

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627

УДК 69.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС

В.П. Агапов¹ , А.С. Маркович²  

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

²Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

 markovich-as@rudn.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 1 августа 2021 г.

Доработана: 18 октября 2021 г.

Принята к публикации: 30 октября 2021 г.

Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С. Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627>

Аннотация. Приводятся теоретические основы построения совместных конечных элементов для статического и динамического расчета как однослойных, так и многослойных оболочек. Данные конечные элементы реализованы в вычислительном комплексе ПРИНС. Представлены верификационные тесты, на основании которых выполнено исследование точности и сходимости результатов расчета различных оболочек с использованием этих конечных элементов. Оболочечные конструкции находят широкое применение в различных областях техники – строительстве, машиностроении, самолетостроении, судостроении и т. д. Специалисты по проектированию и расчету таких конструкций нуждаются в надежном и доступном инструменте для решения практических задач. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть одним из них. Описываются конечные элементы оболочек, реализованные в вычислительном комплексе ПРИНС. Получены результаты верификационных тестов, подтверждающие высокую точность и сходимость этих конечных элементов. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач, связанных с расчетами оболочечных конструкций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, методы расчеты оболочек, многослойные пластины, многослойные оболочки, слоистые конструкции, механика деформируемых тел

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-1749-5797, eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104; agapovvp@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-3967-2114, eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; markovich-as@rudn.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich²

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

 markovich-as@rudn.ru

Article history

Received: August 1, 2021

Revised: October 18, 2021

Accepted: October 30, 2021

For citation

Agapov V.P., Markovich A.S. Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6): 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627>

Abstract. The theoretical foundations of compatible finite elements construction for static and dynamic analysis of single-layer and multilayer shells are discussed. These finite elements are implemented in the PRINS computer program. The paper presents verification tests to investigate the accuracy and convergence of the results of calculating various shells using these finite elements. Shell structures are widely used in various fields of technology – construction, mechanical engineering, aircraft construction, shipbuilding, etc. Specialists on the design and calculation of such structures need a reliable and accessible tool for the practical problems solving. Computer program PRINS can be one of such tools. It can be effectively used by engineers of design and scientific organizations to solve a wide class of engineering problems related to the calculations of shell structures. The paper describes the finite elements of the shells, implemented in the PRINS program. The results of verification calculations are presented, which confirm the high accuracy of this program.

Keywords: finite element method, PRINS program, calculation methods, shells, multilayer plates, multilayer shells, layered structures, mechanics of deformable bodies

Введение

Оболочки находят широкое применение в различных областях техники – строительстве, машино-, самолето- и судостроении и т. д. Фундаментальные вопросы теории расчета оболочек подробно исследованы в работах отечественных и зарубежных авторов (см., например, [1–5]). В этих работах получены уравнения, полностью описывающие напряженно-деформированное состояние тонких оболочек произвольной формы при произвольном нагружении. Однако эти уравнения не имеют общего аналитического решения. Различными авторами получены частные решения для оболочек сравнительно простой формы. Поиски таких решений ведутся и в настоящее время [6–9]. Наиболее известные из них, апробированные многолетней практикой использования, приведены в справочной и учебной литературе [10–11].

Универсальным инструментом для расчета оболочек произвольной формы стал появившийся в 1956 г. метод конечных элементов (МКЭ) [12]. Универсальность метода обеспечивается тем, что поверхность оболочки представляется в виде совокупности элементов простой геометрической формы, треугольников и/или четырехугольников, которые могут быть как плоскими, так и криволинейными. Предпринимались попытки построить криволинейный конечный элемент на основе теории оболочек [13], однако сделать такой элемент универсальным не удалось. Поэтому в настоящее время для расчета оболочек применяются либо плоские конечные элементы, построенные на основе теории изгиба пластин [14; 15], либо криволинейные, построенные на основе общей теории упругости [16].

Метод конечных элементов реализован в различных компьютерных программах. Доверием расчетчиков и проектировщиков пользуются те из них, которые тщательным образом верифицированы. Предметом исследования в данной статье является разработанный профессором В.П. Агаповым вычислитель-

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1749-5797, eLIBRARY SPIN: 2422-0104; agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3967-2114; eLIBRARY SPIN: 9203-1434; markovich-as@rudn.ru

ный комплекс ПРИНС (ВК ПРИНС), развитие которого осуществляется совместно с его учениками. Кратко описывается теория и практическая реализация используемых в этом комплексе оболочечных конечных элементов (КЭ), и приводятся многочисленные примеры расчета оболочек различной формы.

Метод

В ВК ПРИНС для расчета тонких оболочек используются плоские трех- и четырехугольные конечные элементы, реализованные в однослойном и многослойном вариантах. Так как ВК ПРИНС предназначен для расчетов как линейно, так и нелинейно деформируемых конструкций, принципиальная позиция при разработке конечных элементов заключалась в получении наиболее простых математических формулировок. Это обстоятельство объясняется необходимостью использовать в расчетах достаточно густые сетки КЭ, с одной стороны, и потребностью многократного перерасчета жесткостных характеристик элементов в процессе решения нелинейных задач, с другой. Поэтому за основу при построении оболочечных элементов принят простейший треугольник (рис. 1, а) с линейными аппроксимирующими функциями для мембранных перемещений и функцией в виде неполного кубического полинома для прогибов (1).

