

ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК SHELL FORMING

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575
УДК 514.7

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Геометрия нормальных линейчатых поверхностей

В.Н. Иванов 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ i.v.ivn@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 12 августа 2021 г.
Доработана: 24 октября 2021 г.
Принята к публикации: 30 октября 2021 г.

Для цитирования

Иванов В.Н. Геометрия нормальных линейчатых поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 562–575. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575>

Аннотация. Рассматривается формирование широкого круга поверхностей на основе нормальных линейчатых поверхностей, образуемых движением прямой линии в нормальной плоскости базовой направляющей кривой. Образующая прямая может вращаться по заданному закону в нормальной плоскости базовой кривой. Приводится векторное уравнение поверхностей, с произвольной пространственной и плоской направляющей кривой. Получены формулы геометрических характеристик поверхности. На основе полученных формул показано, что координатная система нормальной линейчатой поверхности является ортогональной, но в общем случае не сопряженной. Прямые линии не являются линиями главных кривизн поверхности и нормальные линейчатые поверхности в общем случае не являются торсовыми, развертывающимися поверхностями. Получено условие вращения образующей прямой в нормальной плоскости базовой кривой, при выполнении которого координатная сеть будет сопряженной – нормальная линейчатая поверхность развертывающейся. Для пространственной базовой кривой это условие связано с кривизной базовой кривой, для плоской кривой образующая прямая движется в нормальной плоскости направляющей плоской кривой с постоянным наклоном к плоскости базовой плоской кривой – поверхность одинакового ската. На основе векторного уравнения построены рисунки нормальных линейчатых поверхностей с использованием программного комплекса MathCAD.

Ключевые слова: геометрия кривых, геометрия поверхностей, нормальные поверхности, линейчатые поверхности, геометрические характеристики поверхности

Geometry of the normal ruled surfaces

Vyacheslav N. Ivanov 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

✉ i.v.ivn@mail.ru

Article history


Received: August 12, 2021
Revised: October 28, 2021
Accepted: October 30, 2021

Abstract. The wide circle of the surfaces formed by the motion of the right line in the normal plane of some base directrix curve is regarded. The generate right line may rotate at some low at the normal plane of the base curve. The vector equation of the surface with any plane or space base curve is received. There are

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, Scopus Author ID: 57193384761; i.v.ivn@mail.ru

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, Scopus Author ID: 57193384761; i.v.ivn@mail.ru

© Иванов В.Н., 2021

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation

Ivanov V.N. Geometry of the normal ruled surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6): 562–575. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575>

given the formulas of the geometry characteristics of the surfaces, on the base of them there is shown that the coordinate system of the normal ruled surfaces is orthogonal but there is not conjugated in common, that is that the normal ruled surfaces there are not developable surfaces in common way. The condition of the rotation of directrix plane line when the coordinate system of the normal ruled surfaces will be conjugated and the normal ruled surface will be developable is received. The condition that the normal ruled surface with space base curve will be the developable surface there is connected with its curvature of base curve. The developable normal ruled surface with plane base curve is formed by motion of right line at the normal plane of the base curve with the constant angle to the plane of the base curve; the received surface is a surface of constant slope. On the base of the vector equation of the surfaces there are made the figures of the normal ruled surfaces with the help of program complex MathCAD.

Keywords: geometry of the curves, geometry of the surfaces, normal surfaces, line surfaces, geometrical characteristics, surface

Введение

Тонкостенные конструкции в форме линейчатых поверхностей широко используются в строительстве, машиностроении, авиа и ракетостроении. Это объясняется наиболее простым способом реализации тонкостенных конструкций, образуемых прямыми линиями. Для тонкостенных железобетонных тонкостенных конструкций непосредственно на строительной площадке удобно реализовать опалубки из прямолинейных отсеков или изготовить опалубочные формы для сборных железобетонных отсеков. Тонкостенные металлические линейчатые формы (развертывающиеся поверхности) изготавливаются методом изгибания металлических листов.

Геометрии линейчатых поверхностей посвящено множество монографий и научных статей. Практически раздел по геометрии линейчатых поверхностей имеется как в классических монографиях [1–7], так и в современных монографиях и учебниках по дифференциальной геометрии и большинстве учебников и монографий по теории и методам расчета тонкостенных пространственных конструкций [8–16]. В [17] приведена наиболее полная классификация линейчатых поверхностей, показано разнообразие их подклассов. Нормальные линейчатые поверхности являются подклассом линейчатых поверхностей. К нему относятся цилиндрические поверхности, круговые конусы, поверхности одинакового ската, нормальные геликоиды. Формообразование торсовых поверхностей, за исключением поверхностей с плоскими направляющими кривыми, основано на построении поверхностей системой касательных к заданной пространственной направляющей кривой – ребру возврата. При этом координатная система торсовой поверхности неортогональна [9–11; 13], а проведение расчета оболочек аналитическими методами в большинстве случаев невозможно. Однако возможно использование численных методов расчета, в частности метода конечных элементов [18; 19]. Как показано далее, координатная система нормальных линейчатых поверхностей ортогональна, хотя и не сопряжена при произвольном вращении образующей прямой. Это позволяет использовать для ряда задач аналитические методы и более точный по сравнению с методом конечного элемента вариационно-разностный метод расчета оболочек [13; 20; 21].

Векторное уравнение и геометрические характеристики нормальных линейчатых поверхностей

Нормальные поверхности образуются движением плоской кривой в нормальной плоскости направляющей кривой [16; 22]. В процессе движения образующая кривая может трансформироваться и вращаться в нормальной плоскости направляющей кривой. Подклассом нормальных поверхностей являются нормальные линейчатые поверхности с образующей прямой линией в нормальной плоскости направляющей кривой (рис. 1).

Векторное уравнение нормально линейчатой поверхности получаем в виде

$$\rho(u, v) = r(u) + v e(u), \quad (1)$$

где $r(u) = x(u)i + y(u)j + z(u)k$ – радиус-вектор базовой направляющей кривой; i, j, k – орты декартовой системы координат; $e(u) = \tau \cos \theta(u) + \beta \sin \theta(u)$ – единичный вектор направления образующей прямой; τ, ν, β – векторы касательной, нормали и бинормали базовой кривой; $\theta(u)$ – функция вращения образующей кривой в нормальной плоскости базовой кривой; $\rho(u, v)$ – радиус-вектор нормальной линейчатой поверхности.

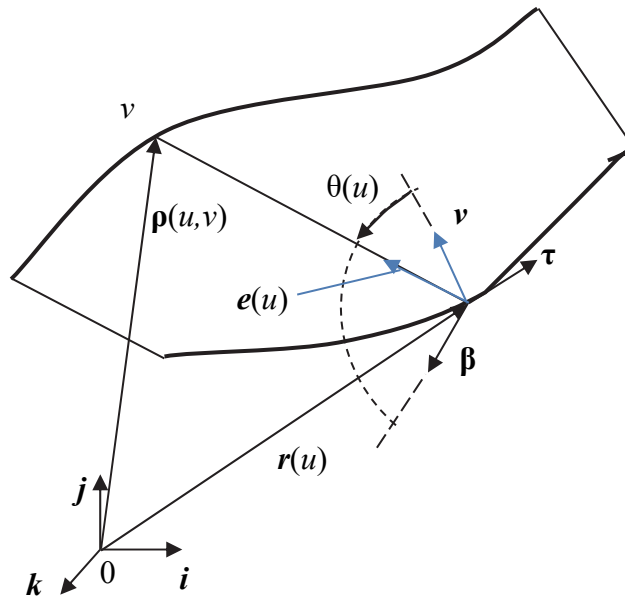


Рис. 1. Нормальная линейчатая поверхность

Дифференцирую вектор $e(u)$, получаем

$$e'(u) = -k_s \cos \theta(u) \tau + [-v \sin \theta(u) + \beta \cos \theta(u)](\chi_s + \theta') = -k_s \cos \theta \tau + (\chi_s + \theta') g(u), \quad (2)$$

