

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607
 УДК 539.3:534.1

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек

Е.М. Зверьяев^{1,2}  , Е.М. Тупикова¹ 

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

²Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация

✉ zveriaev@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 7 июня 2021 г.

Доработана: 2 августа 2021 г.

Принята к публикации: 21 сентября 2021 г.

Аннотация. Предложен общий метод построения решения уравнений замкнутых и открытых тонких оболочек с сохранением порядка дифференциальных уравнений и выполнением всех граничных условий. Соотношения упругости преобразованы к виду, позволяющему в соответствии с ранее предложенным методом Сен-Венана – Пикара – Банаха произвести итерационное вычисление всех искомым неизвестных задачи. Процедура построения решения сводится к замене восьми дифференциальных уравнений первого порядка исходной системы теории оболочек на восемь соответствующих интегральных уравнения с малым множителем, имеющим смысл отношения ширины оболочки к ее длине или изменямости напряженно-деформированного состояния в поперечном направлении. Вычисленные путем прямого интегрирования пятнадцать неизвестных исходной задачи выражены через пять основных неизвестных. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы приводит к решению восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся и быстро меняющихся компонентов основных неизвестных. Медленно меняющиеся компоненты описывают классическое напряженно-деформированное состояние. Быстро меняющиеся – определяют краевые эффекты в точках разрыва непрерывности медленно меняющегося классического решения и выполнение неудовлетворенных ими граничных условий из-за понижения порядка дифференциальных уравнений классической теории, основанной на гипотезе Кирхгофа. В общем случае решение представляется в виде асимптотических рядов по малому параметру изменямости с коэффициентами в виде степенных рядов по поперечной координате. Изложение проиллюстрировано примером построения итерационного процесса для длинной круговой цилиндрической панели. В силу теоремы о неподвижной точке итерационный процесс является сходящимся.

Ключевые слова: принцип сжатых отображений, итерации, упругость, полоса, полное решение, метод, Сен-Венан, Пикар, Банах, граничные условия, краевой эффект


Для цитирования

Зверьяев Е.М., Тупикова Е.М. Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 588–607. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607>

Зверьяев Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры проектирования сложных механических систем, Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337; zveriaev@mail.ru

Тупикова Евгения Михайловна, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-8742-3521, Scopus Author ID: 57212351834, eLIBRARY SPIN-код: 5501-6984; tupikova-em@rudn.ru

© Зверьяев Е.М., Тупикова Е.М., 2021


 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Iterative methods for constructing an equations of non-closed shells solution

Evgeny M. Zveryaev^{1,2}  , Evgeniya M. Tupikova¹ 

¹Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

 zveriaev@mail.ru

Article history

Received: June 7, 2021

Revised: August 2, 2021

Accepted: September 21, 2021

Abstract. The elasticity relations are transformed to a form that allows, in accordance with the previously proposed Saint-Venant – Picard – Banach method, to iteratively calculate all the required unknowns of the problem. The procedure for constructing a solution is reduced to replacing eight first-order differential equations of the original system of shell theory with eight corresponding integral equations with a small parameter that has the meaning of the ratio of the shell width to its length or the variability of the stress-strain state in the transverse direction. The fifteen unknowns of the original problem calculated by direct integration are expressed in terms of five main unknowns. The fulfillment of the boundary conditions on the long sides of the strip leads to the solution of eight ordinary differential equations for slowly varying and rapidly varying components of the main unknowns. Slowly varying components describe the classical stress-strain state. The rapidly changing ones determine the edge effects at the points of discontinuity of the slowly changing classical solution and the fulfillment of the boundary conditions unsatisfied by them due to the lowering of the order of the differential equations of the classical theory based on the Kirchhoff hypothesis. In the general case, the solution is represented as asymptotic series in a small variability parameter with coefficients in the form of power series in the transverse coordinate. The presentation is illustrated by an example of constructing an iterative process for a long circular cylindrical panel. By virtue of the fixed-point theorem, the iterative process is convergent.

Keywords: contraction mapping principle, elasticity, strip, complete solution, Saint-Venant, Picard, Banach, method, boundary conditions, boundary effect

For citation

Zveryaev E.M., Tupikova E.M. Iterative methods for constructing an equations of non-closed shells solution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):588–607. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607>

Введение

На настоящем этапе теория упругости, а именно такие ее разделы, как теория оболочек и пластин, требует эволюции в более изящную и непротиворечивую, а трансформация ее методов, поиск более универсальных подходов и алгоритмов являются актуальными научными задачами, особенно в свете развития сегодня материаловедения, создания композитов, анизотропных материалов, имеющих свойства, которые не учитывались в классических моделях. Авторы привлекают неклассические модели оболочек и пластин [1–4], научными школами ведется поиск подходов, позволяющих получить решения для случаев, когда классическая теория с введением традиционных допущений не дает удовлетворительных ответов на поставленные задачи или возникающие вычислительные трудности представляются непреодолимыми [5–8].

Точное аналитическое решение трехмерной задачи теории упругости связано с рядом вычислительных трудностей, поэтому, как правило, трехмерная задача сводится к двумерной при помощи введения некоторых гипотез. В целом прикладные методы решения задач теории пластин и оболочек можно классифицировать следующим образом [3; 9; 10]: 1) метод гипотез; 2) метод разложений по толщине; 3) асимптотические методы. Асимптотические методы особенно интенсивно развивались во второй половине XX в., после того как стало ясно, что классическая теория Лява не во всех случаях обеспечивает необходимую точность решения. Задачи динамики, слоистых и анизотропных оболочек, термоупругости [11; 12] в рамках классической теории Лява не получают достаточно точного решения, приемлемого для практи-

Evgeny M. Zveryaev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Design of Complex Mechanical Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; Professor of the Department of Construction, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337; zveriaev@mail.ru

Evgeniya M. Tupikova, PhD, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8742-3521, Scopus Author ID: 57212351834, eLIBRARY SPIN-code: 5501-6984; tupikova-em@rudn.ru

ческих целей. Поправки Рейсснера и Тимошенко позволяют учесть касательные напряжения и удовлетворить трем граничным условиям на краях. Поперечные напряжения во всех методах отбрасываются как несущественные, что, к примеру, для слоистых оболочек представляется необоснованным.

Метод разложения компонент поля напряжений и деформаций в ряды полиномов по толщине, например в варианте с полиномами Лежандра, имеет то преимущество, что уравнения получаются относительно простыми. На основе этого подхода написано множество работ, посвященных динамическим задачам и термоупругости, слоистым оболочкам [13–15]. Однако совпадение полученных решений с экспериментом зачастую или не проверялось, или недостаточно.

Бурно развивающимся направлением в современной теории упругости также является применение взамен классических положений механики сплошных сред модели континуума Коссера [16], представляющей собой обобщение уравнений механики Эйлера. Популярность этого подхода продиктована назревшей необходимостью учитывать свойства структуры материала на микроуровне. Модели микрополярных оболочек и их свойства посвящена значительная часть новейших публикаций по обозначенной тематике [17–22].