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y,$$

$$w = q_1 + q_2 x + q_3 y + q_4 x^2 + q_5 xy + q_6 y^2 + q_7 x^3 + q_8 xy^2 + q_9 y^3. \quad (1)$$

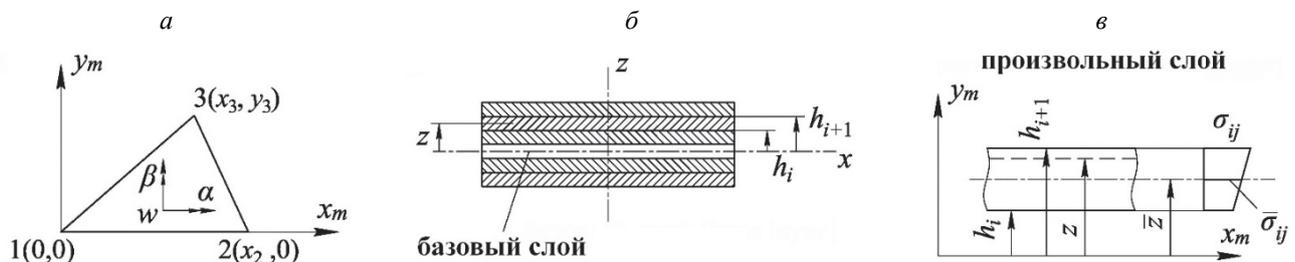


Рис. 1. Построение КЭ многослойной оболочки:
а – треугольный КЭ в местных координатах x_m – y_m ; б, в – поперечное сечение

Конечный элемент с такими функциями перемещений обладает хорошо известными специалистам недостатками (см., например, [14]), главные из которых – неинвариантность по отношению к местной системе координат и отсутствие совместности поворотов нормали с соседними элементами на границах, не совпадающих с местной осью x_m . Однако на его основе можно построить усовершенствованный треугольный конечный элемент. Для этой цели при разработке многослойных элементов (тип EL34) в ВК ПРИНС использована методика, предложенная профессором В.П. Агаповым [17], а при разработке однослойных элементов (тип EL36) – методика, изложенная в работе Р. Клафа и Дж. Точера [14]. Основная идея в обоих случаях заключается в использовании для получения характеристик заданного треугольного КЭ трех субтреугольников с аппроксимирующими функциями перемещений, принимаемых в виде (1). Методика профессора В.П. Агапова поясняется на рис. 2, а методика Р. Клафа и Дж. Точера – на рис. 3.

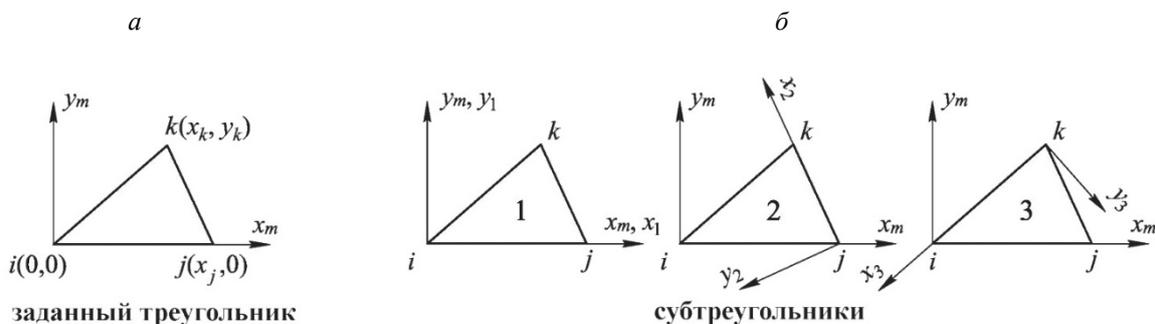


Рис. 2. Вычисление матрицы изгибной жесткости:
а – треугольный КЭ с узлами i, j, k ; б – субтреугольники в местных осях

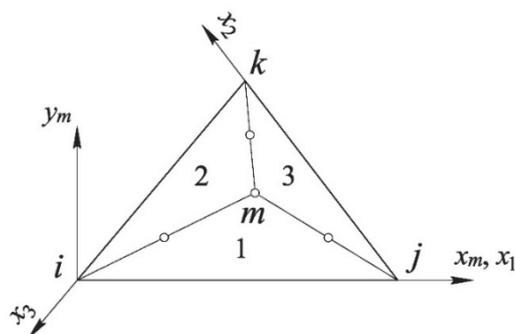


Рис. 3. Формирование треугольного конечного элемента Р. Клафа и Дж. Точера

В обоих случаях характеристики субтреугольников первоначально формируются в их местных осях, затем преобразуются к общим для заданного треугольника осям $x_m - y_m$, суммируются и усредняются.

Как показано в [14; 17], усовершенствованные таким образом треугольные элементы обладают свойством инвариантности по отношению к координатным осям и обеспечивают совместность перемещений и поворотов с соседними элементами на всех границах.

Характеристики четырехугольного КЭ получаются суммированием и усреднением характеристик четырех треугольников по схеме, приведенной на рис. 4.

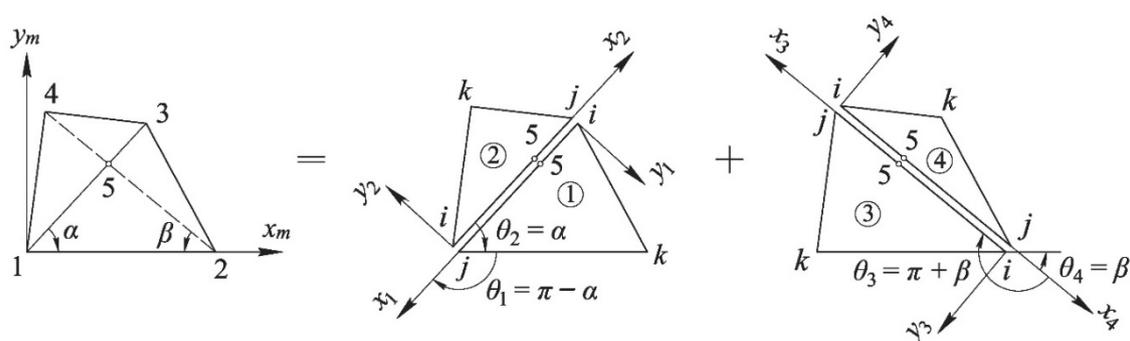


Рис. 4. Формирование четырехугольного конечного элемента

Детальное описание способов получения всех необходимых для расчета оболочек характеристик плоских конечных элементов можно найти в [14; 15; 17]. Целью данной работы является сопоставительный анализ реализованных в ВК ПРИНС оболочечных КЭ, а также анализ точности и сходимости результатов, получаемых с их помощью.