$k_s = s'k$, $\chi_s = s'\chi$, $s' = |r'|$, k , χ – кривизна и кручение базовой кривой; $g(u) = -v \sin \theta(u) + \beta \cos \theta(u)$ – единичный вектор в нормальной плоскости направляющей кривой, ортогональный вектору $e(u)$,

$$g'(u) = -v \sin \theta(u) + \beta \cos \theta(u) = k_s \sin \theta(u) \tau - (\chi_s + \theta') e(u). \quad (3)$$

Дифференцируя уравнение нормальной линейчатой поверхности (1), получаем

$$\rho_u = (s' - vk_s \cos \theta) \tau + v(\chi_s + \theta') g; \quad \rho_v = e(u); \quad \rho_{vv} = 0;$$

$$\rho_{uu} = \left[(s' - vk_s \cos \theta)' + vk_s (\chi_s + \theta') \sin \theta \right] \tau + k_s (s' - vk_s \cos \theta) v - v(\chi_s + \theta')^2 e + v(\chi_s' + \theta'') g;$$

$$\rho_{uv} = -k_s \cos \theta \tau + (\chi_s + \theta') g;$$

$$m = \frac{(\rho_u \times \rho_v)}{|\rho_u \times \rho_v|} = \frac{1}{A} [-v(\chi_s + \theta') \tau + (s' - vk_s \cos \theta) g]. \quad (4)$$

Коэффициенты квадратичных форм поверхности

$$E = A^2 = (s' - vk_s \cos \theta)^2 + v^2 (\chi_s + \theta')^2; \quad G = 1; \quad F = 0.$$

$$L = (\rho_{uu} m) = \frac{v(\chi_s + \theta')}{A} \left\{ - \left[(s' - vk_s \cos \theta)' + vk_s (\chi_s + \theta') \sin \theta \right] + (s' - vk_s \cos \theta) \right\} + \frac{k_s \sin \theta}{A} (s' - vk_s \cos \theta)^2;$$

$$M = (\rho_{uv} m) = \left[vk_s \cos \theta + (s' - vk_s \cos \theta) \right] \frac{\chi_s + \theta'}{A} = s \frac{\chi_s + \theta'}{A}; \quad N = (\rho_{vv} m) = 0. \quad (5)$$

Из формул коэффициентов квадратичных форм следует, что координатная система нормальных линейчатых поверхностей при произвольном вращении образующей прямой в нормальной плоскости базовой кривой ортогональна, но в общем случае несопряженная – образующие прямые не являются линиями главных кривизн, поверхность не является развертывающейся.

Нормальные торсовые поверхности

Приравнивая к нулю коэффициент M , получаем ортогональную сопряженную координатную систему нормальной линейчатой поверхности – развертывающуюся нормальную линейчатую поверхность

$$M = 0 \rightarrow \theta(u) = -\int \chi_s du + \theta_0. \quad (6)$$

Таким образом, для образования нормальной торсовой поверхности образующая прямая при движении вдоль базовой кривой вращается в нормальной плоскости базовой кривой. Функция вращения связана с кривизной кручения базовой кривой.

Рассмотрим примеры торсовых поверхностей.

Для винтовой базовой кривой [16]

$$\mathbf{r}(u) = a\mathbf{h}(u) + bu\mathbf{k}, \quad (7)$$

$\mathbf{h}(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u$ – вектор-функция окружности единичного радиуса,

$$\chi = \frac{b}{s'^2}, \quad s' = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \chi_s = s'\chi = \frac{b}{s'}, \quad \theta(u) = -\chi_s u + \theta_0. \quad (8)$$

Для базовой кривой – конической спирали [16]

$$\mathbf{r}(u) = e^{pu} [a\mathbf{h}(u) + b\mathbf{k}], \quad (9)$$

$$\chi = \frac{bp}{s'^2} e^{-pu}, \quad s' = s'_0 e^{pu}, \quad s'_0 = \sqrt{a^2(1+p^2) + b^2 p^2}, \quad \chi_s = s'\chi = -\frac{bp}{s'_0}, \quad \theta(u) = -\chi_s u + \theta_0. \quad (10)$$

Согласно полученным формулам для базовых кривых – винтовой и цилиндрической спирали, при образовании развертывающихся нормальных линейчатых поверхностей угол вращения образующей прямой изменяется пропорционально координатному параметру вращения u . Начальный угол $\theta = \theta_0$, в формулах (8; 10) привязан к начальной координате $u = 0$. Если рассматривается отсек с начальным параметром $u_0 > 0$, то удобнее пользоваться формулой

$$\theta(u) = -\chi_s(u - u_0) + \theta_0. \quad (11)$$

Поворот образующей прямой на угол θ_0 будет в начале отсека.

Рисунки нормальных развертывающихся линейчатых поверхностей с базовой винтовой линией и базовой цилиндрической спиралью представлены на рис. 2.

Параметры базовых кривых:

а) винтовая линия: $a = 2,5$; $b = 1$; $u = 0 \div 6\pi$; $v = 0 \div 2$;

б) цилиндрическая спираль: $a = 2$; $b = 3$; $p = 0,15$; $u = \pi \div 2,5\pi$; $v = 0 \div 6$; $\theta_0 = -\pi/2$.

Для плоской базовой кривой $\chi = 0$, $\theta = \theta_0$ – образующая прямая движется в нормальной плоскости базовой кривой с постоянным наклоном к плоскости базовой кривой – поверхность одинакового ската. При $\theta_0 = 90^\circ$ образуется цилиндрическая поверхность.

При $\theta_0 = 0$ образующая линия движется в плоскости плоской базовой кривой – поверхность вырождается в плоскость. При этом в плоскости формируется трапециевидно-криволинейная ортогональ-

ная система координат – система координатных кривых, параллельных плоской базовой кривой, и система ортогональных базовой кривой прямолинейных координатных линий. В [22; 23] рассмотрены методы формирования поверхностей на трапециевидно-криволинейных планах.

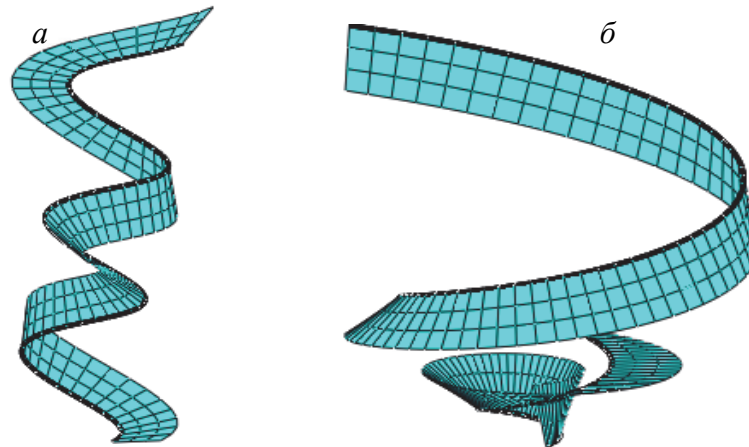


Рис. 2. Развертывающиеся нормальные линейчатые поверхности, базовые кривые: *a* – винтовая линия; *б* – цилиндрическая спираль

На рис. 3 представлены поверхности одинакового ската с различными базовыми кривыми и углами наклона образующих прямых. В верхнем ряду представлены трапециевидно-криволинейные планы ($\theta_0 = 0$) на соответствующих базовых кривых.