В настоящей работе дано развитие работ о создании непротиворечивой теории оболочек на основе классического подхода механики сплошных сред [23; 24]. В рамках предложенного подхода итерационно решается трехмерная задача теории упругости без введения каких-либо гипотез для сведения к двумерной теории. Итерационный процесс сходится независимо от выбора величин начального приближения. При этом в процессе решения получаются уравнения в напряжениях и перемещениях, которые можно преобразовать к уравнениям в усилиях и моментах. Они совпадут с классическими с точностью до, вообще говоря, некоторых лишних, учтенных в классической теории. Каждому члену в каждом уравнении дается оценка по малому параметру: малые (они же выходящие за рамки точности) члены отбрасываются. Математическая реализация предложенного подхода позволяет избежать значительных вычислительных трудностей. Метод является сходящимся, что представляется принципиально важным. Предложенный подход в перспективе подойдет и для расчета анизотропных и слоистых оболочек, не требуя никаких принципиальных изменений, доработок или введения допущений, увеличится лишь объем выкладок.

Современность характеризуется использованием электронных вычислительных машин в самых разных областях человеческой деятельности. Под их влиянием существенно изменился характер прикладных исследований. Многие методы приближенного определения параметров в различных физических и технических задачах отживают свой век; исследователи, особенно молодые, предпочитают обращаться к вычислительным машинам и пользоваться подходящими численными методами. Большие серии расчетов превратились в своеобразные машинные эксперименты, проведение которых не требует высокой математической культуры. Естественно, возникает вопрос о месте, которое занимают сейчас при решении прикладных задач аналитические методы. Не должны ли они уйти в прошлое и уступить место новым, машинным методам [25; 26]?

Для решения той или иной задачи, прежде всего, необходимо аналитическое построение математической модели. При создании модели обычно принимают во внимание одни особенности модели, пренебрегая другими. Для реализации этих важных положений нужно определить относительные порядки различных элементов системы, сравнивая их друг с другом и с заранее выбранными характерными элементами, приведя переменные и, соответственно, уравнения к безразмерному виду с выделением малых или больших параметров.

Большая часть способов приближенного решения уравнений основана на идее последовательных приближений. Эта идея применяется как при решении уравнений, так и для решения ряда практических задач. Одним из наиболее эффективных методов реализации последовательных приближений являются асимптотические методы теории возмущений.

Асимптотические методы решения уравнений относительно гибки вследствие возможности делать замены зависимых и независимых переменных, после чего задача выглядит совершенно иначе. Считается, что в настоящее время невозможно сформулировать единственную конструктивную процедуру, включающую все возможные применения метода.

Характерная особенность асимптотических задач для дифференциальных уравнений состоит в том, что обычно можно интуитивно догадаться, какая асимптотическая формула или асимптотический ряд должен быть получен. В физических задачах малый параметр берется из безразмерных уравнений путем перехода к безразмерным величинам. Физические задачи удобны с точки зрения применения методов

теории возмущений. Однако даже если общая природа решений известна, доказать, что это действительно асимптотическая формула, довольно трудно.

Считается, что, если при приведении системы уравнений задачи к безразмерному виду появляются представляющие собой коэффициенты малые постоянные величины, решение системы может разлагаться в виде разложений неизвестных в ряды по степеням малого параметра, например μ . Для задач теории тонких упругих оболочек они выглядят так

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu^{a_1} \left(u_{1(0)} + \mu u_{1(1)} + \mu^2 u_{1(2)} + \mu^3 u_{1(3)} + \dots \right), \\ u_2 &= \mu^{a_2} \left(u_{2(0)} + \mu u_{2(1)} + \mu^2 u_{2(2)} + \mu^3 u_{2(3)} + \dots \right), \\ s &= \mu^b \left(s_{(0)} + \mu s_{(1)} + \mu^2 s_{(2)} + \mu^3 s_{(3)} + \dots \right), \\ \varepsilon_1 &= \mu^c \left(\varepsilon_{1(0)} + \mu \varepsilon_{1(1)} + \mu^2 \varepsilon_{1(2)} + \mu^3 \varepsilon_{1(3)} + \dots \right), \\ \varepsilon_2 &= \mu^c \left(\varepsilon_{2(0)} + \mu \varepsilon_{2(1)} + \mu^2 \varepsilon_{2(2)} + \mu^3 \varepsilon_{2(3)} + \dots \right), \\ t_1 &= \mu^{d_1} \left(t_{1(0)} + \mu t_{1(1)} + \mu^2 t_{1(2)} + \mu^3 t_{1(3)} + \dots \right), \\ t_2 &= \mu^{d_2} \left(t_{2(0)} + \mu t_{2(1)} + \mu^2 t_{2(2)} + \mu^3 t_{2(3)} + \dots \right), \\ \kappa_1 &= \mu^{e_1} \left(\kappa_{1(0)} + \mu \kappa_{1(1)} + \mu^2 \kappa_{1(2)} + \mu^3 \kappa_{1(3)} + \dots \right), \\ \kappa_2 &= \mu^{e_2} \left(\kappa_{2(0)} + \mu \kappa_{2(1)} + \mu^2 \kappa_{2(2)} + \mu^3 \kappa_{2(3)} + \dots \right), \\ \tau &= \mu^f \left(\tau_{(0)} + \mu \tau_{(1)} + \mu^2 \tau_{(2)} + \mu^3 \tau_{(3)} + \dots \right), \\ m_1 &= \mu^{g_1} \left(m_{1(0)} + \mu m_{1(1)} + \mu^2 m_{1(2)} + \mu^3 m_{1(3)} + \dots \right), \\ m_2 &= \mu^{g_2} \left(m_{2(0)} + \mu m_{2(1)} + \mu^2 m_{2(2)} + \mu^3 m_{2(3)} + \dots \right), \\ h &= \mu^i \left(h_{(0)} + \mu h_{(1)} + \mu^2 h_{(2)} + \mu^3 h_{(3)} + \dots \right), \\ \tau_{13} &= \mu^{k_1} \left(\tau_{13(0)} + \mu \tau_{13(1)} + \mu^2 \tau_{13(2)} + \mu^3 \tau_{13(3)} + \dots \right), \\ \tau_{23} &= \mu^{k_1} \left(\tau_{23(0)} + \mu \tau_{23(1)} + \mu^2 \tau_{23(2)} + \mu^3 \tau_{23(3)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Здесь перечислены все 15 искоемых неизвестных теории оболочек, записанных в виде разложений в ряд по степеням некоторого малого параметра μ , и использованы следующие обозначения: u_1, u_2 – тангенциальные перемещения срединной поверхности; s – касательное тангенциальное перемещение; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – тангенциальные деформации срединной поверхности; t_1, t_2 – нормальные тангенциальные напряжения; κ_1, κ_2, τ – изменения кривизн поверхности; m_1, m_2 – нетангенциальные напряжения изгиба; h – нетангенциальное напряжение кручения элемента срединной поверхности; τ_{13}, τ_{23} – нетангенциальные касательные напряжения.