Результаты и обсуждение

Для верификации описанных выше конечных элементов приводим ряд численных расчетов, выполненных в ВК ПРИНС.

Однослойная пологая оболочка. Рассматривается пологая оболочка, срединная поверхность которой является эллиптическим параболоидом (рис. 5, а) при следующих исходных данных: $a = b = 10$ м, $h = 10$ см, $f_1 = f_2 = 0,5$ м, $E = 3 \times 10^4$ МПа, $\nu = 0,2$, $q = 1$ кПа. Оболочка опирается на жесткие в своей плоскости и гибкие из плоскости поперечные диафрагмы.

Срединная поверхность рассматриваемой оболочки описывается уравнением:

$$z = f \left[\frac{f_1}{f} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \frac{f_2}{f} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^2 - 1 \right]. \quad (2)$$

Данная поверхность образована переносом линии $f_1(x)$ по линии $f_2(y)$.

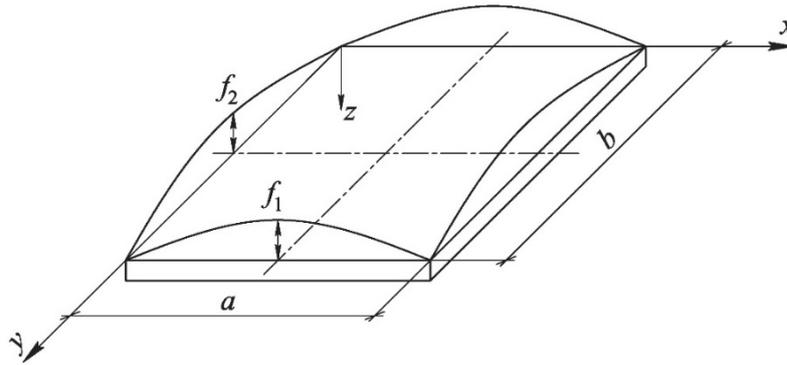


Рис. 5. Расчет полой оболочки

Произведена оценка точности и выполнен анализ сходимости результатов расчета, полученных с использованием треугольных и четырехугольных элементов однослойной оболочки (тип EL36). Для этих целей построено в общей сложности двенадцать конечно-элементных схем рассматриваемой оболочки (рис. 6) с различной плотностью сетки: 10×10 , 14×14 , 20×20 , 30×30 , 36×36 , 40×40 . Аналитическое решение этой задачи приведено в [11].

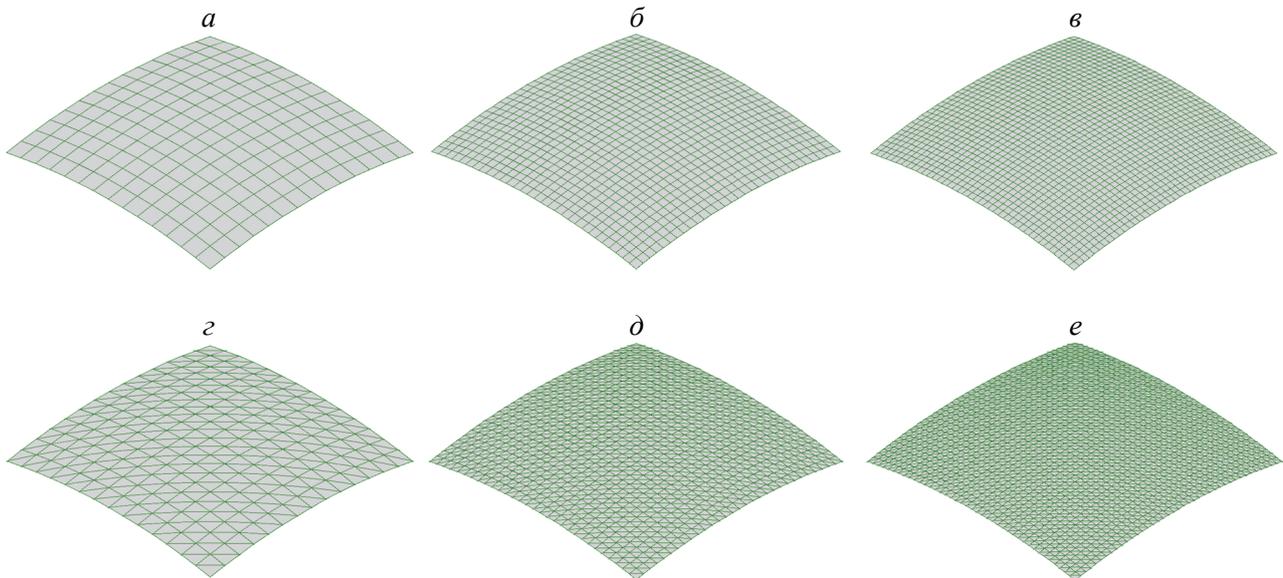


Рис. 6. Конечно-элементные схемы полой оболочки:
a, б, в – для расчета прямоугольными КЭ; *г, д, е* – для расчета треугольными КЭ

Сравнение результатов, полученных в ВК ПРИНС, с данными аналитического расчета проводилось в центральной точке оболочки по вертикальным перемещениям, а также по суммарным напряжениям для верхней и нижней поверхностей оболочки, которые вычислялись по формуле

$$\sigma = \frac{N}{h} \pm \frac{6M}{h^2}, \quad (3)$$

где N и M – мембранная погонная сила и погонный изгибающий момент в сечении оболочки соответственно.

Ориентация поверхностей оболочки определяется направлением местной оси z_m конечных элементов, положительное направление которой в центральной точке совпадает с направлением глобальной оси z на рис. 5. Результаты численного расчета полой оболочки представлены в табл. 1.