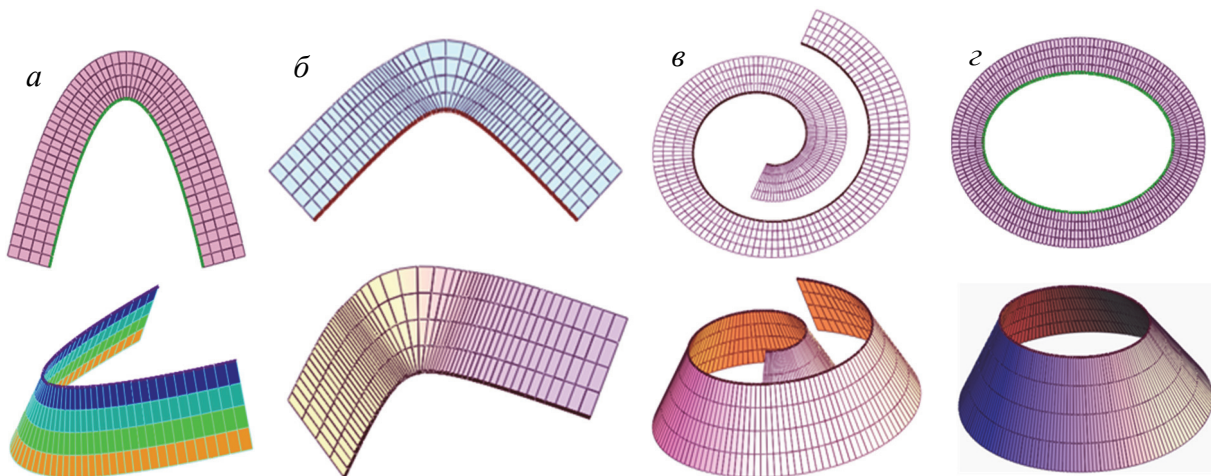


Рис. 3. Криволинейно-трапециевидные планы поверхности одинакового ската с базовыми кривыми: *a* – парабола; *б* – гипербола; *в* – эвольвента круга; *г* – эллипс

Если направляющей линией является прямая, то образуется поверхность в форме прямого катеноида [24; 25].

Винтообразные кривые нормальные линейчатые поверхности и кривые

Рассмотрим нормальные линейчатые поверхности, формируемые образующей прямой, вращающейся в нормальной плоскости базовой кривой пропорционально координатному параметру u :

$$\theta(u) = 2k\pi \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} + \theta_0, \quad u = u_0 \div u_1, \quad (12)$$

k – число вращений образующей прямой при движении вдоль отска базовой кривой (может быть не целым числом).

Если параметр образующей задать постоянной величиной $v = v_0$, то формируется координатная винтообразная кривая.

Если базовой кривой будет прямая линия, то получаем стандартную винтовую поверхность.

На рис. 4 представлены нормальные винтообразные нормальные линейчатые поверхности с базовой параболой $x = u$, $y = au^2$, $a = 0,25$, $u = -8 \div 8$, с различным числом вращений образующей прямой $v = 0 \div 3$, $\theta_0 = 0$.

На рис. 5 представлены нормальные винтообразные линейчатые поверхности с базовым эллипсом $x = a \cos u$, $y = b \sin u$, $a = 5$, $b = 3$, $u = 0 \div 2\pi$, с различным числом вращений образующей прямой $v = 0 \div 1,5$; $\theta_0 = \pi$.

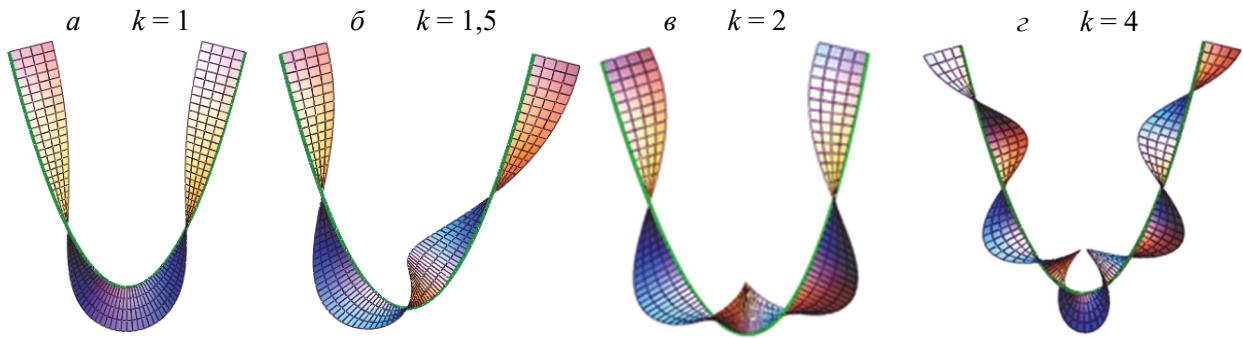


Рис. 4. Винтообразные нормальные линейчатые поверхности с базовой параболой

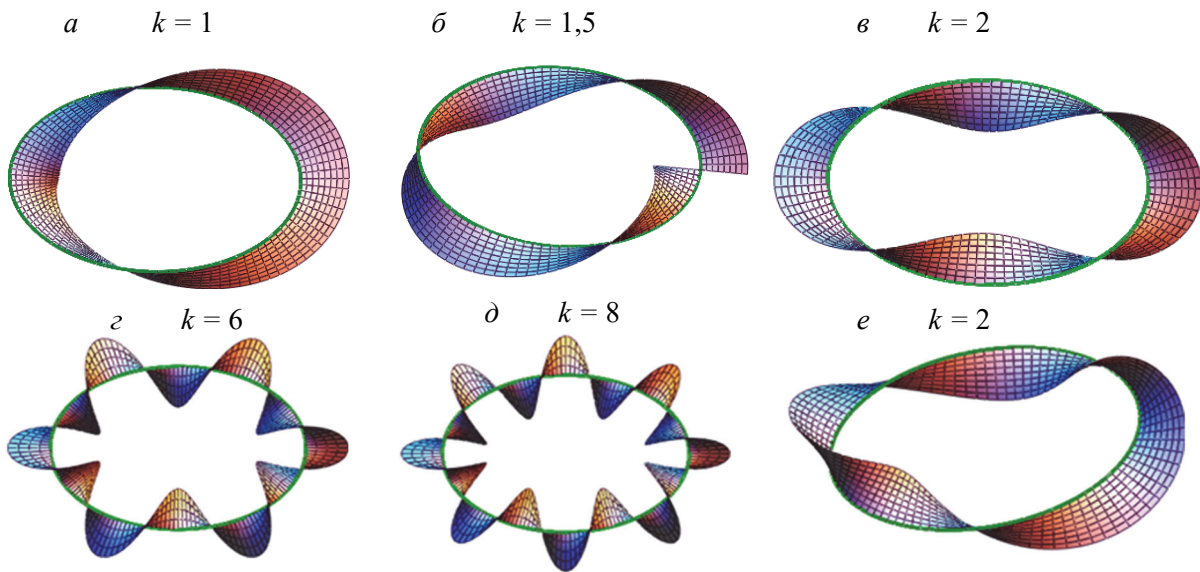


Рис. 5. Винтообразные нормальные линейчатые поверхности с базовым эллипсом:
 $a-d - \theta_0 = \pi$; $e - \theta_0 = 2/3\pi$

На рис. 6 представлены нормальные винтообразные линейчатые поверхности с базовой синусоидой $y = a \sin \pi u / b$, $a = 2$, $b = 4$, $u = 0 \div mb$, с различным числом вращений образующей прямой $v = 0 \div 1$; $\theta_0 = 0$; m – число полувольт синусоиды. Рис. 6, $z - v = 0,5 \div 1,5$. Рис. 6, $u - v = 1$ – винтообразная кривая.

На рис. 7 – винтообразные поверхности с базовой эвольвентой круга: $x = a(\cos u + u \sin u)$; $y = a(\sin u - u \cos u)$; $a = 0,5$; $u = 0,5\pi \div 3,5\pi$; $v = 0 \div 1$; $\theta_0 = \pi$.

На рис. 8 – винтообразные поверхности с базовой пространственной винтовой кривой: $x = a \cos u$; $y = a \sin u$; $z = bu$; $a = 2,5$; $b = 1$; $u = 0 \div 2\pi$; $\theta_0 = \pi$; $a - e - v = 0 \div 2$; $ж - v = 0,5 \div 2$; $ж - v = 2$ – винтообразная кривая; $a - k = 0$ – прямой геликоид.

