

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК GEOMETRY OF MIDDLE SURFACES OF SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-4-404-413
УДК 514.7

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Эпигипоциклоиды и эпигипоциклические поверхности с произвольной базовой кривой

В.Н. Иванов 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ i.v.ivn@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 28 марта 2021 г.

Доработана: 10 июня 2021 г.

Принята к публикации: 1 июля 2021 г.

Аннотация. При качении окружности по другой неподвижной окружности точка, жестко связанная с подвижной окружностью, образует кривую: при качении неподвижной окружности – эпициклоиду, при качении по внутренней стороне неподвижной окружности – гипоциклоиду. При качении окружности при постоянном наклоне к плоскости неподвижной окружности точка, жестко связанная с подвижной окружностью, описывает пространственную кривую. Циклоидой называется кривая, образованная точкой подвижной окружности, катящейся по прямой. Рассматривается геометрия кривых, образуемых точкой, жестко связанной с окружностью, катящейся по произвольной базовой кривой, а также геометрия поверхностей, образованных при одновременном качении окружности по базовой кривой и вращении окружности вокруг касательной к базовой кривой. Так как при вращении окружности в нормальной плоскости базовой кривой точка, жестко связанная с вращающейся окружностью, описывает окружность, то образуется эпигипоциклоидальная циклическая поверхность. Получено векторное уравнение эпигипоциклоид и эпигипоциклоидальных циклических поверхностей с произвольной базовой кривой. На основе векторных уравнений с использованием программного комплекса MathCad построены графики эпигипоциклоидальных кривых с базовым эллипсом и синусоидой. Приведены рисунки эпигипоциклоидальных циклических поверхностей с базовым эллипсом. Они показывают большие возможности формообразования новых видов поверхностей при качении окружности по различным базовым кривым. В отличие от эпигипоциклоидальных кривых и поверхностей с базовой окружностью форма эпигипоциклоидальных кривых и поверхностей с базовой кривой, отличной от окружности, зависит от начальной точки качения окружности на базовой кривой.

Ключевые слова: геометрия кривых, геометрия поверхностей, базовая кривая, эпигипоциклоиды, эпигипоциклоидальные циклические поверхности

Для цитирования

Иванов В.Н. Эпигипоциклоиды и эпигипоциклические поверхности с произвольной базовой кривой // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 4. С. 404–413. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-404-413>

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-4023-156X, Scopus Author ID: 57193384761, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909; i.v.ivn@mail.ru

© Иванов В.Н., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Epihypocurves and epihypocyclic surfaces with arbitrary base curve

Vyacheslav N. Ivanov 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

✉ i.v.ivn@mail.ru

Article history

Received: March 28, 2021

Revised: June 10, 2021

Accepted: July 1, 2021

Abstract. If a circle rolls around another motionless circle then a point bind with the rolling circle forms a curve. It is called epicycloid, if a circle is rolling outside the motionless circle; it is called hypocycloid if the circle is rolling inside the motionless circle. The point bind to the rolling circle forms a space curve if the rolling circle has the constant incline to the plane of the motionless circle. The cycloid curve is formed when the circle is rolling along a straight line. The geometry of the curves formed by the point bind to the circle rolling along some base curve is investigated at this study. The geometry of the surfaces formed when the circle there is rolling along some curve and rotates around the tangent to the curve is considered as well. Since when the circle rotates in the normal plane of the base curve, a point rigidly connected to the rotating circle arises the circle, then an epihypocycloidal cyclic surface is formed. The vector equations of the epihypocycloid curve and epihypocycloid cycle surfaces with any base curve are established. The figures of the epihypocycloids with base curves of ellipse and sinus are got on the base of the equations obtained. These figures demonstrate the opportunities of form finding of the surfaces arised by the cycle rolling along different base curves. Unlike epihypocycloidal curves and surfaces with a base circle, the shape of epihypocycloidal curves and surfaces with a base curve other than a circle depends on the initial rolling point of the circle on the base curve.

Keywords: geometry of the curves, geometry of the surfaces, base curve, epihypocycloids, epihypocycloid cycle surfaces

For citation

Ivanov V.N. Epihypocurves and epihypocyclic surfaces with arbitrary base curve. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(4):404–413. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-404-413>

Введение

Геометрия эпи- и гипоциклоид, образуемых точкой, жестко связанной с окружностью, катящейся по неподвижной окружности, приводится во многих учебниках, справочниках, монографиях [1–9]. Если подвижная окружность катится по неподвижной с постоянным наклоном к плоскости неподвижной окружности подвижной окружности, то точка, жестко привязанная к подвижной окружности, описывает пространственную кривую. При вращении неподвижной окружности вокруг касательной в точке касания окружностей точка, жестко связанная с подвижной окружностью, описывает окружность. При повороте на 180° точка эпициклоида переходит в точку гипоциклоида и при полном качении по неподвижной окружности и поворотом на 180° эпициклоида переходит в гипоциклоиду. Пространственные кривые, образованные при качении подвижной окружности с постоянным уклоном, можно называть эпигипоциклоидами. При качении подвижной окружности с одновременным вращением вокруг касательной образуются циклические поверхности. Геометрия эпигипоциклоид и эпигипоциклоидальных поверхностей рассмотрена в [10; 11]. В статьях показано, что эпигипоциклоидальные поверхности являются каналовыми [3; 12–15]. В настоящей статье рассматривается геометрия эпигипоциклоид и эпигипоциклоидальных поверхностей, образуемых при качении окружности по произвольной базовой кривой, и циклические поверхности, образуемые при качении и вращении окружности.