Результаты расчета оболочки

Сетка КЭ	Вертикальное перемещение в центральной точке оболочки w , м			Напряжения в центральной точке оболочки		
	Решение по МКЭ	Аналитическое решение	Δ_w , %	Решение по МКЭ		Аналитическое решение
				$\sigma_{xx,v} = \sigma_{yy,v}$, кПа	Δ_σ , %	$\sigma_{xx,v} = \sigma_{yy,v}$, кПа
14×14 (3)	-0,000235	-0,000221	6,33	-146,24	0,58	-145,39/-113,6
30×30 (3)	-0,00022			-122,01	7,9	
14×14 (4)	-0,00023		0,45	-145,8	0,28	
30×30 (4)	-0,000222		4,07	-118,2	3,72	
40×40 (4)	-0,0002215		0,45	-146,12	0,5	
				0,22	-121,88	
				-145,82	0,29	
				-116,18	2,27	
				-145,6	0,15	
				-114,34	0,65	

Поля перемещений и напряжений в оболочке показаны на рис. 7.

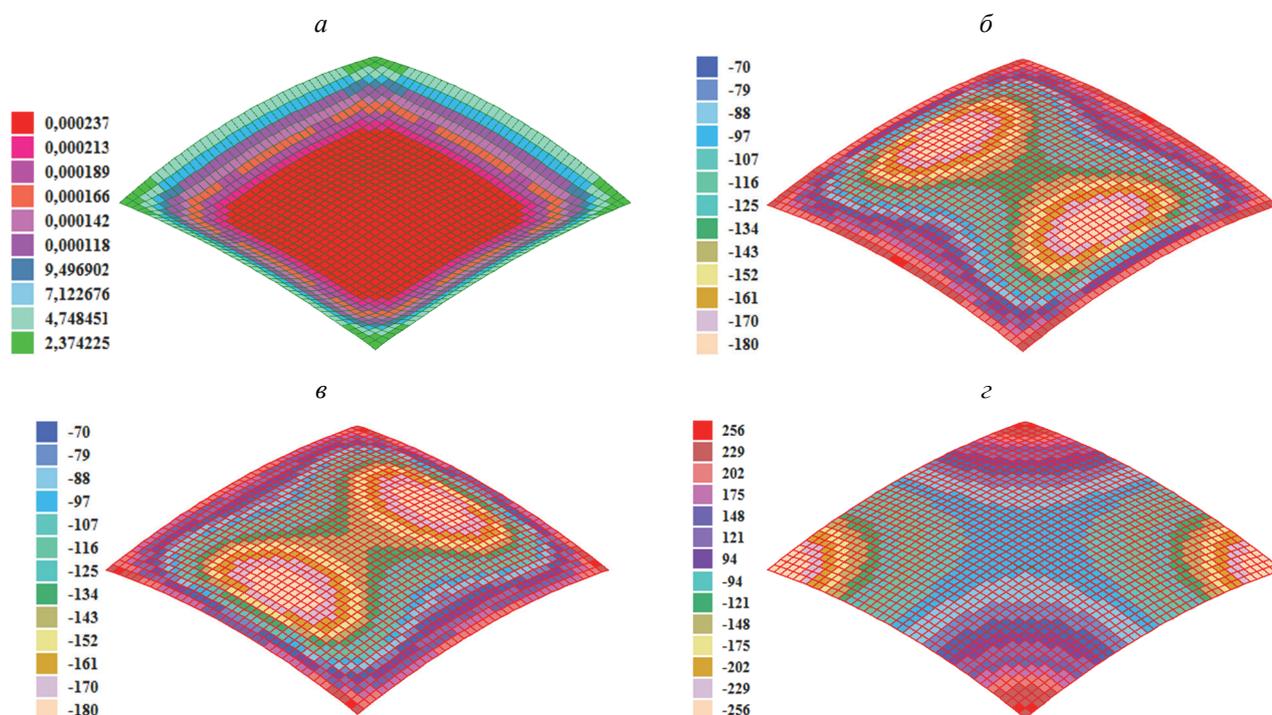


Рис. 7. Результаты расчета пологой оболочки:

a – деформированная схема оболочки, поля суммарных перемещений, м; $б$ – поля суммарных нормальных напряжений σ_{xx} на верхней поверхности, кПа; $в$ – поля суммарных нормальных напряжений σ_{xx} на нижней поверхности, кПа; $г$ – поля касательных напряжений τ_{xy} , кПа

Как видно из табл. 1, ВК ПРИНС обеспечивает одинаково устойчивое решение с использованием как треугольных, так и четырехугольных КЭ. При относительно грубой сетке КЭ погрешность расчета составляет менее 6 %. График сходимости по перемещениям приведен на рис. 8.

Сферическая оболочка под действием равномерного давления. Рассматривается защемленная по краям сферическая оболочка, нагруженная равномерной нагрузкой $p = 7$ кПа (рис. 9). Исходные данные следующие: $R = 2,28$ м, $\alpha = 35^\circ$, $h = 7,6$ см, $E = 3 \times 10^4$ МПа, $\nu = 0,167$.

Аналитическое решение этой задачи методом Штаермана – Геккелера приводится в [11]. Верификационный расчет оболочки выполнен оболочечным конечным элементом (тип EL36) при различной густоте КЭ сетки: 8×32 , 12×48 , 16×64 , 32×128 (рис. 10).

Результаты расчета сферической оболочки, полученные с использованием ВК ПРИНС, показаны на рис. 11.