На рис. 9 – винтообразные поверхности с базовой цилиндрической спиралью: $x = ae^{pu} \cos u$; $y = ae^{pu} \sin u$; $z = be^{pu}$; $a = 2$; $b = 3$; $p = 0,15$; $u = 2\pi \div 4\pi$; $\theta_0 = \pi/2$; $a - e - v = 0 \div 6$.

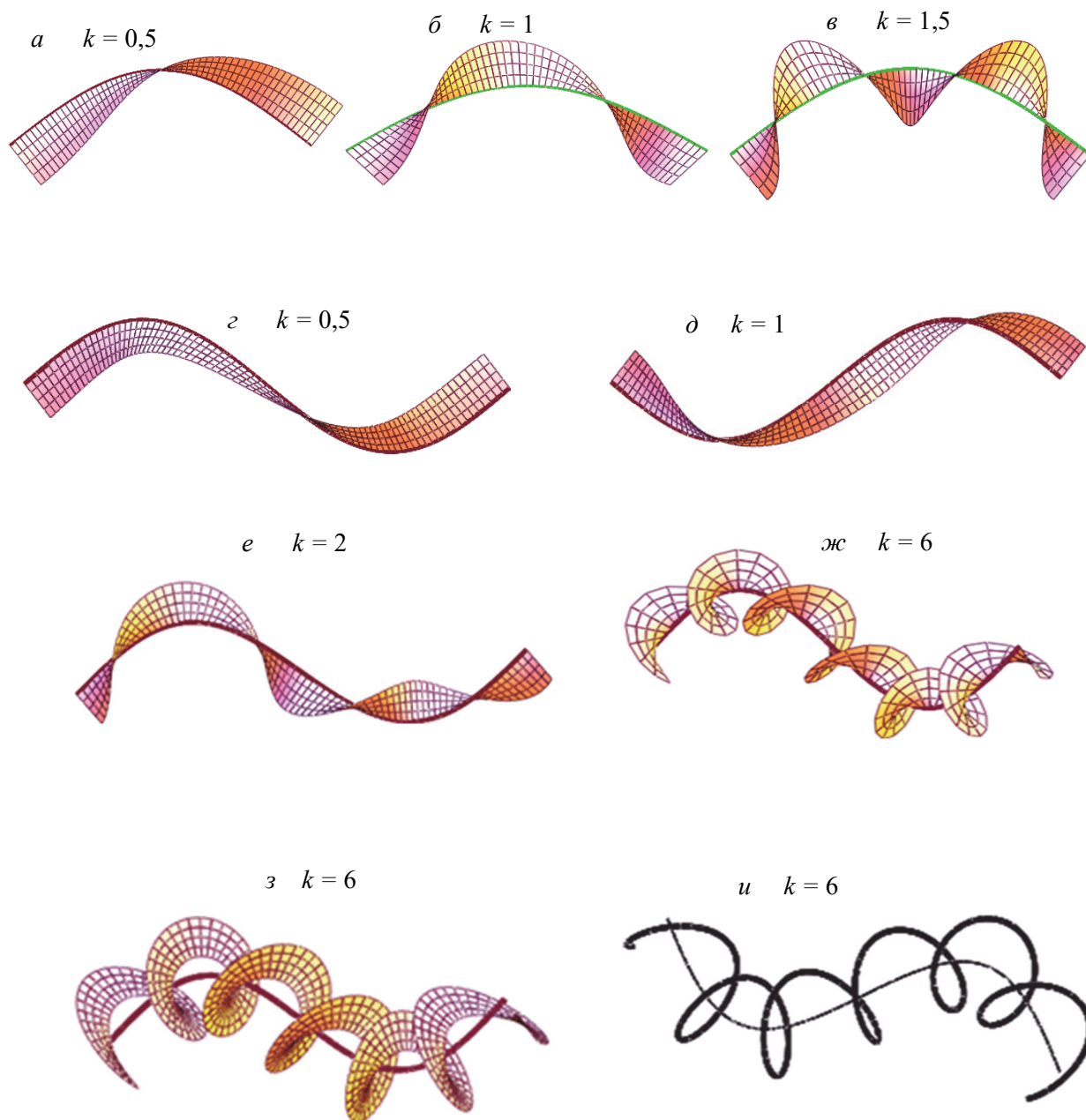


Рис. 6. Винтообразные нормальные линейчатые поверхности с базовым синусом:
 $a-в$ – на одну полуволну; $г-у$ – на две полуволны

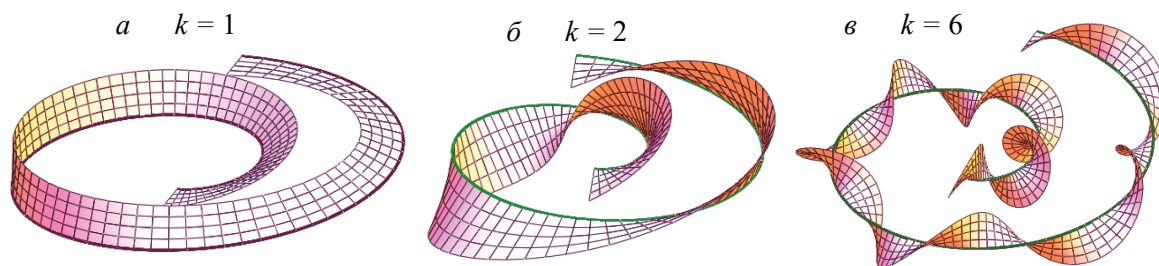


Рис. 7. Винтообразные нормальные линейчатые поверхности с базовой эвольвентой круга:
 $a, б$ – на одной полуволне; $в$ – на двух полуволнах