Легко видна запись искомых функций по аналогии с записью чисел в некоторой системе счисления μ . Находящаяся в левой части каждого равенства числовая функция представляется в виде суммы отмеченных индексами в скобках числовых функций. Выражение в скобках можно определить как мантиссу числовой функции, а множитель перед скобкой – как ее порядок.¹

Если показатели порядков найдены каким-то образом для всех функций, то разложения можно внести в уравнения и, приравнявая члены с одинаковыми показателями между собой, получить последовательность уравнений итерационного процесса для определения неизвестных в желаемом приближении. При этом в уравнениях должны быть определены асимптотические порядки символов дифференцирования относительно малого параметра для медленно и быстро меняющихся величин. Найденные показатели должны удовлетворять условиям разрешимости задачи, то есть позволять построить решение и выполнить все граничные условия [27].

Конструктивная процедура определения показателей описана, например, в [23; 24]. В кратком изложении она состоит в замене дифференциальных уравнений первого порядка интегральными по схеме Пикара – Линделефа [28–30].

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$, правая часть которого в прямоугольнике $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y . Требуется найти удовлетворяющее при $x = x_0$ начальному условию решение $y(x_0) = y_0$.

Интегрируя обе части уравнения от x_0 до x , получим $\int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение первого порядка заменяется интегральным уравнением, в котором неизвестная функция y находится под знаком интеграла. При этом интегральное уравнение удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию. Заменяя в равенстве $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ функцию y значением y_0 , получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Заменив затем в уравнении y найденным значением y_1 , получаем второе приближение

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx. \text{ Продолжая процесс далее, последовательно находим}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2) dx.$$

⋮

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{(n-1)}) dx.$$

Таким образом, получаем последовательность уточненных функций

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \dots, y_n(x).$$

¹ Во многих работах при представлении функций в виде рядов по малому параметру показатели порядков полагают равными нулю (см., например, [26]). Это справедливо только при решении одного линейного дифференциального уравнения с одним неизвестным, так как решение дифференциального уравнения определяется с точностью до произвольного множителя. В тех немногочисленных работах, где порядки учитываются, показатели предполагается определять интуитивно [27].

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ имеется малый параметр и при этом уравнение можно записать в форме $y' = \mu f_\mu(x, y)$, последовательность уточненных функций будет асимптотически убывающей вместе с μ :

$$y_0(x), \mu y_1(x), \mu^2 y_2(x), \mu^3 y_3(x), \mu^4 y_4(x), \dots, \mu^n y_n(x).$$

Метод Пикара – Линделефа дает последовательность приближений к решению уравнения, так что приближение (n) -е получается из $(n-1)$ -го приближения. Итерационный ряд Пикара – Линделефа прост в реализации. Полученные с помощью этого анализа решения обычно являются степенными рядами.

Исходные уравнения теории оболочек

Уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние оболочки [4] запишем в следующем виде:

– тангенциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 t_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 s_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s_{(0)} \right) &= A_1 A_2 (X_{1+} - X_{1-}), \\ 2\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 t_{2(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 s_{(0)} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} t_{1(0)} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} s_{(0)} \right) &= A_1 A_2 (X_{2+} - X_{2-}), \\ -\varepsilon \frac{4}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230} \right) + \varepsilon^2 2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) &= \\ = Z_+ - Z_- + \varepsilon \frac{1}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} + X_{2-}) \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h_{(0)} \right) + 2 A_1 A_2 \tau_{130} &= A_1 A_2 (X_{1+} + X_{1-}), \\ \varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 m_{2(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 h_{(0)} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} m_{1(0)} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} h_{(0)} \right) + 2 A_1 A_2 \tau_{230} &= A_1 A_2 (X_{2+} + X_{2-}); \end{aligned} \quad (2)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\varepsilon_{1(0)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{10}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_{20} + \frac{1}{R_1} w_0,$$

$$\varepsilon_{2(0)} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_{10} + \frac{1}{R_2} w_0,$$

$$\omega_{(0)} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_{10}}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_{20}}{A_2}; \quad (3)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением:

$$\begin{aligned} \kappa_{1(0)} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2}, \\ \kappa_{2(0)} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1}, \\ \tau_{(0)} &= -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2}; \end{aligned} \quad (4)$$

– формулы, связывающие тангенциальные напряжения с тангенциальными деформациями:

$$t_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{1(0)} + \nu \varepsilon_{2(0)}), \quad t_{2(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{2(0)} + \nu \varepsilon_{1(0)}), \quad s_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \omega_{(0)}; \quad (5)$$

– формулы, связывающие нетангенциальные напряжения с нетангенциальными деформациями:

$$m_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\kappa_{1(0)} + \nu \kappa_{2(0)}), \quad m_{2(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\kappa_{2(0)} + \nu \kappa_{1(0)}), \quad h_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \tau_{(0)}, \quad (6)$$

где $t_{1(0)}, t_{2(0)}$ – тангенциальные нормальные напряжения; $s_{(0)}$ – тангенциальное касательное напряжение; $m_{1(0)}, m_{2(0)}$ – нетангенциальные нормальные напряжения; $h_{(0)}$ – крутящее напряжение; τ_{130}, τ_{230} – поперечные касательные напряжения; $\varepsilon_{1(0)}, \varepsilon_{2(0)}$ – тангенциальные нормальные компоненты деформации; $\omega_{(0)}$ – тангенциальная деформация сдвига; u_{10}, u_{20} и w_0 – тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности.

Введен малый параметр $\varepsilon = h^*/R$, где h^* – размерная полутолщина оболочки, R – некоторый размерный характерный радиус срединной поверхности оболочки. Индексы ноль в скобках и без скобок указывают на то, что эти уравнения получены из уравнений теории упругости в нулевом приближении с точностью $O(\varepsilon)$. Имея целью построение второго (относительно первого итерационного процесса, с помощью которого выведены уравнения теории оболочек из уравнений теории упругости [4]) итерационного процесса методом SVPB, опустим индексы (0) и 0, считая уравнения (1)–(6) достаточно точными.

Уравнения состояния узкой незамкнутой оболочки

Рассмотрим незамкнутую оболочку, срединная поверхность которой определяется координатами $\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{11}$, $\alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{21}$. Определенную таким образом криволинейную полосу возьмем узкой $|\alpha_{20} - \alpha_{21}| \ll 1$. Введем новое обозначение координаты $\alpha_2 = \mu\theta$. При этом будет $\alpha_{20} = \mu\theta_0$, $\alpha_{21} = \mu\theta_1$.