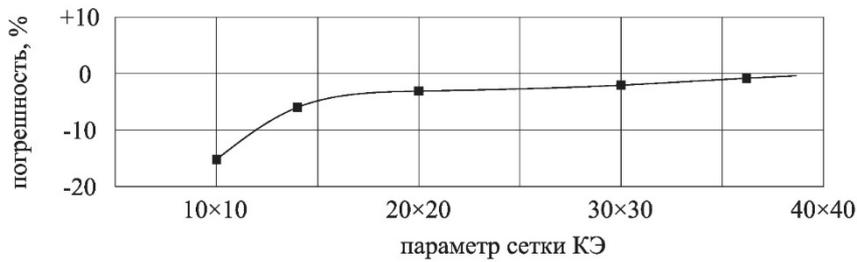


Рис. 8. График сходимости результатов расчета по перемещениям

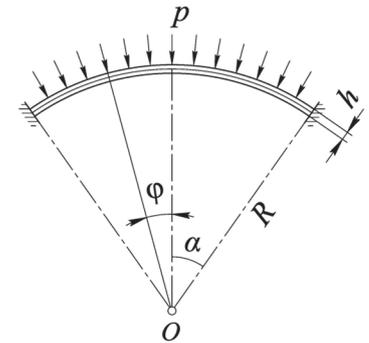


Рис. 9. Расчет сферической оболочки

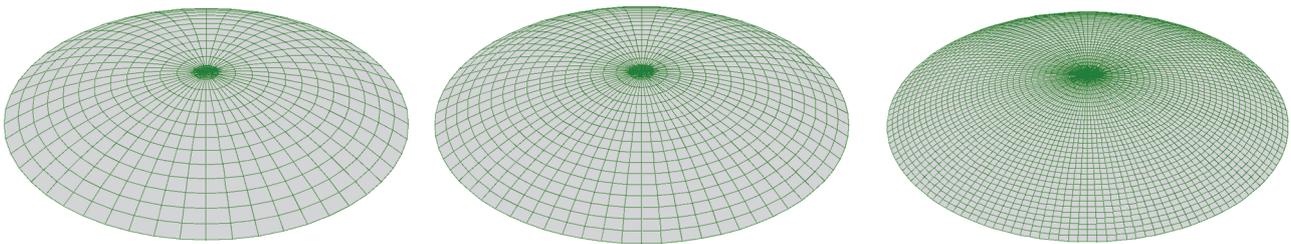


Рис. 10. Конечные-элементные схемы сферической оболочки

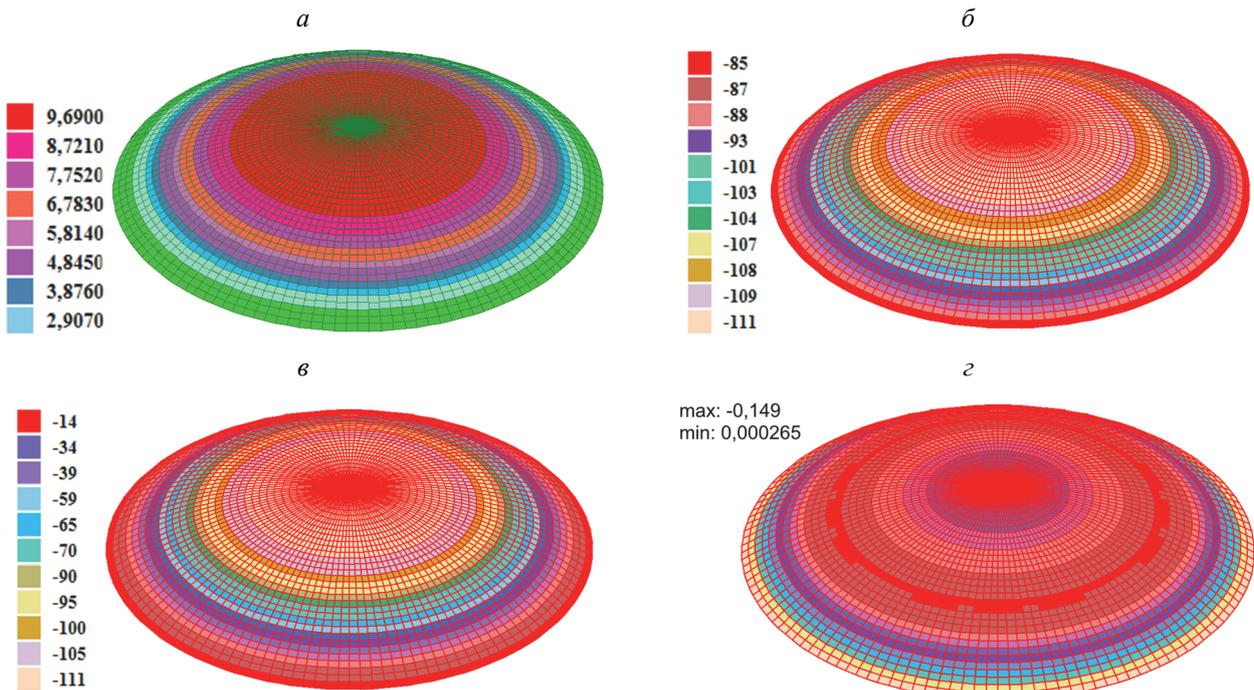


Рис. 11. Результаты расчета сферической оболочки:

а – деформированная схема оболочки, поля суммарных перемещений $\times 10^6$, м; б – поля нормальных напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$, кПа; в – поля нормальных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, кПа; г – поля изгибающих моментов M_x , кНм/м

Графики сходимости результатов расчета по меридиональным изгибающим моментам и кольцевым нормальным напряжениям показаны на рис. 12 и рис. 13 соответственно.

Данные, приведенные на этих рисунках, демонстрируют высокую точность используемых для расчетов конечных элементов.

Резервуар, состоящий из цилиндрической части и сферического купола. Рассмотрим куполообразную оболочку, переходящую в цилиндрическую, при действии равномерного давления $p = 500$ кПа (рис. 14).

Исходные данные следующие: $R_m = R_t = 20$ м, $h = 50$ см, $E = 3 \times 10^4$ МПа, $\nu = 0,2$. Резервуар жестко закреплен в основании.