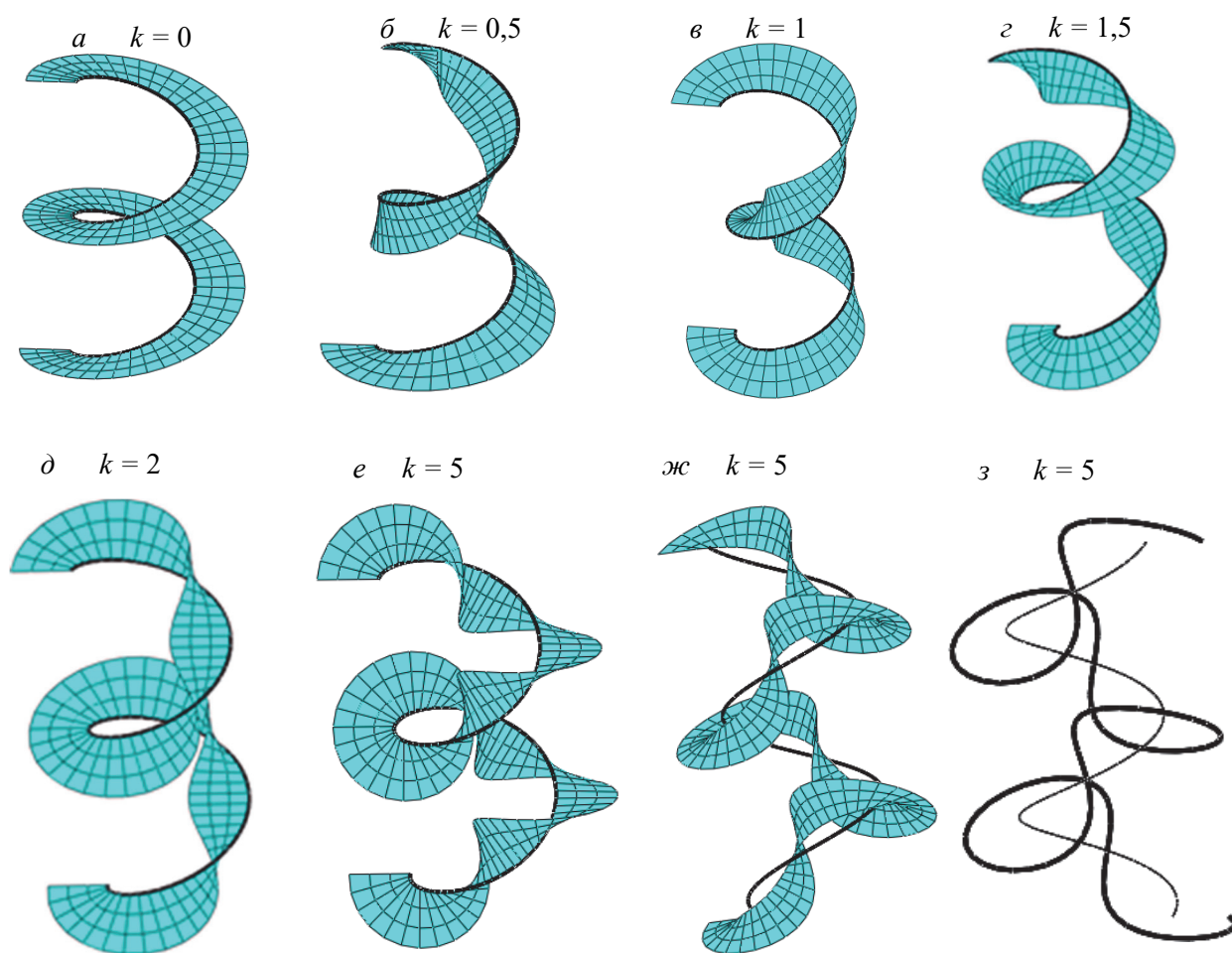


Рис. 8. Винтообразные нормальные линейчатые поверхности с базовой винтовой линией

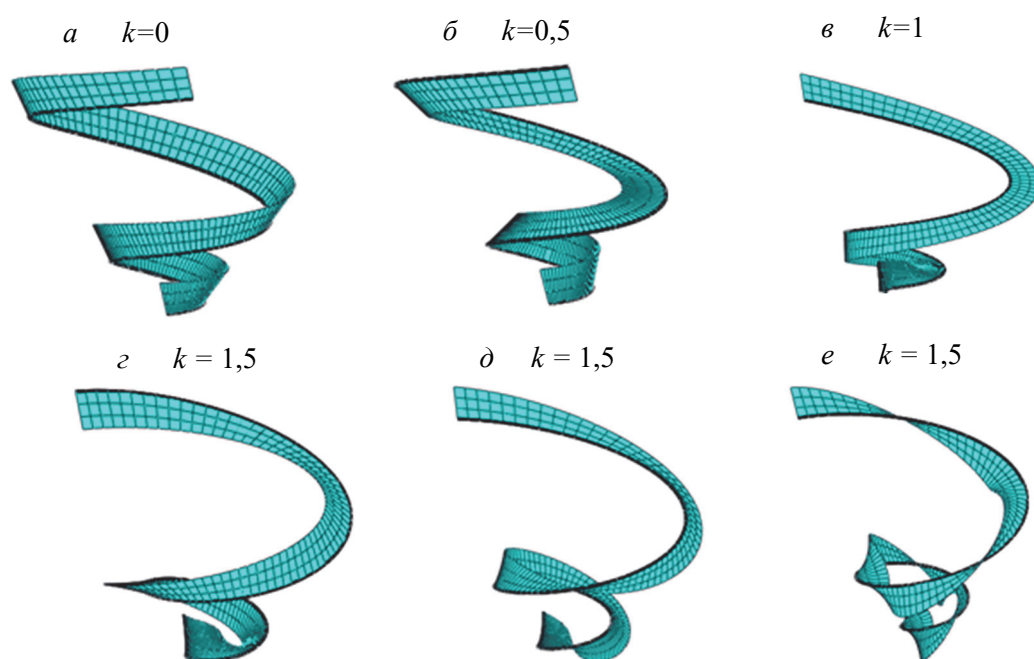


Рис. 9. Винтообразные нормальные линейчатые поверхности с базовой цилиндрической спиралью

Волнистые нормальные линейчатые поверхности

Рассмотрим подкласс нормальных линейчатых волнистых поверхностей с косинусоидальной функцией угла поворота образующей прямой в нормальной плоскости базовой кривой:

$$\theta(u) = \theta_0 + c \left[\cos \left(k\pi \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \right) + p \right], \quad (12)$$

c – амплитуда колебаний углового параметра в нормальной плоскости базовой кривой; k – число полу-волн, описываемых образующей прямой, вдоль рассматриваемого отсека базовой кривой $u = u_0 \div u_1$; k – число полу-волн синусоиды; $p = 0, 1, -1$ – параметр трех типов формирования волновой поверхности.

Отметим, что при $c = 0$ с базовой плоской кривой на основе уравнения (1) формируется поверхность одинакового ската. При $c > 0$ при параметре $p = 1$ формируется волнистая поверхность образующимися прямыми в точках внутренней амплитуды косинуса с внешней стороны поверхности одинакового ската; $p = -1$ – касание внешними прямыми косинусоиды внутренней стороны поверхности одинакового ската; $p = 0$ – волновая поверхность симметрична относительно поверхности одинакового ската. Поверхности одинакового ската можно считать *опорными* поверхностями линейчатых нормальных волнистых поверхностей. Выше показано, что при $\theta_0 = 0, \theta_0 = \pi$ поверхность одинакового ската вырождается в плоскую криволинейно-трапецевидную область, при $\theta_0 = \pi$ получаем цилиндрическую поверхность.

На рис. 10 представлены волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовой параболой $x = u; y = au^2; a = 0,25; u = -8 \div 8; v = 0 \div 8; \theta_0 = \pi; c = \pi/4$; различные параметры k, p .

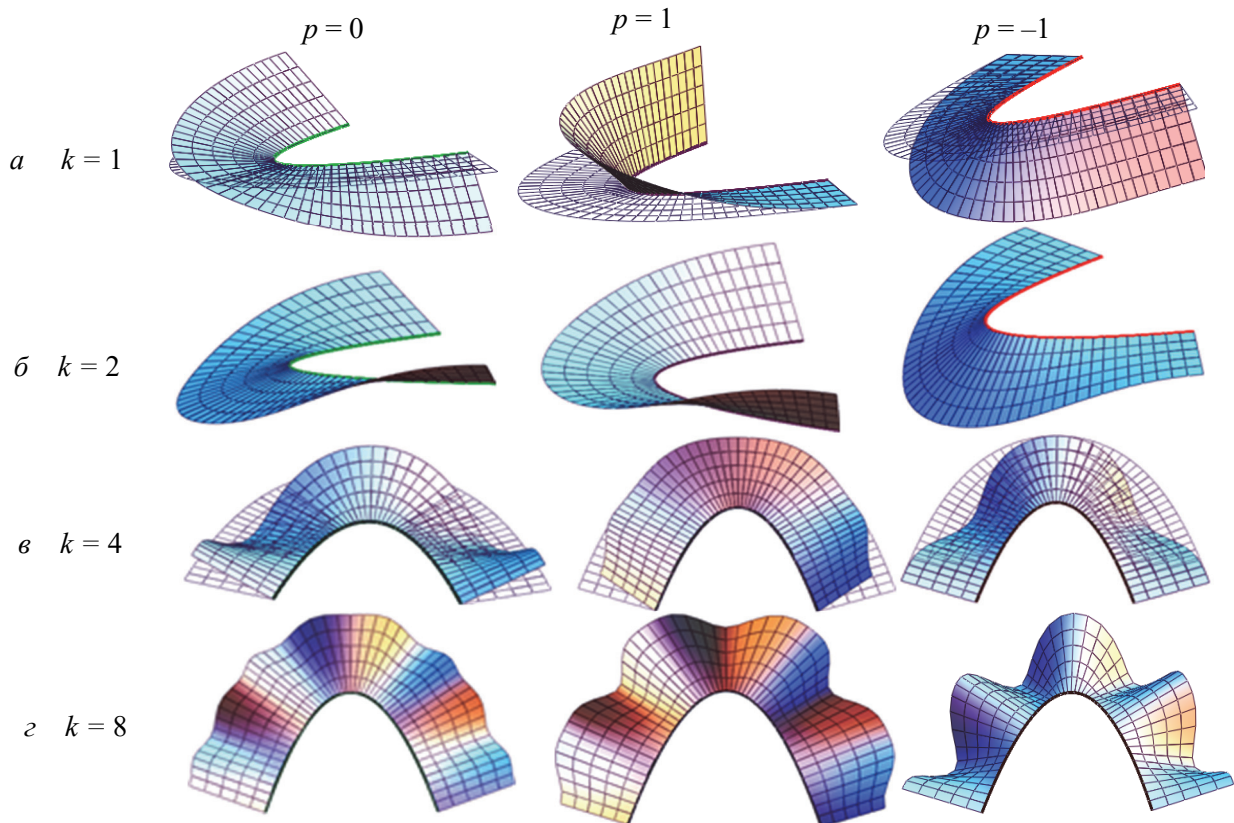


Рис. 10. Волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовой параболой

На некоторых рисунках волнистые поверхности совмещены с опорными поверхностями одинакового ската.