Выберем малый параметр μ таким образом, чтобы ширина полосы определялась соотношением $|\theta_0 - \theta_1| = 1$. Соответственно, малый параметр μ определяется выражением

$$\mu = \frac{|\alpha_{20} - \alpha_{21}|}{|\theta_0 - \theta_1|}.$$

В уравнениях (1)–(6) введем замену переменной α_2 у искомых неизвестных по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (7)$$

Уравнения состояния приводятся к следующему виду:

– тангенциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} -\mu A_2 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} - \mu \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_1 - A_1 \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_2 - 2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s &= \mu \varepsilon^{-2} A_1 A_2 \frac{1}{2} (X_{1+} - X_{1-}), \\ -A_1 \frac{\partial t_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} t_2 - \mu A_2 \frac{\partial s}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} t_1 - 2 \mu \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} s &= \mu \varepsilon^{-2} A_1 A_2 \frac{1}{2} (X_{2+} - X_{2-}), \\ -\frac{4}{3} \varepsilon \left(\mu \tau_{13} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \mu A_2 \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \mu \tau_{23} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \mu 2 A_1 A_2 \left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2} \right) &= \\ = \mu A_1 A_2 (Z_+ - Z_-) + \varepsilon \mu \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} + X_{2-}) \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left(-\mu m_1 \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_2 - 2 \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h \right) + 2 \mu \tau_{13} &= \\ = \mu (X_{1+} + X_{1-}), \\ \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{A_2} \frac{\partial m_2}{\partial \theta} - \mu m_2 \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} m_1 - 2 \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} h \right) + 2 \mu \tau_{23} &= \\ = \mu (X_{2+} + X_{2-}); \end{aligned} \quad (9)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\mu \varepsilon_1 = \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \mu \frac{1}{R_1} w,$$

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \mu \frac{1}{R_2} w, \\ \mu \omega &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 - 2\mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2; \end{aligned} \quad (10)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением:

$$\begin{aligned} \mu^2 \kappa_1 &= -\mu^2 \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ \mu^2 \kappa_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \mu^2 \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \\ \mu \tau &= -\frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu \frac{3}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{3}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (5), связывающие тангенциальные напряжения с тангенциальными деформациями, и формулы (6), связывающие нетангенциальные напряжения с нетангенциальными деформациями, не меняют своего вида.

При подстановке выражения (7) в уравнения (1)–(4) малый параметр μ оказывается в знаменателе. Чтобы избежать этого и перевести μ в числитель, уравнения (8)–(11) умножены на μ .

Построение итерационного процесса интегрирования уравнений (5), (6), (8)–(11) для оболочки нулевой кривизны

Внесем в уравнения (8)–(11) следующие значения коэффициентов первой и второй квадратичной формы, свойственные оболочкам нулевой кривизны:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{1}{R_1} = 0, \quad A_1 = 1.$$

Уравнения состояния приводятся к следующему виду:

– тангенциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A_2} \frac{\partial s}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} - \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_1 + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_2 &= \mu \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} (X_{1+} - X_{1-}), \\ -\frac{1}{A_2} \frac{\partial t_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial s}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} s &= \mu \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} (X_{2+} - X_{2-}), \\ -\varepsilon \frac{4}{3} \left(\mu \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau_{130} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 2 \frac{t_2}{R_2} &= \\ = \mu A_2 (Z_+ - Z_-) + \varepsilon \mu \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (X_{2+} + X_{2-}) \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия:

$$\varepsilon^3 \left(-\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_1 - \mu \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_2 \right) + 2\mu \tau_{13} = \mu (X_{1+} + X_{1-}),$$

$$\varepsilon^3 \left(-\frac{1}{A_2} \frac{\partial m_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} h \right) + 2\mu \tau_{23} = \mu (X_{2+} + X_{2-}); \quad (13)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \quad \mu \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \mu \frac{1}{R_2} w,$$

$$\mu \omega = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2; \quad (14)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением w :

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_2 = -\mu^{-2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \tau = -\mu^{-1} \frac{2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu^{-1} \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (15)$$

По сравнению с уравнениями системы (11) во втором и третьем уравнениях этой системы отброшены малые члены относительно главных.

Для построения итерационного процесса решения системы (5), (6), (12)–(15) по методу Сен-Венана – Пикара – Банаха (SVPB) выберем величины в качестве начального приближения

$$u_{2(0)} = u_{20}(\alpha_1), \quad s_{(0)} = s_0(\alpha_1) \quad (16)$$

и запишем уравнения в виде следующей последовательности относительно шести тангенциальных неизвестных $u_{1(0)}$, $u_{2(0)}$, $s_{(0)}$, $\varepsilon_{1(0)}$, $\varepsilon_{2(0)}$, $t_{1(0)}$:

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_1} + \mu 2(1+\nu) s_0, \quad \frac{\partial t_{2(0)}}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial s_0}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{1(0)} = \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \alpha_1},$$

$$t_{1(0)} = \varepsilon_{1(0)} + \nu t_{2(0)}, \quad \varepsilon_{2(0)} = (1-\nu^2) t_{2(0)} - \nu \varepsilon_{1(0)}, \quad \frac{\partial s_{(1)}}{\partial \theta} = -\mu A_2 \frac{\partial t_{1(0)}}{\partial \alpha_1}. \quad (17)$$

Нижний индекс в скобках означает номер приближения. Индекс 0 без скобок в правых частях первых двух уравнений указывает на величины начального приближения (16).

Поскольку величины (16) считаются заданными, из первого уравнения находим $u_{1(0)}$, а из второго $t_{2(0)}$. Третье уравнение позволяет определить $\varepsilon_{1(0)}$. Четвертое и пятое уравнения алгебраические определяют $\varepsilon_{2(0)}$ и $t_{1(0)}$ путем умножения на коэффициенты меньше единицы. Шестое уравнение дает величину $s_{(1)}$ в первом приближении.

Третье уравнение системы (12) связывает через формулы (15) и уравнения (13) величины $w_{(0)}$ и $t_{2(0)}$. Выразив $w_{(0)}$ через $t_{2(0)}$ и подставив его во второе уравнение системы (14), записанное следующим образом:

$$\frac{\partial u_{2(1)}}{\partial \theta} = A_2 \left(-\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_{1(0)} - \mu \frac{1}{R_2} w_{(0)} + \mu \varepsilon_{2(0)} \right), \quad (18)$$

находим $u_{2(1)}$ в первом приближении. На этом вычисление первой итерации можно считать законченным и, вернувшись к последовательности уравнений (17), продолжить вычисления искомых величин в следующем приближении. По известной величине $w_{(0)}$ можно вычислить последовательно те из неизвестных $\kappa_{1(0)}$, $\kappa_{2(0)}$, $\tau_{(0)}$, $m_{1(0)}$, $m_{2(0)}$, $h_{(0)}$, $\tau_{13(0)}$, $\tau_{23(0)}$, которые нужны для выполнения граничных условий

$$\begin{aligned} \kappa_{1(0)} &= -\frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_{2(0)} = -\mu^{-2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ \tau_{(0)} &= -\mu^{-1} \frac{2}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu^{-1} \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ m_{1(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \mu^{-2} \nu \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ m_{2(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \mu^{-2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ h_{(0)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(-\mu^{-1} \frac{2}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu^{-1} \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} \right), \\ 2\mu \varepsilon^{-3} \tau_{13(0)} &= -\mu^{-1} \nu \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} - \\ &\quad -\mu^{-1} \nu \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} + \\ &\quad + \mu^{-1} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{2}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad + \mu^{-1} \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} + \mu \varepsilon^{-3} (X_{1+} + X_{1-}), \\ 2\tau_{23(0)} &= -\mu^{-3} \varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} + (X_{2+} + X_{2-}). \end{aligned} \quad (19)$$