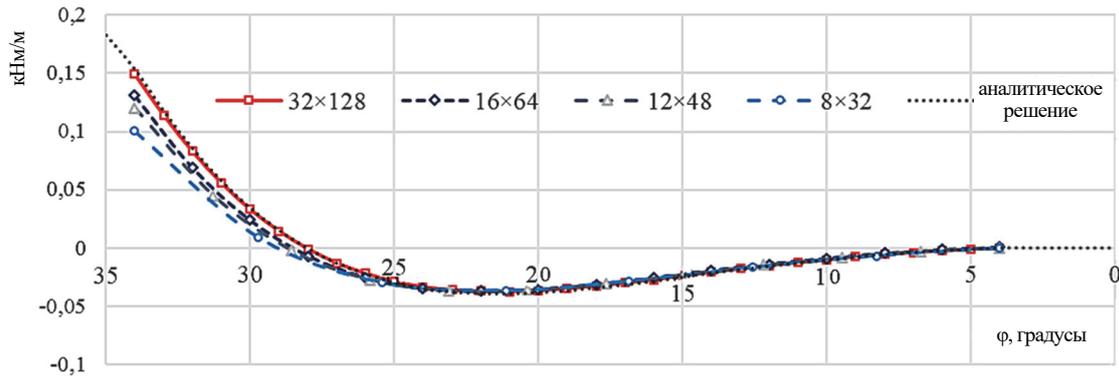


Рис. 12. График сходимости результатов расчета по меридиональным моментам M_x

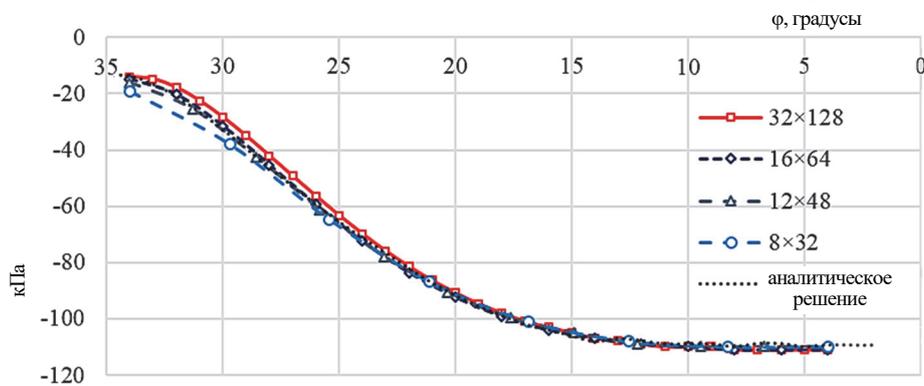


Рис. 13. График сходимости результатов расчета по кольцевым напряжениям σ_y

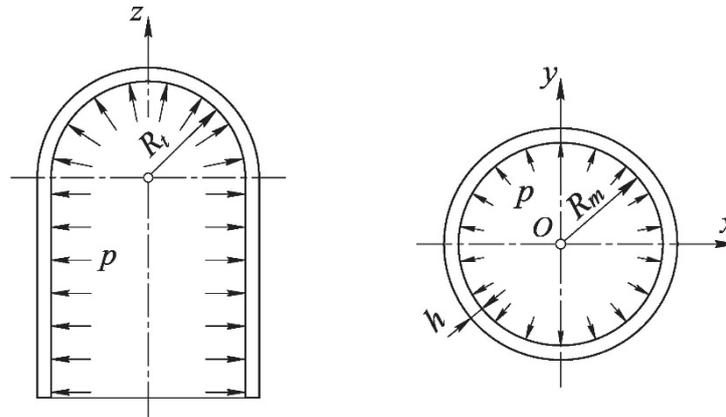


Рис. 14. Расчет резервуара

Конечно-элементные схемы резервуара были построены с использованием треугольных и четырехугольных элементов оболочки (тип EL36) и имели следующие параметры: 12×24 , 18×36 , 24×48 , 30×60 (рис. 15).

Напряженное состояние рассматриваемого резервуара можно определить с использованием безмоментной теории (краевой эффект не рассматривается).

Нормальные напряжения в цилиндрической части равны:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}, \quad \sigma_t = \frac{pR}{h}. \quad (3)$$

Напряжения в сферическом куполе определяются уравнением

$$\sigma_t = \sigma_m = \frac{pR}{2h}. \quad (4)$$

Результаты расчета резервуара в ВК ПРИНС представлены в табл. 2.

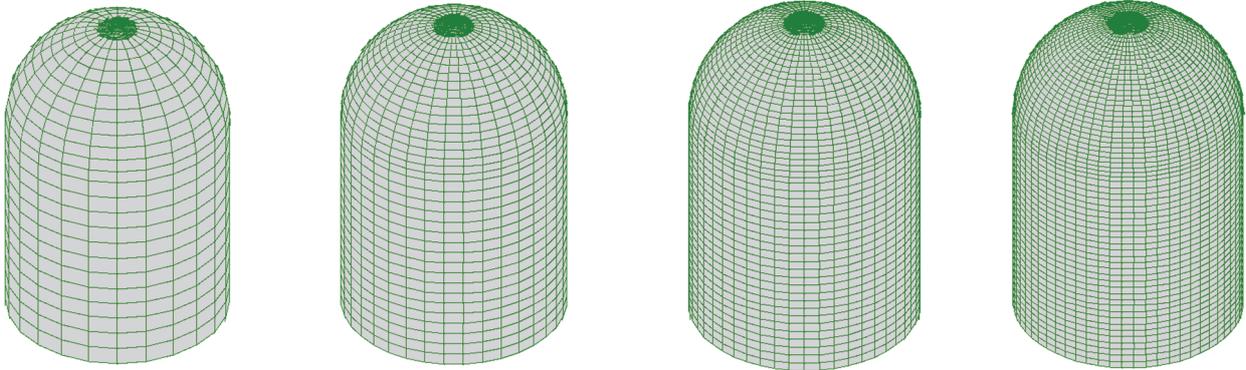


Рис. 15. Конечно-элементные схемы резервуара

Таблица 2

Результаты расчета резервуара

Сетка КЭ	Цилиндрическая оболочка				Сферический купол			
	Решение по МКЭ		Аналитическое решение		Решение по МКЭ		Аналитическое решение	
	σ_m , кПа	σ_t , кПа	σ_m , кПа	σ_t , кПа	σ_m , кПа	σ_t , кПа	σ_m , кПа	σ_t , кПа
12×24	9900	19 800	10 000	20 000	9950	9990	10 000	10 000
18×36	9960	19 900			9960	10 000		
24×48	9980	20 000			9980	10 000		
30×60	9990	20 000			9990	10 000		

