 2290-2409, Scopus Author ID: 55489058000, Web of Science Researcher ID: AAE-2689-2019; mehsetir@gmail.com

© Рустамова М.А., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**For citation**

Rustamova M.A. Determination of natural vibration frequencies of reinforced cylindrical shell. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):628–638. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638>

without separation from the walls of the cylinders. The fluid pressure is taken into account in the equations of motion of the shells, and the velocities of the fluid and the shell are equalized at the boundaries. Representing a solution in a harmonic form reduces to a system of transcendental equations. Comparison of the solutions of the problems without a liquid and with a liquid shows the dependence of the frequency of the system without a liquid at the frequency of the system with the liquid. An inverse method is proposed for solving the equation. The inverse method for solving the problem has made it possible to construct a more accurate frequency spectrum of free oscillations of the system. For some values of the system parameters, the natural frequencies of the cylinder are determined.

**Keywords:** cylinder, density of cord filaments, horizontal movement, fluid density, volume fraction of cord

**Введение**

Круговые цилиндрические оболочки являются элементами, входящими в конструкции летательных аппаратов и двигателей, подводных и надводных средств передвижения, резервуаров и трубопроводов, сводчатых систем подводных и подземных тоннелей и хранилищ. Цилиндрические оболочки получили широкое распространение в технике. Одной из основных сфер их применения являются гидравлические системы, где такие оболочки применяются в качестве гибких вставок. Математическому описанию колебаний армированных оболочек с жидкостью посвящено множество работ [1–9].

Важным моментом при исследовании колебаний оболочек является определение частот свободных колебаний, что позволяет избежать резонанса от внешних источников колебаний. Следует отметить, что большинство рассматриваемых работ посвящены простейшим частным случаям или приближенным методам.

В [10] исследуются свободные колебания двух концентрически расположенных цилиндрических оболочек с жидкостью между ними. Представленное решение в гармонической форме сводится к системе трансцендентных уравнений. Собственные частоты колебаний определяются при некоторых значениях параметров системы, влияние размера цилиндров на свободные колебания цилиндра тоже изучается.

Исследование [11] посвящено численному анализу собственных колебаний вертикально и горизонтально ориентированных цилиндрических оболочек при разном уровне заполнения жидкостью и различных вариантах граничных условий, задаваемых на торцах упругой конструкции.

Рассматривается проблема движения твердого цилиндра [12], сохраняющего вертикальное положение под действием поверхностных волн в жидкости, которая решается операционным методом. Для нахождения оригинального решения, учитывая, что изображение представляет собой знаменатель табличной функции, используется интегральное уравнение Вольтера первого рода.

**Постановка и решение задачи**

В работе исследуются свободные колебания армированной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Рассматривается случай ортотропной оболочки, когда нити корда укладываются симметрично относительно меридиана оболочки. Армированная оболочка представляет собой многослойный композит, состоящий из слоев наполнителя и корда. Поскольку нахождение собственных частот системы «цилиндрическая оболочка – жидкость» связано с решением трансцендентных уравнений, частота колебаний оболочки, не содержащей жидкость, выражается через частоту колебаний системы в явном виде, что позволяет, как аналитически, так и графически исследовать спектры частот системы.

Для описания движения оболочки используются классические уравнения в перемещениях [13].

Колебания жидкости, заполняющей оболочку, описываются волновым уравнением в цилиндрических координатах [14]. На границе контакта оболочки с жидкостью задается равенство радиальных скоростей.

Таким образом, колебания рассматриваемой системы описываются уравнениями

$$A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w = \rho_s h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w = \rho_s h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w = - \left( \rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{C_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{C_{12} + C_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi}, \\ A_{13} = A_{31} &= \frac{1}{R} \left( C_{12} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ A_{22} &= \left( C_{66} + \frac{4}{R^2} D_{66} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left( C_{22} + \frac{1}{R^2} D_{22} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ A_{23} = A_{32} &= \frac{1}{R} \left( \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{R} (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{D_{22}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} \right), \\ A_{33} &= \frac{1}{R^2} C_{22} + D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \phi^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$C_{ik} = hB_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik},$$

$$B_{11} = B'_{11} \cos^4 \theta + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + B'_{22} \sin^4 \theta,$$

$$B_{22} = B'_{11} \sin^4 \theta + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + B'_{22} \cos^4 \theta,$$

$$B_{12} = B'_{12} + (B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (3)$$

$$B_{66} = B'_{66} + (B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

где  $B'_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $B'_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $B'_{66} = G$ ;  $B'_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ,  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  – параметры

композита по главным направлениям упругости, вычисляемые по формулам

$$E_1 = E_b V_b + E_m (1 - V_b),$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_b}{E_b} + \frac{(1 - V_b)}{E_m}, \quad \nu_1 = \nu_b V_b + \nu_m (1 - V_b), \quad \nu_2 = \nu_2 \frac{E_2}{E_1},$$

$$\frac{1}{G} = \frac{V_b}{G_b} + \frac{(1-V_b)}{G_m},$$

где  $E_b, G_b, \nu_b$  – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона;  $E_m, G_m, \nu_m$  – соответствующие параметры наполнителя;  $V_b$  – объемная доля корда.