Третье уравнение равновесия из (12) на основании вытекающих из (19) оценок $\mu\tau_{13(0)} \sim \mu^{-1}\varepsilon^3 w_0$ и $\mu\tau_{23(0)} \sim \mu^{-2}\varepsilon^3 w_0$ после отбрасывания величин порядка μ^0 по сравнению с величиной μ^{-2} принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\mu^{-3}\varepsilon^4 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial\theta} = \\ & = -\varepsilon^2 2 \frac{t_{2(0)}}{R_2} + \mu A_2 (Z_+ - Z_-) - \mu\varepsilon^{-2} \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial\theta} (X_{2+} + X_{2-}) + \\ & + \varepsilon\mu \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} (X_{2+} + X_{2-}) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Выразив из этого уравнения $w_{(0)}$ через $t_{2(0)}$ и поверхностные нагрузки $Z_+, Z_-, X_{1+}, X_{1-}, X_{2+}, X_{2-}$, можно подставить $w_{(0)}$ в уравнение (18) и продолжить вычисления в следующем приближении.

После вычислений всех неизвестных в нулевом и неизвестных $s_{(1)}, t_{2(1)}$, с помощью которых будут выполняться граничные условия, в первом приближении, получим

$$\begin{aligned} u_{1(0)} &= -\mu u_{20}' \int A_2 \theta d\theta + \mu 2(1+\nu) s_0 \int A_2 d\theta + u_{10}(\alpha_1), \\ t_{2(0)} &= -\mu s_0' \theta + t_{20}(\alpha_1), \\ \varepsilon_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \int A_2 \theta d\theta + \mu 2(1+\nu) s_0' \int A_2 d\theta + u_{10}', \\ t_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \int A_2 \theta d\theta + \mu 2(1+\nu) s_0' \left(\int A_2 d\theta - \nu\theta \right) + u_{10}' + \nu t_{20}, \\ \varepsilon_{2(0)} &= (1-\nu^2) t_{20} + \nu \mu u_{20}'' \int A_2 \theta d\theta - \mu s_0' \left[2(1+\nu) \nu \int A_2 d\theta + (1-\nu^2) \theta \right] - \nu u_{10}', \\ s_{(1)} &= \mu^2 u_{20}''' \int A_2 \int A_2 \theta d\theta - \mu^2 2(1+\nu) s_0'' \int A_2 \left(\int A_2 d\theta - \nu\theta \right) d\theta - \\ & - \mu u_{10}'' \int A_2 d\theta - \nu \mu t_{20}' \int A_2 d\theta + s_0, \\ w_{(0)} &= \mu^3 \varepsilon^{-2} 3(1-\nu^2) \int A_2 \int A_2 \int A_2 \int \frac{A_2}{R_2} (\mu s_0' \theta - t_{20}) d\theta d\theta d\theta d\theta + \\ & + C_3(\alpha_1) \int A_2 \int A_2 \int A_2 d\theta d\theta d\theta + C_2(\alpha_1) \int A_2 \int A_2 d\theta d\theta + C_1(\alpha_1) \int A_2 d\theta + C_0(\alpha_1) + w_{(0)}^{(p)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $u_{10}(\alpha_1), t_{20}(\alpha_1), s_0(\alpha_1), t_{20}(\alpha_1)$ – произвольные функции интегрирования, зависящие только от координаты α_1 , штрихом обозначено дифференцирование по α_1 , $w_{(0)}^{(p)}$ – частное решение (20) при $t_{2(0)} = 0$.

С помощью выражений (21) можно выполнить заданные граничные условия. Покажем это на более простом в записи примере.

**Пример построение итерационного процесса
для длинной круговой цилиндрической панели**

Зададим в уравнениях (12)–(16) дополнительно следующие значения для круговой цилиндрической оболочки $A_2 = R_2 = 1$ и примем поверхностную нагрузку отсутствующей: $Z_+ = Z_- = X_{1+} = X_{1-} = X_{2+} = X_{2-} = 0$.

Уравнения состояния приводятся к следующему виду:

– тангенциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial s}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{2}{3} \left(\mu \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) = \varepsilon t_2; \quad (22)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия:

$$-\mu \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2\mu \tau_{13} = 0, \quad -\frac{\partial m_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} + 2\mu \tau_{23} = 0; \quad (23)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \quad \mu \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \mu w, \quad \mu \omega = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}; \quad (24)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением w :

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_2 = -\mu^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \tau = -2\mu^{-1} \frac{\partial w}{\partial \theta \partial \alpha_1}. \quad (25)$$

Для построения итерационного процесса решения системы (22)–(25) по методу SVPB выберем величины в качестве начального приближения

$$u_{2(0)} = u_{20}(\alpha_1), \quad s_{(0)} = s_0(\alpha_1) \quad (26)$$

и запишем уравнения в виде следующей последовательности относительно шести тангенциальных неизвестных $u_{1(0)}$, $u_{2(0)}$, $s_{(0)}$, $\varepsilon_{1(0)}$, $\varepsilon_{2(0)}$, $t_{1(0)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \theta} &= -\mu \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_1} + 2(1+\nu)\mu s_0, & \frac{\partial t_{2(0)}}{\partial \theta} &= -\mu \frac{\partial s_0}{\partial \alpha_1}, & \varepsilon_{1(0)} &= \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \alpha_1}, \\ t_{1(0)} &= \varepsilon_{1(0)} + \nu t_{2(0)}, \quad \varepsilon_{2(0)} &= (1-\nu^2)t_{2(0)} - \nu \varepsilon_{1(0)}, & \frac{\partial s_{(1)}}{\partial \theta} &= -\mu \frac{\partial t_{1(0)}}{\partial \alpha_1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Третье уравнение системы (22) связывает через формулы (25) и уравнения (23) величины $w_{(0)}$ и $t_{2(0)}$. Выразив $w_{(0)}$ через $t_{2(0)}$ и подставив его во второе уравнение системы (24), записанное следующим образом

$$\frac{\partial u_{2(1)}}{\partial \theta} = -\mu w_{(0)} + \mu \varepsilon_{2(0)}, \quad (28)$$