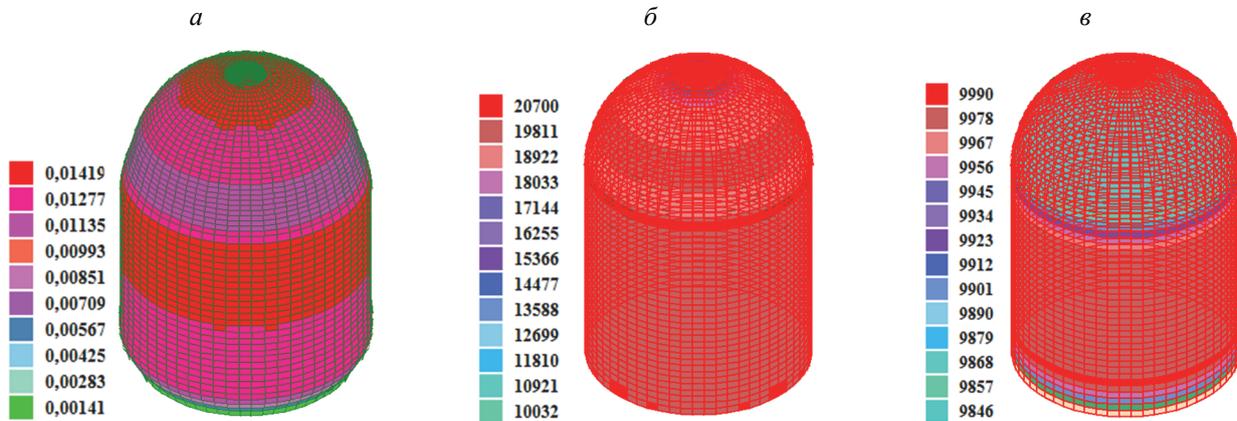


Рис. 16. Результаты расчета резервуара:

a – деформированная схема резервуара, поля суммарных перемещений, м; *б* – поля нормальных напряжений в меридиональном направлении σ_m , кПа; *в* – поля нормальных напряжений в кольцевом направлении σ_t , кПа

Поля перемещений и напряжений в резервуаре показаны на рис. 16.

Как видно из табл. 2, результаты, полученные с использованием ВК ПРИНС, практически совпадают с аналитическим решением по безмоментной теории.

Пологая слоистая цилиндрическая панель. Приводится расчет полой слоистой цилиндрической панели, опирающейся на жесткие в своей плоскости и гибкие из плоскости поперечные диафрагмы (рис. 17, *a*). Размеры панели: $a_1 = 1$ м, $a_2 = 2$ м, $R_1 = 3$ м. Поперечное сечение панели состоит из пяти симметрично расположенных относительно продольной оси слоев (рис. 17, *б*).

Характеристики слоев следующие: $h_1 = 0,5$ см, $h_2 = 1,5$ см, $h_3 = 1,6$ см, $E_1 = 7 \times 10^4$ МПа, $E_2 = 2,6 \times 10^4$ МПа, $E_3 = 195$ МПа, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,13$, $\nu_3 = 0,4$, $q = 35$ кПа.

Расчеты выполнялись с использованием треугольного многослойного КЭ оболочки (тип EL34) при разбиении панели на сетку КЭ следующих параметров: 6×12, 9×18, 12×24, 15×30 (рис. 18).

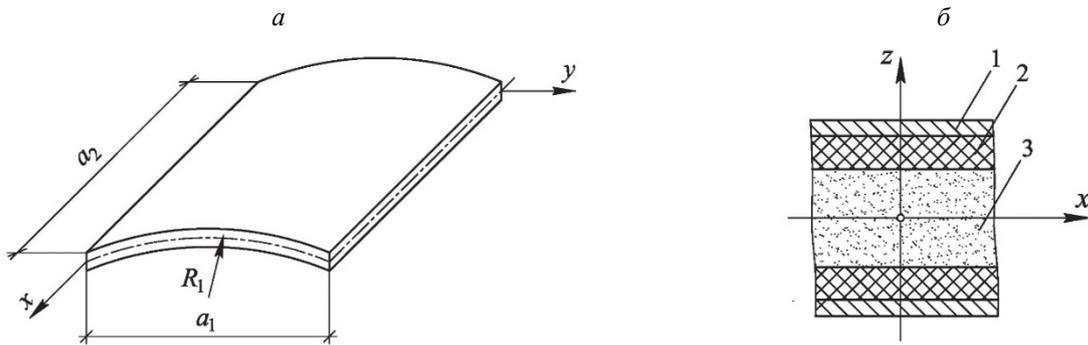


Рис. 17. Расчет слоистой цилиндрической панели:
а – общий вид; б – поперечное сечение панели

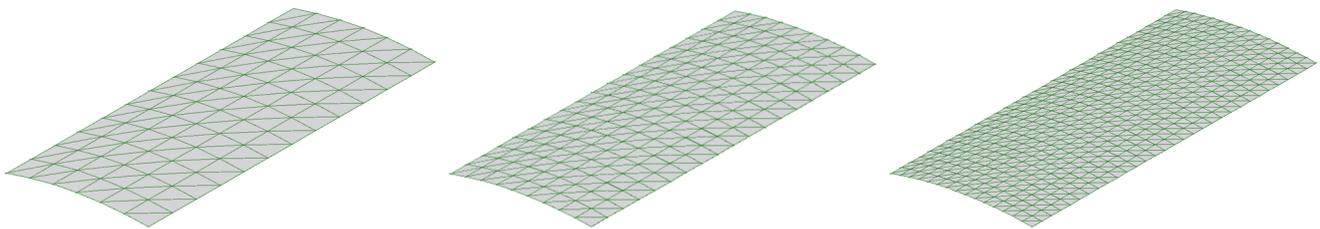


Рис. 18. Конечно-элементные схемы для расчета слоистой панели

Таблица 3

Результаты расчета слоистой цилиндрической панели

Сетка КЭ	Вертикальное перемещение в центральной точке оболочки w , м		Усилия в середине панели				Погрешность, Δ_w , %
	Решение по МКЭ	Аналитическое решение	Решение по МКЭ		Аналитическое решение		
			M_y , кН/м	N_y , кН/м	M_y , кН/м	N_y , кН/м	
6×12	0,000459	0,000455	3,086	-15,8	3,05	-15,29	0,88
9×18	0,000458		3,08	-15,5			0,65
12×24	0,000456		3,075	-15,4			0,2