Плотность определяется из выражения

$$\rho_s = \rho_b V_b + \rho_m (1 - V_b),$$

где  $\rho_b$  и  $\rho_m$  – плотность нитей корда и наполнителя соответственно;  $\rho_s$  – плотность оболочки;  $\rho_f$  – плотность жидкости;  $h$  – толщина оболочки;  $R$  – радиус срединной плоскости оболочки;  $B_{ik}$  – упругие параметры обобщенного закона Гука в цилиндрической системе координат оболочки.

Потенциал  $\Phi$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\omega^2}{a^2} \Phi = 0. \quad (4)$$

На границе между жидкостью и оболочкой отвечает условию совместимости движения.

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (5)$$

Решение системы (1) представляется в виде

$$u = u_n \cos n\phi \sin \omega t \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$g = v_n \sin n\phi \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

$$w = w_n \cos n\phi \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\Phi = \Phi_n(r) \cos n\phi \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (7)$$

где  $\frac{\pi}{l} = k$ .

Подставим (7) в (4), получим

$$\Phi_n'' + \frac{1}{r} \Phi_n' + \left( \frac{\omega^2}{a^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n = 0. \quad (8)$$

Внутри цилиндра решение уравнения (8) выглядит следующим образом:

$$\Phi_n(r) = C J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} r \right). \quad (9)$$

Учитывая (9) в (7),

$$\Phi = CJ_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} r \right) \cos n\phi \cos \omega t \sin kx, \quad (10)$$

где  $C$  – постоянно;  $J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} r \right)$  – функция Бесселя порядка  $n$ .

И применяя (6) и (10) в (5), получаем

$$C = - \frac{w_n \omega}{J'_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), получим

$$\Phi = - \frac{w_n \omega J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J'_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \cos n\phi \cos \omega t \sin kx, \quad (12)$$

где  $a$  – скорость звука в жидкости;  $\omega$  – круговая частота;  $J_n, J'_n$  – функции Бесселя порядка  $n$ .

Подставив (6) и (12) в (1), имеем

$$\begin{aligned} & - \left( k^2 C_{11} + \frac{n^2}{R^2} C_{66} \right) u_n + \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}) v_n - \frac{k}{R} C_{12} w_n + \rho_s h \omega^2 u_n = 0, \\ & \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}) u_n - \left( k^2 \left( C_{66} + \frac{4}{R^2} D_{66} \right) - \frac{n^2}{R^2} \left( C_{22} + \frac{1}{R^2} D_{22} \right) + \rho_s h \omega^2 \right) v_n + \\ & + \frac{1}{R^2} \left( -nC_{22} + k^2 n (D_{12} + 4D_{66}) - \frac{n^3}{R} D_{22} \right) w_n = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

$$- \frac{k}{R} C_{12} u_n + \frac{1}{R^2} \left( nC_{22} + k^2 n (D_{12} + 4D_{66}) + \frac{n^3}{R^2} D_{22} \right) v_n +$$

$$+ \left( \frac{1}{R^2} C_{22} + k^4 D_{11} + \frac{2k^2 n^2}{R^2} (D_{12} + 2D_{66}) + \frac{n^4}{R^4} D_{22} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J'_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \right) w_n = 0.$$