находим $u_{2(1)}$ в первом приближении. На этом вычисление первой итерации для круговой цилиндрической оболочки можно считать законченным и, вернувшись к последовательности уравнений (27), продолжить вычисления искомых величин в следующем приближении. По известной величине $w_{(0)}$ можно вычислить последовательно те из неизвестных $\kappa_{1(0)}$, $\kappa_{2(0)}$, $\tau_{(0)}$, $m_{1(0)}$, $m_{2(0)}$, $h_{(0)}$, $\tau_{13(0)}$, $\tau_{23(0)}$, которые нужны для выполнения граничных условий

$$\begin{aligned} \kappa_{1(0)} &= -\frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_{2(0)} = -\mu^{-2} \frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \theta^2}, \quad \tau_{(0)} = -\mu^{-1} 2 \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} \\ m_{1(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \mu^{-2} \nu \frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \theta^2}, \quad m_{2(0)} = -\mu^{-2} \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \theta^2}, \quad h_{(0)} = -\mu^{-1} \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1}, \\ 2\tau_{13(0)} &= -\mu^{-2} \varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^3 w_{(0)}}{\partial \alpha_1 \partial \theta^2}, \quad 2\tau_{23(0)} = -\mu^{-3} \varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^3 w_{(0)}}{\partial \theta^3}, \\ &\frac{2}{3} \left(\mu \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) = \varepsilon t_{2(0)}. \end{aligned} \quad (29)$$

После вычислений всех неизвестных в нулевом и неизвестных $s_{(1)}$, $t_{2(1)}$, с помощью которых будут выполняться граничные условия, в первом приближении, получим

$$\begin{aligned} u_{1(0)} &= -\mu u_{20}' \theta + 2(1+\nu) \mu s_0 \theta + u_{10}, \\ t_{2(0)} &= -\mu s_0' \theta + t_{20}, \\ \varepsilon_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \theta + 2(1+\nu) \mu s_0' \theta + u_{10}', \\ t_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \theta + (1+2\nu) \mu s_0' \theta + u_{10}' + t_{20}, \\ \varepsilon_{2(0)} &= -(1+\nu)^2 \mu s_0' \theta + (1-\nu^2) t_{20} + \nu \mu u_{20}'' \theta - \nu u_{10}', \\ s_{(1)} &= \mu^2 u_{20}''' \frac{\theta^2}{2} - (1+2\nu) \mu^2 s_0'' \frac{\theta^2}{2} - \mu u_{10}'' \theta - \mu t_{20}' \theta + s_0, \\ t_{2(1)} &= -\mu^3 u_{20}'''' \frac{\theta^3}{6} + (1+2\nu) \mu^3 s_0''' \frac{\theta^3}{6} + \mu^2 u_{10}''' \frac{\theta^2}{2} + \mu^2 t_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \mu s_0' \theta + t_{20}, \\ w_{(0)} &= 3(1-\nu^2) \varepsilon \mu^4 s_0' \frac{\theta^5}{120} - 3(1-\nu^2) \mu^3 \varepsilon t_{20} \frac{\theta^4}{24} + C_3 \frac{\theta^3}{6} + C_2 \frac{\theta^2}{2} + C_1 \theta + C_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{2(1)} &= -3(1-\nu^2)\varepsilon\left(\mu^5 s_0' \frac{\theta^6}{720} - \mu^4 t_{20} \frac{\theta^5}{120}\right) - \mu C_3 \frac{\theta^4}{24} - \mu C_2 \frac{\theta^3}{6} - \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \mu C_0 \theta - \\
 &- (1-\nu^2)\mu^2 s_0' \frac{\theta^2}{2} + (1-\nu^2)\mu t_{20} \theta + \nu \mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - 2\nu(1+\nu)\mu^2 s_0' \frac{\theta^2}{2} - \nu \mu u_{10}' \theta + u_{20}, \\
 u_{2(1)} &= -3(1-\nu^2)\varepsilon \mu^5 s_0' \frac{\theta^6}{720} + 3(1-\nu^2)\mu^4 \varepsilon t_{20} \frac{\theta^5}{120} - \mu C_3 \frac{\theta^4}{24} - \mu C_2 \frac{\theta^3}{6} - \\
 &- \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \mu C_0 \theta - (1+\nu)^2 \mu^2 s_0' \frac{\theta^2}{2} + (1-\nu^2)\mu t_{20} \theta + \nu \mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \nu \mu u_{10}' \theta + u_{20}, \\
 u_{2(1)} &= \left[-3(1-\nu^2)\varepsilon \mu^3 \frac{\theta^6}{720} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^4}{24} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^3}{6} - (1+\nu)^2 \frac{\theta^2}{2} \right] \mu^2 s_0' + \\
 &+ \frac{1-\nu^2}{2} \mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^4}{24} + \frac{1-\nu^2}{2} \mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^3}{6} + \left[3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon \frac{\theta^5}{120} + (1-\nu^2)\theta \right] \mu t_{20} + \\
 &+ \nu \mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \nu \mu u_{10}' \theta - \mu C_0 \theta + u_{20}, \\
 m_{2(0)} &= 3\mu^4 \varepsilon \left(\mu s_0' \frac{\theta^3}{6} - t_{20} \frac{\theta^2}{2} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} (C_3 \theta + C_2), \\
 \tau_{23(0)} &= -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left[3(1-\nu^2)\mu \varepsilon \left(\mu s_0' \frac{\theta^2}{2} - t_{20} \theta \right) + \mu^{-3} C_3 \right]. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Примем, что на длинных сторонах панели $\theta = \pm 1$ заданы следующие напряжения:

$$\begin{aligned}
 t_2 &= T_{2+}(\alpha_1), \quad s = S_+(\alpha_1), \quad m_2 = M_{2+}(\alpha_1), \quad \tau_{13} = N_{1+}(\alpha_1) \quad \text{при } \theta = 1, \\
 t_2 &= T_{2-}(\alpha_1), \quad s = S_-(\alpha_1), \quad m_2 = M_{2-}(\alpha_1), \quad \tau_{13} = N_{1-}(\alpha_1) \quad \text{при } \theta = -1, \tag{31}
 \end{aligned}$$

предполагая их свободными от каких-либо закреплений. Считая выражения неизвестных (30) вычисленными с достаточной точностью, запишем соответствующие граничные обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 -\mu^3 u_{20}'''' \frac{1}{6} + (1+2\nu)\mu^3 s_0'''' \frac{1}{6} + \mu^2 u_{10}'''' \frac{1}{2} + \mu^2 t_{20}'''' \frac{1}{2} - \mu s_0' + t_{20} &= T_{2+} \quad \text{при } \theta = 1, \\
 \mu^4 u_{20}'''' \frac{1}{6} - (1+2\nu)\mu^3 s_0'''' \frac{1}{6} + \mu^2 u_{10}'''' \frac{1}{2} + \mu^2 t_{20}'''' \frac{1}{2} + \mu s_0' + t_{20} &= T_{2-} \quad \text{при } \theta = -1, \tag{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^3 u_{20}''' \frac{1}{2} - (1+2\nu)\mu^2 s_0'' \frac{1}{2} - \mu u_{10}'' - \mu t_{20}' + s_0 &= S_+ \text{ при } \theta = 1, \\ \mu^3 u_{20}''' \frac{1}{2} - (1+2\nu)\mu^2 s_0'' \frac{1}{2} + \mu u_{10}'' + \mu t_{20}' + s_0 &= S_- \text{ при } \theta = -1, \\ 3(1-\nu^2)\varepsilon^{-2}\mu^4 s_0' \frac{1}{6} - 3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon^{-2} t_{20} \frac{1}{2} + C_3 + C_2 &= -\mu^2(1-\nu^2)M_{2+} \text{ при } \theta = 1, \\ -3(1-\nu^2)\varepsilon^{-2}\mu^4 s_0' \frac{1}{6} - 3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon^{-2} t_{20} \frac{1}{2} - C_3 + C_2 &= -\mu^2(1-\nu^2)M_{2-} \text{ при } \theta = -1, \\ -\frac{3}{2}\mu \varepsilon s_0' \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon t_{20} - \frac{1}{2(1-\nu^2)}\mu^{-3}\varepsilon^3 C_3 &= N_{1+} \text{ при } \theta = 1, \\ -\frac{3}{2}\mu \varepsilon s_0' \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon t_{20} - \frac{1}{2(1-\nu^2)}\mu^{-3}\varepsilon^3 C_3 &= N_{1-} \text{ при } \theta = -1. \end{aligned} \quad (33)$$