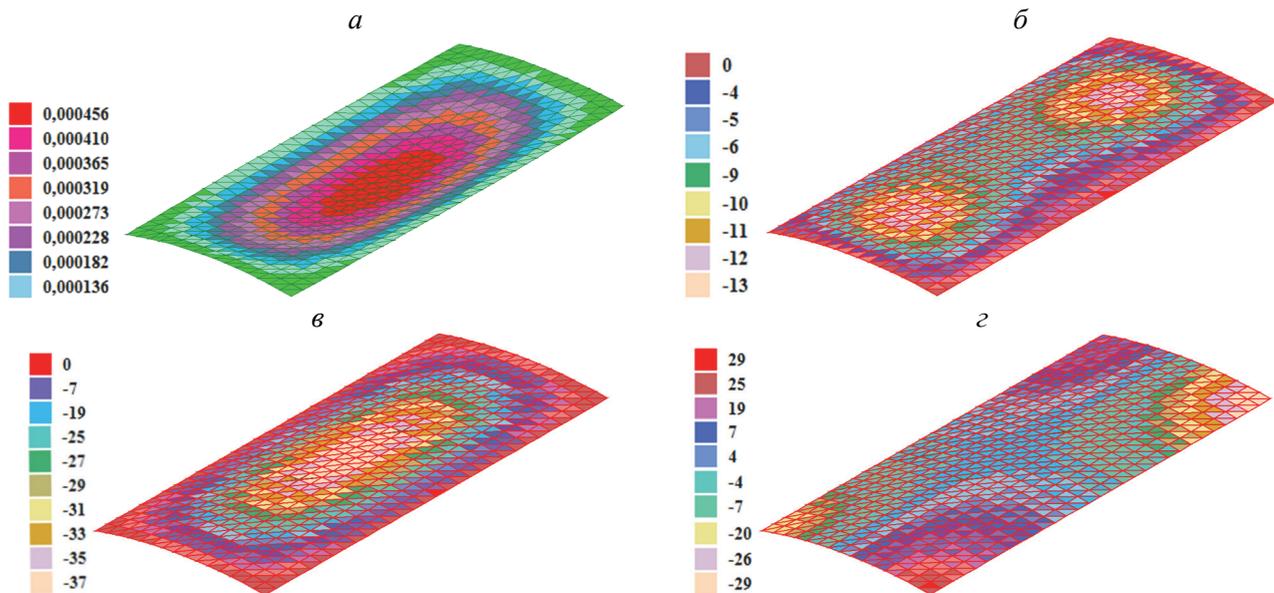


Рис. 19. Результаты расчета слоистой пологой цилиндрической панели:
а – деформированная схема панели, поля суммарных перемещений, м; б – поля нормальных усилий N_x , кН/м;
в – поля нормальных усилий N_y , кН/м; з – поля сдвигающих усилий N_{xy} , кН/м

Аналитический расчет рассматриваемой задачи приведен в [18].

Результаты численного расчета представлены в табл. 3.

Поля перемещений и напряжений в слоистой панели показаны на рис. 19.

Погрешность вычислений составляет от 3,5 до 0,2 % в зависимости от размерности сетки КЭ.

Заключение

В ВК ПРИНС реализованы принципы построения конечных элементов для расчета оболочечных конструкций, изложенные в данной статье.

На основании многочисленных верификационных тестов установлено, что конечные элементы (тип EL36 и тип EL34), применяемые для расчета однослойных и многослойных оболочек, обладают быстрой сходимостью, имеют достаточно высокую точность. Для прямоугольных на плане пологих оболочек с длиной стороны l оптимальный размер конечного элемента, обеспечивающий требуемую точность решения при значительной экономии вычислительных ресурсов, составляет $\left(\frac{1}{24} \div \frac{1}{36}\right)l$. Для расчета цилиндрических и сферических оболочек размер конечного элемента рекомендуется принимать в пределах $\left(\frac{1}{16} \div \frac{1}{24}\right)d$.

ВК ПРИНС может эффективно применяться специалистами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач.

Список литературы

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М. – Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 252 с.
3. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 512 с.
4. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. М.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
5. Timoshenko S.P., Woinowski-Krieger S. Theory of plates and shells. 2nd edition. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
6. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек. М.: РУДН, 2009. 356 с.
7. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы. М.: РУДН, 2010. 542 с.
8. Кривошапко С.Н. Два вида расчетных уравнений для оболочек в произвольных криволинейных координатах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 15–22.
9. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2021. Vol. 17. No. 1. Pp. 51–62. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>
10. Birger I.A. *Strength, sustainability, fluctuations*. Mashinostroyeniye Publ.; 1968. (In Russ.)
11. Аганов В.П., Ковригин И.И., Савостьянов В.Н. Элементы теории оболочек. М.: МГСУ, 2011. 144 с.
12. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.C. Stiffness and deflection analysis of complex structures // J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. Pp. 805–823.
13. Garnet H., Crouzet-Pascal J. Doubly curved triangular finite elements for shell of arbitrary shape. Cruman Research Department Report RE-453. 1973.
14. Clough R.W., Tocher J.L. Finite element stiffens matrix for analysis of plate bending // Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Meth. Ohio, 1965. Pp. 515–545.
15. Clough R.W., Felippa C.A. A refined quadrilateral element for analysis of plate bending // Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Ohio, 1968. Pp. 399–440.
16. Irons B.M., Zienkiewicz O.C. The isoparametric finite element system – a new concept in finite element analysis // Proc. Conf.: Recent Advances in Stress Analysis. London: Royal Aeronautical Society, 1969.
17. Аганов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2004. 247 с.
18. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. К.: Будівельник, 1986. 176 с.