На рис. 11 представлены волнистые нормальные линейчатые поверхности на параболическом цилиндре – $\theta_0 = \pi/2$.

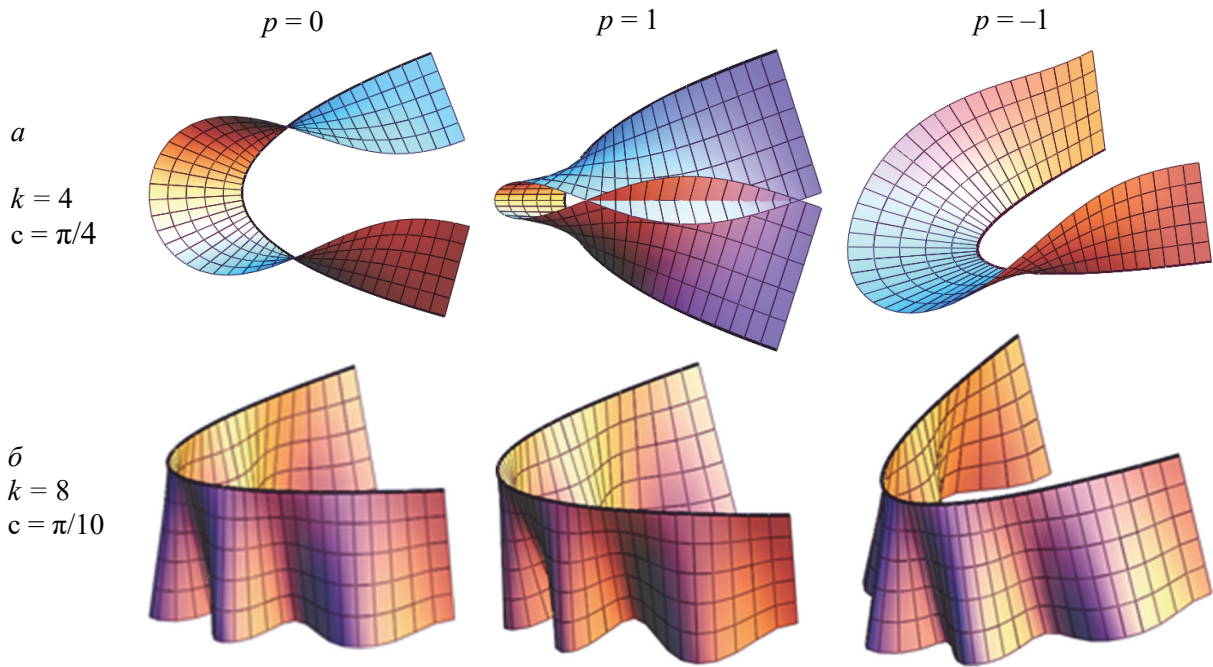


Рис. 11. Волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовой параболой, $\theta_0 = \pi\theta_0 = \pi$

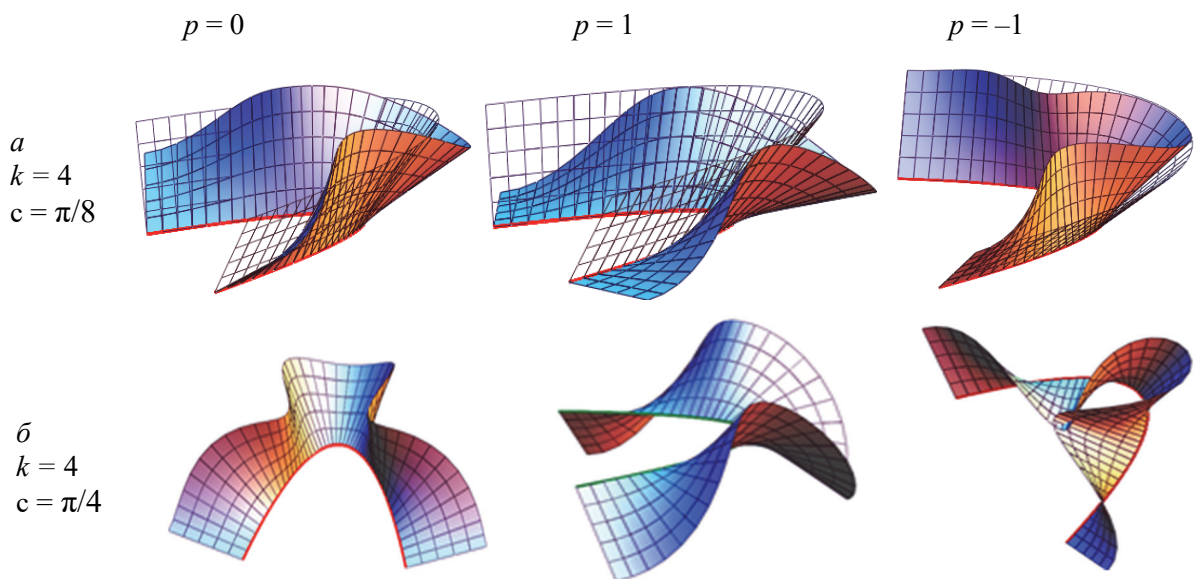


Рис. 12. Волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовой параболой, $\theta_0 = 0,75\pi$

На рис. 12 представлены волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовой параболой $\theta_0 = 0,75\pi$.

Рассмотрим волнистые нормальные поверхности с базовым эллипсом $x = a \cos u$; $y = b \sin u$; $a = 3$; $b = 2$.

На рис. 13 приведены нормальные линейчатые волнистые поверхности с базовым эллипсом с параметром $\theta_0 = \pi$, $c = \pi/4$.

На рис. 14 – нормальные линейчатые волнистые поверхности с базовым эллипсом при $\theta_0 = \pi/2$, $c = \pi/8$. Рисунки волнистых поверхностей для наглядности совмещены с опорным эллипсоидальным цилиндром.