Для упрощения вводим в (13) следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} + \rho_s h \omega^2) u_n + \alpha_{12} \mathcal{G}_n + \alpha_{13} w_n &= 0, \\ \alpha_{21} u_n + (\alpha_{22} + \rho_s h \omega^2) v_n + \alpha_{23} w_n &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\alpha_{31} u_n + \alpha_{32} \mathcal{G}_n + \left( \alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)}{J'_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)} \right) w_n = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= - \left( k^2 C_{11} + \frac{n^2}{R^2} C_{66} \right), \quad \alpha_{23} = \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}), \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}), \quad \alpha_{22} = - \left( k^2 \left( C_{66} + \frac{4}{R^2} D_{66} \right) + \frac{n^2}{R^2} \left( C_{22} + \frac{1}{R^2} D_{22} \right) \right), \quad \alpha_{13} = \alpha_{31} = - \frac{k}{R} C_{12}, \\ \alpha_{23} &= - \frac{n}{R^2} C_{22} + \frac{k^2 n}{R^2} (D_{12} + 4D_{66}) - \frac{n^3}{R^4} D_{22}, \quad \alpha_{32} = \frac{n}{R^2} C_{22} + \frac{k^2 n}{R^2} (D_{12} + 4D_{66}) + \frac{n^3}{R^4} D_{22}, \\ \alpha_{33} &= \frac{1}{R^2} C_{22} + k^4 D_{11} + \frac{2k^2 n^2}{R^2} (D_{12} + 2D_{66}) + \frac{n^4}{R^4} D_{22}. \end{aligned}$$

Выпишем условие нетривиальности решения системы (14) относительно  $u_n, v_n, w_n$ :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \rho_s h \omega^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \rho_s h \omega^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)}{J'_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{11} + \rho_s h \omega^2)(\alpha_{22} + \rho_s h \omega^2) \left( \alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J'_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \right) + \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \\
 & + \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} - (\alpha_{22} + \rho_s h \omega^2) \alpha_{13} \alpha_{31} - \alpha_{12} \alpha_{21} \left( \alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J'_n \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \right) - \\
 & - \alpha_{32} (\alpha_{11} + \rho_s h \omega^2) \alpha_{23} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 & -\rho_s^3 h^3 \omega^6 + (-\alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{33}) \rho_s^2 h^2 \omega^4 + (\alpha_{11} \alpha_{33} + \alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{13} \alpha_{31} - \alpha_{32} \alpha_{23} + \alpha_{12} \alpha_{21}) \rho h \omega^2 + \\
 & + \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} + \rho_s^2 h^2 \omega^6 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{22} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{11} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \\
 & + \alpha_{11} \alpha_{22} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} - \\
 & - \alpha_{13} \alpha_{31} \alpha_{22} - \alpha_{11} \alpha_{32} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{33} + \alpha_{12} \alpha_{21} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение (16) представляет собой трансцендентное уравнение

$$\Omega_1^3 + A_1 \Omega_1^2 + A_2 \Omega_1 + A_3 = 0, \tag{17}$$

где

$$\Omega_1 = \rho_s h \omega^2, \tag{18}$$

$$A_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{33},$$

$$A_2 = -\alpha_{11} \alpha_{33} - \alpha_{22} \alpha_{33} + \alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{13} \alpha_{31} + \alpha_{32} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{21},$$

$$\begin{aligned}
 A_3 = & -\alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} - \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} + \alpha_{13} \alpha_{31} \alpha_{22} + \alpha_{11} \alpha_{32} \alpha_{23} + \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{33} - \\
 & - \rho_s^2 h^2 \omega^6 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} - \alpha_{22} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} - \alpha_{11} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} - \\
 & - \alpha_{11} \alpha_{22} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{12} \alpha_{21} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n}.
 \end{aligned}$$

Определим  $\Omega_1$  из (17):

$$\Omega_1 = y - \frac{A_1}{3}, \quad (19)$$

$$y^3 + py + q = 0,$$

$$y_1 = A + B; \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad (20)$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{3}\right)^2,$$

$$p = -\frac{A_1^2}{3} + A_2, \quad q = 2\left(\frac{A_1}{3}\right)^3 - \frac{A_1 A_2}{3} + A_3.$$

В случае отсутствия жидкости ( $\rho = 0$ ) уравнение (17) примет вид

$$(\Omega_1^0)^3 + A_1^0 (\Omega_1^0)^2 + A_2^0 \Omega_1^0 + A_3^0 = 0. \quad (21)$$

Здесь

$$\Omega_1^0 = \rho_s h (\omega_0)^2, \quad (22)$$

где  $\omega_0$  – частота свободных колебаний оболочки без жидкости.

$$A_1^0 = A_1, \quad A_2^0 = A_2 m, \quad A_3^0 = \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} + \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} - \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{33} - \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{32}.$$

Решением уравнения (21) станет

$$\Omega_1^0 = y_1^0 - \frac{A_1^0}{3}; \quad (23)$$

$$y_1^0 = A_0 + B_0, \quad y_{2,3}^0 = -\frac{A_0+B_0}{2} \pm i \frac{A_0-B_0}{2} \sqrt{3}; \quad (24)$$

$$A_0 = \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} + \sqrt{Q_0}}, \quad B_0 = \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} - \sqrt{Q_0}}, \quad Q_0 = \left(\frac{p_0}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_0}{3}\right)^2,$$

$$p_0 = p, \quad q_0 = 2\left(\frac{A_1^0}{3}\right)^3 - \frac{A_1^0 A_2^0}{3} + A_3^0.$$