Складывая и вычитая попарно условия (32), получим системы:

– для определения неизвестных u_{10} и t_{20} :

$$\begin{aligned} \mu^2 u_{10}''' + \mu^2 t_{20}'' + 2t_{20} &= T_{2+} + T_{2-}, \\ -\mu u_{10}'' - \mu t_{20}' &= \frac{1}{2}(S_+ - S_-); \end{aligned} \quad (34)$$

– для определения неизвестных u_{20} и s_0 :

$$\begin{aligned} -\mu^4 u_{20}'''' + (1+2\nu)\mu^3 s_0''' - 6\mu s_0' &= 3(T_{2+} - T_{2-}), \\ \mu^2 u_{20}''' - (1+2\nu)\mu^2 s_0'' + 2s_0 &= S_+ + S_-; \end{aligned} \quad (35)$$

и два уравнения для определения неизвестных C_3 и C_2 :

$$\begin{aligned} 2C_3 &= -(1-\nu^2)\mu^2 \varepsilon^{-2} s_0' - (1-\nu^2)(M_{2+} - M_{2-}), \\ \frac{2}{1-\nu^2} C_2 &= 3\mu^3 \varepsilon^{-2} t_{20} - \mu^2 (M_{2+} + M_{2-}), \end{aligned} \quad (36)$$

по вычисленным ранее из (32) s_0 и t_{20} .

Последние два условия (33) для нетангенциальных касательных напряжений в рамках классической теории (1)–(6) без привлечения поправок типа Тимошенко – Рейсснера и возвращения к полным

уравнениям теории упругости [5] выполнить невозможно, так как для этого надо вводить в рассмотрение τ – процесс [3; 5], который здесь из соображений простоты опущен.

Уравнения (32) и (33) разрешимы относительно величин t_{20} , u_{10}'' , $s_0^{s'}$, s_0^q и u_{20}^s [5]. Предполагая нагрузки заданными медленно меняющимися функциями, запишем их:

$$\begin{aligned} t_{20} &= \frac{1}{2}(T_{2+} + T_{2-}) + \frac{1}{4}\mu(S_+ - S_-)', \\ -\mu u_{10}'' &= \frac{1}{2}(S_+ - S_-) + \left(\frac{1}{2}\mu(T_{2+} + T_{2-})' + \frac{1}{4}\mu^2(S_+ - S_-)'' \right), \\ -4\mu s_0^{s'} &= 3(T_{2+} - T_{2-}) + \mu(S_+ + S_-)', \\ u_{20}^{s''''} &= 0, \\ -(1+2\nu)\mu^2 s_0^{q''} + 2s_0^q &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Их решения достаточно подробно разобраны в [5]. Индексами s и q отмечены быстро и медленно меняющиеся величины соответственно.

Для уравнений (36) надо сформулировать граничные условия на коротких сторонах панели при $\alpha_1 = \pm 1$. Примем на них жесткое защемление $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $w = 0$. На основании выражений (30) в развернутом виде эти условия при $\alpha_1 = \pm 1$ примут вид

$$\begin{aligned} &\mu \left[-u_{20}' + 2(1+\nu)s_0 \right] \theta + u_{10} = 0, \\ u_{2(1)} &= \left[-3(1-\nu^2)\varepsilon\mu^3 \frac{\theta^6}{720} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^4}{24} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^3}{6} - (1+\nu)^2 \frac{\theta^2}{2} \right] \mu^2 s_0' + \\ &+ \frac{1-\nu^2}{2}\mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^4}{24} + \frac{1-\nu^2}{2}\mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^3}{6} + \left[3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon \frac{\theta^5}{120} + (1-\nu^2)\theta \right] \mu t_{20} + \\ &+ \nu\mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \nu\mu u_{10}' \theta - \mu C_0 \theta + u_{20}, \\ w_{(0)} &= (1-\nu^2)\mu^2 \varepsilon^{-1} s_0' \left[3\mu^2 \frac{\theta^2}{20} - \frac{1}{2} \right] \frac{\theta^3}{6} + \frac{3}{4}(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon^{-1} t_{20} \left[-\frac{\theta^2}{6} + 1 \right] \theta^2 - \\ &- \frac{1-\nu^2}{2}\mu^2 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^3}{6} - \frac{1-\nu^2}{2}\mu^2 (M_{2+} + M_{2-}) \frac{\theta^2}{2} + C_1 \theta + C_0. \end{aligned} \tag{38}$$

Вторая и третья формулы для $u_{2(1)}$ и $w_{(0)}$ преобразованы с учетом выражений (36).

Коэффициенты в выражениях (38) должны обращаться в ноль при каждом полиноме от θ . Оставив только в этих формулах главные члены, запишем граничные условия

$$u_{10} = 0, u_{20} = 0, C_0 = C_1 = 0.$$

Условия соответствуют классическим условиям жесткого защемления. Последние два условия исключают перемещение оболочки как жесткого целого.

На этом пример построения итерационного процесса для длинной круговой цилиндрической панели считаем законченным. Сама процедура вычислений повторяет процедуру, описанную в [3; 4].

Заключение

Изложенная здесь процедура построения итерационного процесса подходит как для открытых, так и для замкнутых оболочек. В первом случае малый параметр образуется за счет малой ширины оболочки по сравнению с ее длиной. Теория тонкостенных стержней является частным случаем такого подхода. В случае с замкнутой оболочки малый параметр появляется в результате допущения большой изменчивости в поперечном направлении.

Наличие малого параметра позволяет построить итерационный процесс интегрирования уравнений теории оболочек путем замены дифференциальных уравнений первого порядка интегральными уравнениями, решение которых может быть всегда получено асимптотически сходящимся методом последовательных приближений.

Решение уравнений получается без каких-либо исходных гипотез и допущений и в силу выполнения всех граничных условий и теоремы о неподвижной точке не зависит от выбора величин начального приближения.