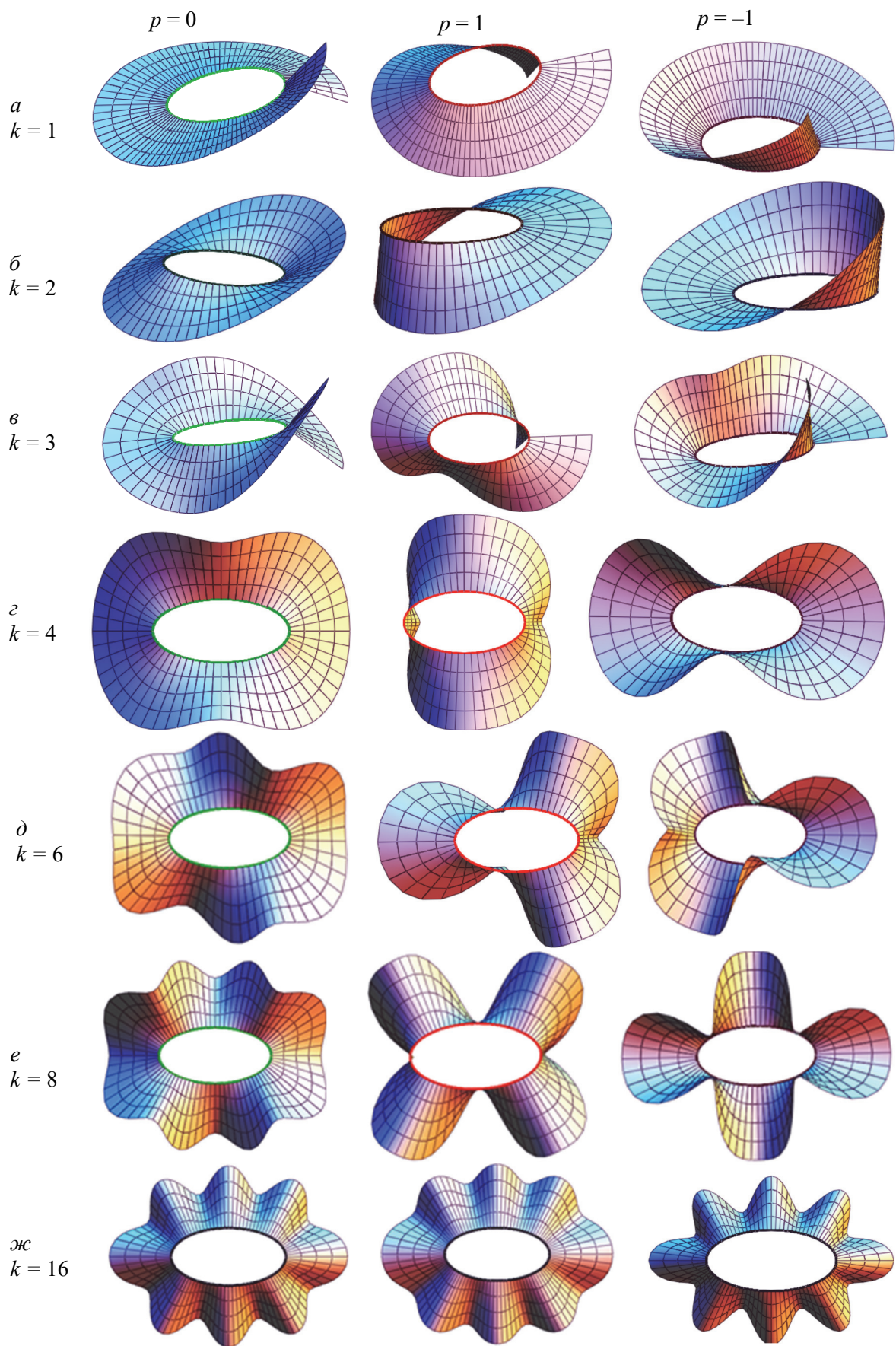


Рис. 13. Волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовым эллипсом, $\theta_0 = \pi$, $c = \pi/4$

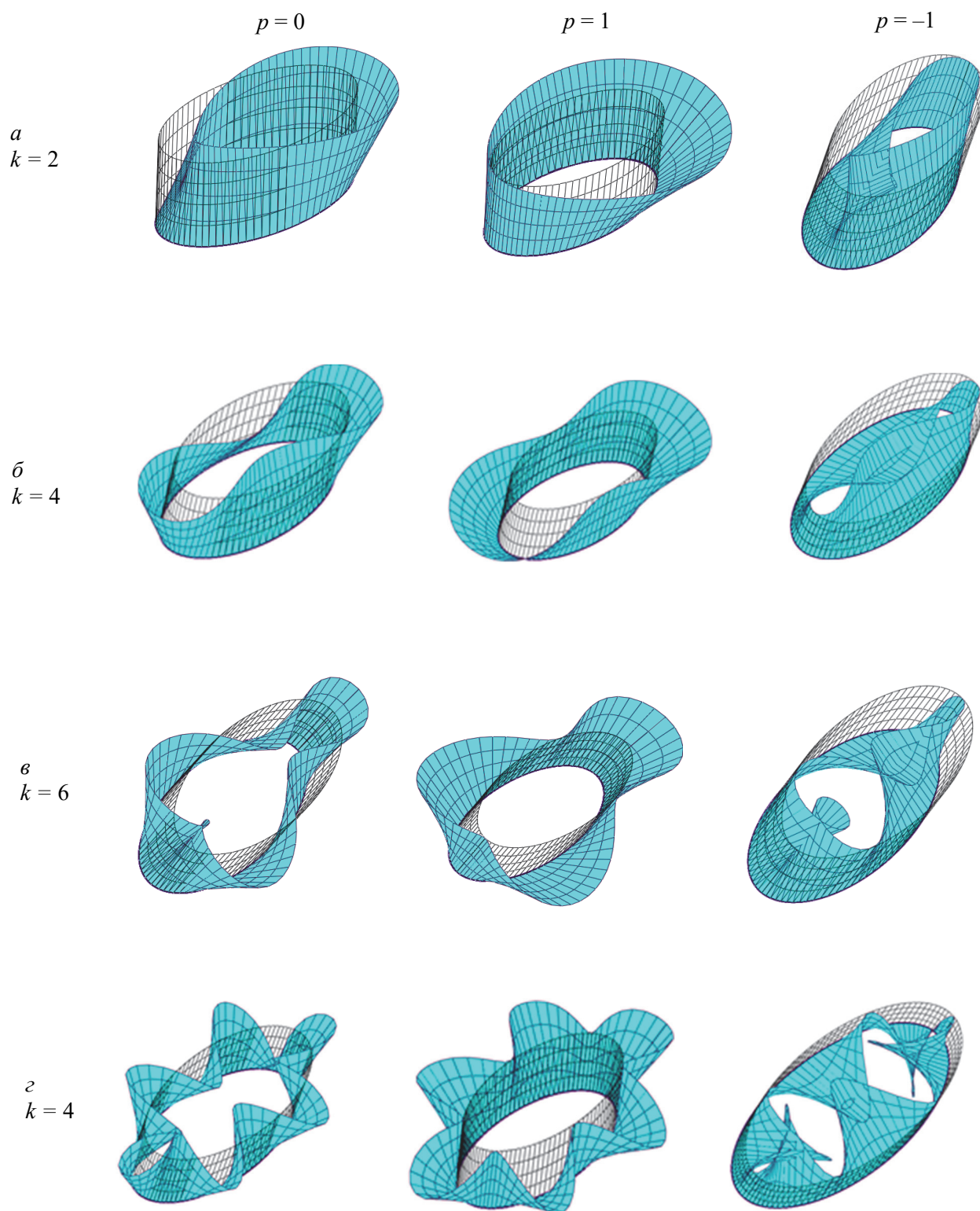


Рис. 14. Волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовым эллипсом, $\theta_0 = \pi/2$, $c = \pi/8$

На рис. 15 приведены нормальные линейчатые волнистые поверхности с базовым эллипсом при $\theta_0 = 0,75\pi$, $c = \pi/8$. Рисунки волнистых поверхностей для наглядности совмещены с опорным эллипсоидальным цилиндром.

Из приведенных рисунков волнистых нормальных линейчатых поверхностей видно, что при параметре $p = 0$ и $p = -1$ отсеки волнистых нормальных линейчатых поверхностей могут пересекаться в зависимости от параметра амплитуды колебаний и параметра длины образующей прямой.