Учитывая (20) в (19),

$$\Omega_1 = A + B - \frac{A_1}{3}. \quad (25)$$

И учитывая (24) в (23), получаем

$$\Omega_1^0 = A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}.$$

Отсюда

$$\frac{\Omega_1^0}{\Omega_1} = \frac{A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}}{A + B - \frac{A_1}{3}}.$$

Следовательно,

$$\Omega_1^0 = \frac{A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}}{A + B - \frac{A_1}{3}} \Omega_1.$$

С другой стороны, из (19) и (22):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}}{A + B - \frac{A_1}{3}}} \omega. \quad (26)$$

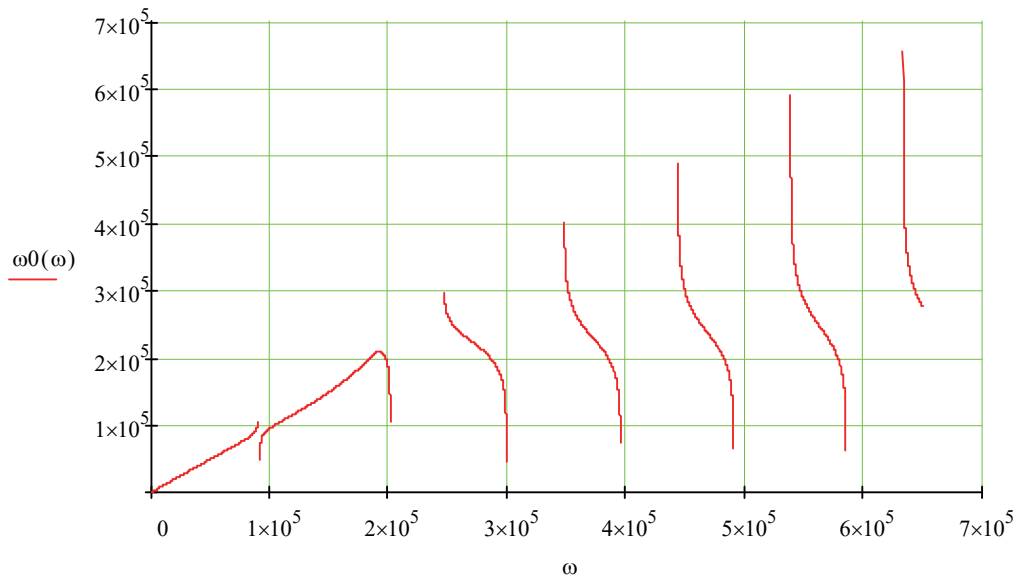


График частот колебаний системы в зависимости от частоты пустой оболочки  
A graph of the system vibration frequencies versus the frequency of the empty shell

Формула (26) выражает зависимость  $\omega_0$  от  $\omega$ . Уравнение (26) связывает свободную частоту системы со свободной частотой оболочки в отсутствие жидкости. Однако решение обратной задачи позволяет строить графики зависимости частот колебаний для различных мод системы от частоты пустой оболочки, что упрощает исследование, в том числе определение частоты свободных колебаний системы (рисунок).

### Заключение

Исследованы свободные колебания наполненной жидкостью армированной цилиндрической оболочки. Для нахождения частот свободных колебаний системы получено трансцендентное уравнение. Для решения трансцендентного уравнения многие исследователи используют приближенные методы и асимптотические решения. Однако для решения уравнения в этом случае был предложен обратный метод, позволяющий построить более точный частотный спектр свободных колебаний системы.