Список литературы

1. Товстик П.Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Вып. 3. С. 72–85. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-3-72-85>
2. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Свободные колебания анизотропной балки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2014. № 4. С. 599–608.
3. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 2003. 402 с.
4. Iesan D., Ciarletta M. Non-classical elastic solids. Longman scientific and technical. Harlow: Wiley, 1993. 360 p. <https://doi.org/10.1201/9781003062264>
5. Annin B.D., Volchkov Y.M. Nonclassical models of the theory of plates and shells // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57. No. 5. Pp. 769–776.
6. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Серия: Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. 272 с.
7. Аннин Б.Д., Карпов Е.В. Элементы механики композитов. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2016.
8. Annin B.D., Baev L.V., Volchkov Y.M. Equation of a layered packet with transverse shears and compression taken into account // Mechanics of Solids. 2014. Т. 49. № 1. С. 59–66. <https://doi.org/10.3103/S0025654414010075>
9. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван. 2-е изд. Ереван: Изд-во НАН РА «Гитутюн», 2013. 233 с.
10. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1982. 446 с.
11. Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 2017. Vol. 50. No. С. 68–73. <https://doi.org/10.3103/S1063454117010058>
12. Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 5. С. 89–96.
13. Zhavoronok S.I. On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua Type // Procedia Engineering. 2015. Vol. 111. Pp. 888–895. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.164>
14. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 29. No 6. Pp. 773–795. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241>

15. Zozulya V.V. A higher order theory for shells, plates and rods // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. Vol. 103. Pp. 40–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.08.025>
16. Виноградова Ю.В. Нелинейные динамические модели микрополярных сред: электронное методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. 40 с.
17. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // *Arch. Appl. Mech.* 2010. Vol. 80. Pp. 73–92. <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3>
18. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions // *Journal of Elasticity*. 2004. Vol. 74. Pp. 67–86. <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000026106.09385.8c>
19. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. Vol. 89. Issue 4. Pp. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
20. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Saint-Venant's principle for an elastic body with dipolar structure // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32. Pp. 269–278. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00827-6>
21. Marin M., Öchsner A., Othman M.I.A. On the evolution of solutions of mixed problems in thermoelasticity of porous bodies with dipolar structure // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2022. Vol. 34. Pp. 491–506. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01066-4>
22. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Gurtin's variational principle in thermoelasticity without energy dissipation of dipolar bodies // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32. Pp. 1685–1694. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00873-5>
23. Зверьяев Е.М. Непротиворечивая теория оболочек // *ПММ*. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 580–596.
24. Зверьяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // *ПММ*. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833.
25. Kevorkian J., Cole J.D. *Perturbation methods in applied mathematics*. New York: Springer, 1981. 560 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4213-8>
26. Найдф А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
27. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
28. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
29. Lindelöf E.L. Sur l'application des méthodes d'approximation successives a l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires // *Journal des mathématiques pures et appliquées 4^e série*. 1894. Vol. 10. Pp. 117–128.
30. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives // *Journal des mathématiques pures et appliquées 4^e série*. 1890. Vol. 6. Pp. 145–210.

References

1. Tovstik P.E. On the non-classic models of beams, plates and shells. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2008;8(3):72–85. (In Russ.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-3-72-85>
2. Tovstik P.E., Tovstik T.P. Free vibrations of anisotropic beam. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2014;(4):599–608. (In Russ.)
3. Butenko Yu.I. *Variational-asymptotic methods for constructing non-classical models for calculating single-layer and multilayer rods and plates* (Doctor of Physical Sciences dissertation). Kazan; 2003. (In Russ.)
4. Iesan D., Ciarletta M. *Non-classical elastic solids. Longman scientific and technical*. Harlow: Wiley; 1993. <https://doi.org/10.1201/9781003062264>
5. Annin B.D., Volchkov Y.M. Nonclassical models of the theory of plates and shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016;57(5):769–776.
6. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Non-classical theories of vibrations of rods, plates and shells. *Results of Science and Technology. Series: Mechanics of Solid Deformable Bodies* (vol. 5). Moscow: VINITI Publ.; 1973. (In Russ.)
7. Annin B. D., Karpov E.V. *Elements of mechanics of composites*. Novosibirsk: Novosibirsk State University; 2016.
8. Annin B.D., Baev L.V., Volchkov Y.M. Equation of a layered packet with transverse shears and compression taken into account. *Mechanics of Solids*. 2014;49(10):59–66. <https://doi.org/10.3103/S0025654414010075>
9. Ambartsumyan S.A. *Micropolar theory of shells and plates*. 2nd ed. Yerevan: Publishing House of NAS RA “Gitutyun”; 2013. (In Russ.)
10. Ambartsumyan S.A. *General theory of anisotropic shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1982. (In Russ.)
11. Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*. 2017;50(1): 68–73. <https://doi.org/10.3103/S1063454117010058>
12. Kovalev V.A., Kossovich L.Yu., Taranov O.V. The far field of the Rayleigh wave for an elastic half-strip under the action of an end load. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2005;(5):89–96.
13. Zhavoronok S.I. On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua type. *Procedia Engineering*. 2015;111:888–895. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.164>

14. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020;29(6):773–795. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241>
15. Zozulya V.V. A higher order theory for shells, plates and rods. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015;103:40–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.08.025>
16. Vinogradova Yu.V. *Nonlinear dynamic models of micropolar media*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University; 2011.
17. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Arch. Appl. Mech.* 2010;80:73–92. <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3>
18. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions. *Journal of Elasticity*. 2004;74:67–86. <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000026106.09385.8c>
19. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009;89(4):242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
20. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Saint-Venant's principle for an elastic body with dipolar structure. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020;32:269–278. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00827-6>
21. Marin M., Öchsner A., Othman M.I.A. On the evolution of solutions of mixed problems in thermoelasticity of porous bodies with dipolar structure. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2022;34:491–506. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01066-4>
22. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Gurtin's variational principle in thermoelasticity without energy dissipation of dipolar bodies. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020;32:1685–1694. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00873-5>
23. Zveryaev E.M. The consistent theory of shells. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 2016;80(5):580–596. (In Russ.)
24. Zveryaev E.M. Saint-Venant – Picard – Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 2019;83(5–6):823–833. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0032823519050126>
25. Kevorkian J., Cole J.D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. New York: Springer; 1981. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4213-8>
26. Naife A. *Introduction to perturbation methods*. Moscow: Mir Publ.; 1984. (In Russ.)
27. Goldenweiser A.L. *Theory of elastic thin shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
28. Kamke E. *Handbook of ordinary differential equations*. Moscow: Nauka Publ.; 1971. (In Russ.)
29. Lindelöf E.L. Sur l'application des méthodes d'approximation successives a l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. *Journal des mathématiques pures et appliquées* 4^e série. 1894;10:117–128.
30. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. *Journal des mathématiques pures et appliquées* 4^e série. 1890;6:145–210.