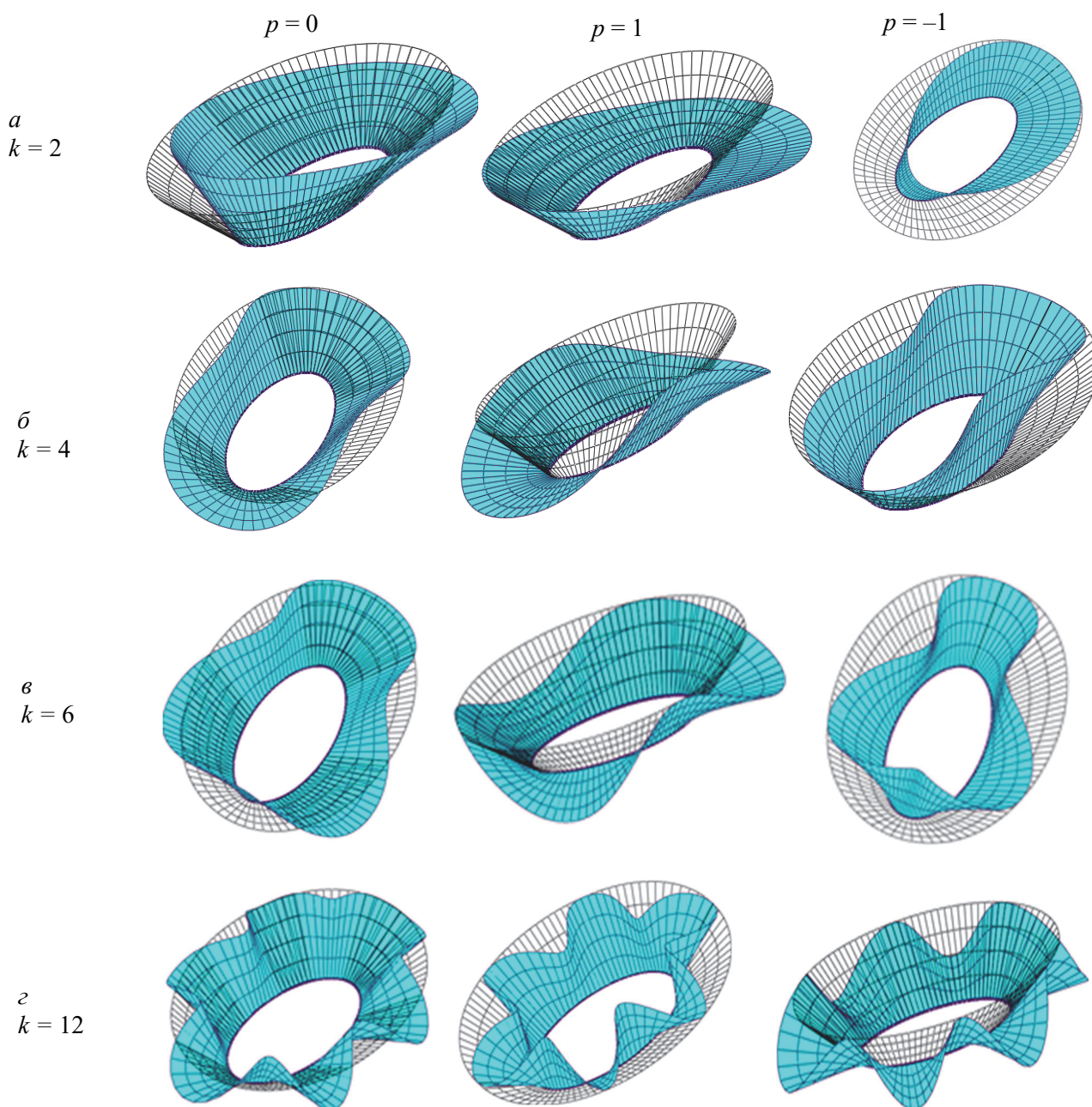


Рис. 15. Волнистые нормальные линейчатые поверхности с базовым эллипсом, $\theta_0 = 0,75\pi$, $c = \pi/8$

При нечетном числе полуволин колебаний $\kappa = 1, 3, 5, \dots$ получаем незамкнутую нормальную линейчатую поверхность (рис. 12, а, в). При $\kappa = 2, 6, 10, \dots$ ($\kappa/2$ – нечетное) поверхности с одной плоскостью симметрии – xz ; при $\kappa = 4, 8, 12, \dots$ (κ – пропорционально 4) – поверхность с двумя плоскостями симметрии – xz, yz .

Заключение

Рассмотрены вопросы геометрии нормальных линейчатых поверхностей, образуемых движением прямой образующей в нормальной произвольной базовой кривой. Образующая кривая вращается по любому заданному закону в нормальной плоскости базовой кривой. Приведено векторное уравнение поверхности, получены формулы коэффициентов квадратичных форм поверхности. Показано, что координатная система нормальных линейчатых поверхностей является ортогональной, но в общем виде несопряженной, то есть образующие прямые в общем не являются линиями главных кривизн поверхности. Получено условие, при выполнении которого координатная система нормальных линейчатых поверхностей будет сопряженной – нормальные линейчатые поверхности торсовыми, развертывающимися. Приведены ри-

сунки нормальных торсовых поверхностей с плоскими базовыми кривыми – поверхности одинакового ската и с пространственными – винтовой базовой кривой и конусной спиралью.

Рассмотрены подклассы нормальных линейчатых поверхностей:

а) винтообразные нормальные линейчатые поверхности, образуемые движением прямой линии в нормальной плоскости произвольной базовой кривой с линейной зависимостью вращения образующей прямой от параметра функции базовой кривой. При базовой кривой прямой линией получаем классическую винтовую линию;

б) волнистые нормальные линейчатые поверхности, образуемые колебательным вращением образующей прямой в нормальной плоскости базовой кривой.

Приведены многочисленные рисунки винтообразных и волнистых нормальных линейчатых поверхностей с различными базовыми кривыми и различными параметрами.

Рисунки поверхностей выполнялись с применением программного комплекса MathCad.

Показана возможность формообразования разнообразных форм нормальных линейчатых поверхностей, которые могут использоваться в машиностроении, строительстве, авиастроении и других областях техники.

Список литературы

1. Монж Г. Приложение анализа к геометрии. М.: ОНТИ, 1936.
2. Dupin Ch. Application de Geometrie et de Mechanique. Paris: Bachelier, 1822.
3. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: ГИФМЛ, 1963. 540 с.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии М. – Л.: ГИТТЛ, 2004. 428 с.
5. Казан В.Ф. Основы теории поверхностей. М. – Л.: ОГИЗ, 1947. 407 с.
6. Hilbert D., Cohn-Vossen S. Geometry and the imagination. 2nd ed. Chelsea, 1952.
7. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. 344 с.
8. Санчес-Аркас. Оболочки. М.: Изд-во литературы по строительству, 1961. 172 с.
9. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. М.: Изд-во УДН, 1988. 176 с.
10. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности и оболочки: справочник. М.: Изд-во УДН, 1991. 287 с.
11. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек. М.: РУДН, 2009. 357 с.
12. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of analytical surfaces. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.
13. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы. М.: РУДН, 2010. 540 с.
14. Кривошапко С.Н., Алборова Л.А. Формообразование оболочек в архитектуре: М.: РУДН, 2008. 48 с.
15. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий. М.: ЛИБРОКОМ, 2012. 328 с.
16. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad и AUTOCad. М.: Изд-во АСВ, 2016. 412 с.
17. Кривошапко С.Н. аналитические линейчатые поверхности и их полная классификация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 131–138. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138>
18. Зенкевич О. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1975. 344 с.
19. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2004. 248 с.
20. Иванов В.Н., Наср Ю.А. Расчет оболочек сложной геометрии вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 9. М.: АСВ, 2000. С. 25–34.
21. Иванов В.Н. Вариационные принципы и методы решения задач теории упругости. М.: РУДН, 2001. 176 с.
22. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 4. С. 6–14.
23. Иванов В.Н., Имомназаров Т.С., Фархан И.Т. Ортогональная криволинейная система координат и построение поверхностей на трапециевидно-криволинейных планах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2017. Т. 18. № 4. С. 518–527.
24. Vilmirovic L.S., Stancovic M.S., Rradivojevic G. Modeling conoid surfaces // Facta Universitatis: Architecture and Civil Engineering. 2002. Vol. 2. No. 4. Pp. 261–266.
25. Кривошапко С.Н., Басов Ю.К., Якушина А.А. Исследования по расчету и применению коноидальных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2001. Вып. 10. С. 7–14.