### Список литературы

1. Филиппов С.Б. Решение уравнений свободных колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки методом Фурье // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 321–333. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.212>
2. Leizerovich G.S., Seregin S.V. Free vibrations of circular cylindrical shells with a small added concentrated mass // J. Appl. Mech. Tech. Phy. 2016. Vol. 57. Pp. 841–846. <https://doi.org/10.1134/S0021894416050102>
3. Abedini Baghbadorani A., Kiani Y. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets // Composite Structures. 2021. Vol. 276. 114546. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114546>
4. Ghasemi A.R., Meskini M. Investigations on dynamic analysis and free vibration of FGMs rotating circular cylindrical shells // SN Appl. Sci. 2019. Vol. 1. 301. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-0299-5>
5. Talebitooti M., Ghasemi M., Hosseini S.M. Vibration analysis of functionally graded cylindrical shells with different boundary conditions subjected to thermal loads // Journal of Computational and Applied Research in Mechanical Engineering. 2017. Vol. 6. No. 2. Pp. 103–114.
6. Агаларов Дж.Г., Сейфуллаев А.И. Свободные колебания сферической оболочки с упругим наполнителем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 74–80.
7. Сейфуллаев А.И., Новрузова К.А. Исследование колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 3. № 7 (75). С. 29–33. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.44393>
8. Latifov F.S., Yusifov M.Z., Alizade N.I. Free vibrations of heterogeneous orthotropic cylindrical shells reinforced by annular ribs and filled by fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. Vol. 61. Pp. 486–493. <https://doi.org/10.1134/S0021894420030219>
9. Prakash V.S., Sonti V.R. Asymptotic expansions for the structural wavenumbers of isotropic and orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells in the intermediate frequency range // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. Issue 16. Pp. 3696–3705. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.02.025>
10. Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Agasiev S.R. Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them // International Journal of Engineering and Innovative Technology. 2014. Vol. 3. Issue 10. Pp. 33–37.
11. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. Численное моделирование несоосных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Вестник Самарского Государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24. № 1. С. 95–115. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1746>
12. Агаларов Дж.Г., Рустамова М.А., Сейфуллаев А.И. Движение вертикально расположенного цилиндра в результате волн на поверхности жидкости // Вестник современной науки. 2017. № 2. С. 7–15.
13. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 734 с.
14. Ho You J., Inaba K. Fluid-structure interaction in water-filled thin pipes of anisotropic composite materials // Journal of Fluids and structures. 2013. Vol. 36. Pp. 162–173. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.08.010>

### References

1. Filippov S.B. Using the Fourier series for analysis of free vibrations of a cylindrical shell rotating on rollers. *Vestnik of St Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2018;5(2):321–333. (In Russ.) <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.212>
2. Leizerovich G.S., Seregin S.V. Free vibrations of circular cylindrical shells with a small added concentrated mass. *J. Appl. Mech. Tech. Phy*. 2016;57:841–846. <https://doi.org/10.1134/S0021894416050102>

3. Abedini Baghbadorani A., Kiani Y. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells reinforced with grapheme platelets. *Composite Structures*. 2021;276:114546. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114546>
4. Ghasemi A.R., Meskini M. Investigations on dynamic analysis and free vibration of FGMs rotating circular cylindrical shells. *SN Appl. Sci.* 2019;1:301. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-0299-5>
5. Talebitooti M., Ghasemi M., Hosseini S.M. Vibration analysis of functionally graded cylindrical shells with different boundary conditions subjected to thermal loads. *Journal of Computational and Applied Research in Mechanical Engineering*. 2017;6(2):103–114.
6. Agalarov J.G., Seyfullaev A.I. Free vibrations of a spherical shell with an elastic filler. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;3:74–80. (In Russ.)
7. Sejfullaev A.I., Novruzova K.A. Oscillations of a longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shell filled with a viscous fluid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2015;3(7(75)):29–33. (In Russ.) <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.44393>
8. Latifov F.S., Yusifov M.Z., Alizade N.I. Free vibrations of heterogeneous orthotropic cylindrical shells reinforced by annular ribs and filled by fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020;61:486–493. <https://doi.org/10.1134/S0021894420030219>
9. Prakash V.S., Sonti V.R. Asymptotic expansions for the structural wavenumbers of isotropic and orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells in the intermediate frequency range. *Journal of Sound and Vibration*. 2013;332(16):3696–3705. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.02.025>
10. Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Agasiev S.R. Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them. *International Journal of Engineering and Innovative Technology*. 2014;3(10):33–37.
11. Bochkarev S.A., Lekomcev S.V., Senin A.N. Numerical modeling of eccentric cylindrical shells partially filled with a fluid. *Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2020; 24(1):95–115. (In Russ.) <https://doi.org/10.14498/vsgtu1746>
12. Agalarov J.G., Rustamova M.A., Seyfullayev A.I. The movement of a vertical cylinder as a result of water waves. *Bulletin of Modern Science*. 2017;2:7–15. (In Russ.)
13. Filippov A.P. *Oscillations of deformable systems*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1970. (In Russ.)
14. Ho You J., Inaba K. Fluid-structure interaction in water-filled thin pipes of anisotropic composite materials. *Journal of Fluids and Structures*. 2013;36:162–173. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.08.010>