Геометрия эпигипоциклоид общего типа

Пусть задана произвольная направляющая базовая кривая $r_n(u)$, по которой катится окружность радиуса a (рис. 1). К катящейся окружности жестко привязана точка d , которая при качении окружности описывает кривую $r(u)$. Чтобы получить уравнение формируемой кривой, необходимо определить длину

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-4023-156X, Scopus Author ID: 57193384761, eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909; i.v.ivn@mail.ru

базовой кривой, пройденную катящейся окружностью от начальной u_0 до рассматриваемой точки u базовой кривой $S_H(u) = \int_{u_0}^u s'_H du$, где $s'_H = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_H}{\partial u} \right|$. При этом радиус катящейся окружности с точкой c будет повернут от нормали базовой кривой на угол $\theta(u) = \frac{S_H(u)}{a}$.

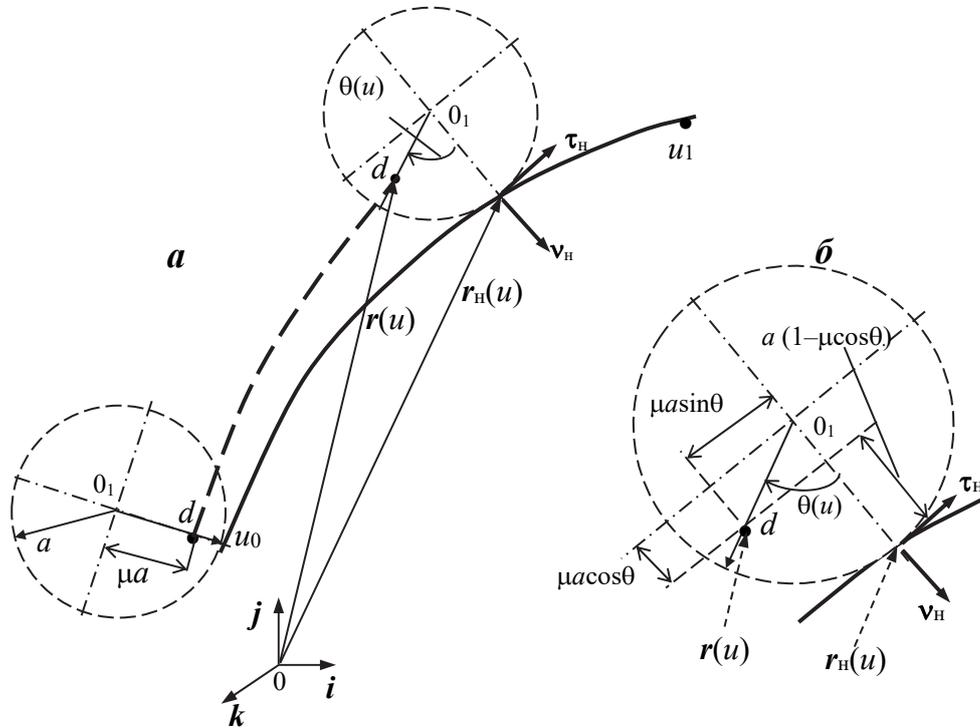


Рис. 1. Качение круга по направляющей базовой кривой

Отметим, что для многих кривых интеграл не имеет аналитического решения, в частности для эллипса используются специальные функции. Однако в большинстве современных программных комплексов интегралы вычисляются с использованием численных методов, в частности в программном комплексе MathCad.

Векторное уравнение формируемой точкой d кривой получаем в виде

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_H(u) - a(1 - \mu \cos \theta) \mathbf{v}_H - a \mu \sin \theta \boldsymbol{\tau}_H, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\tau}_H, \mathbf{v}_H$ – векторы касательной и нормали базовой кривой.

Если окружность катится по базовой кривой под углом ν к плоскости базовой кривой, точка d формирует пространственную кривую, векторное уравнение которой получаем в виде

$$\mathbf{r}(u, \nu) = \mathbf{r}_H(u) - a \mu \sin \theta \boldsymbol{\tau}_H + a(1 - \mu \cos \theta) \mathbf{e}(u, \nu), \tag{2}$$

где $\mathbf{e}(u, \nu) = \mathbf{v} \cos \nu + \boldsymbol{\beta} \sin \nu$, $\boldsymbol{\beta}$ – бинормаль кривой.

Если рассматривается качение окружности от точки u_0 до точки u_1 базовой кривой и радиус окружности принимается $a = \frac{S_{01}}{2k\pi}$, где $S_{12} = \int_{u_0}^{u_1} s'_H du$, то окружность описывает k полных поворотов (качений) по 2π .

Для плоской кривой $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}$ – орт прямоугольной системы координат.

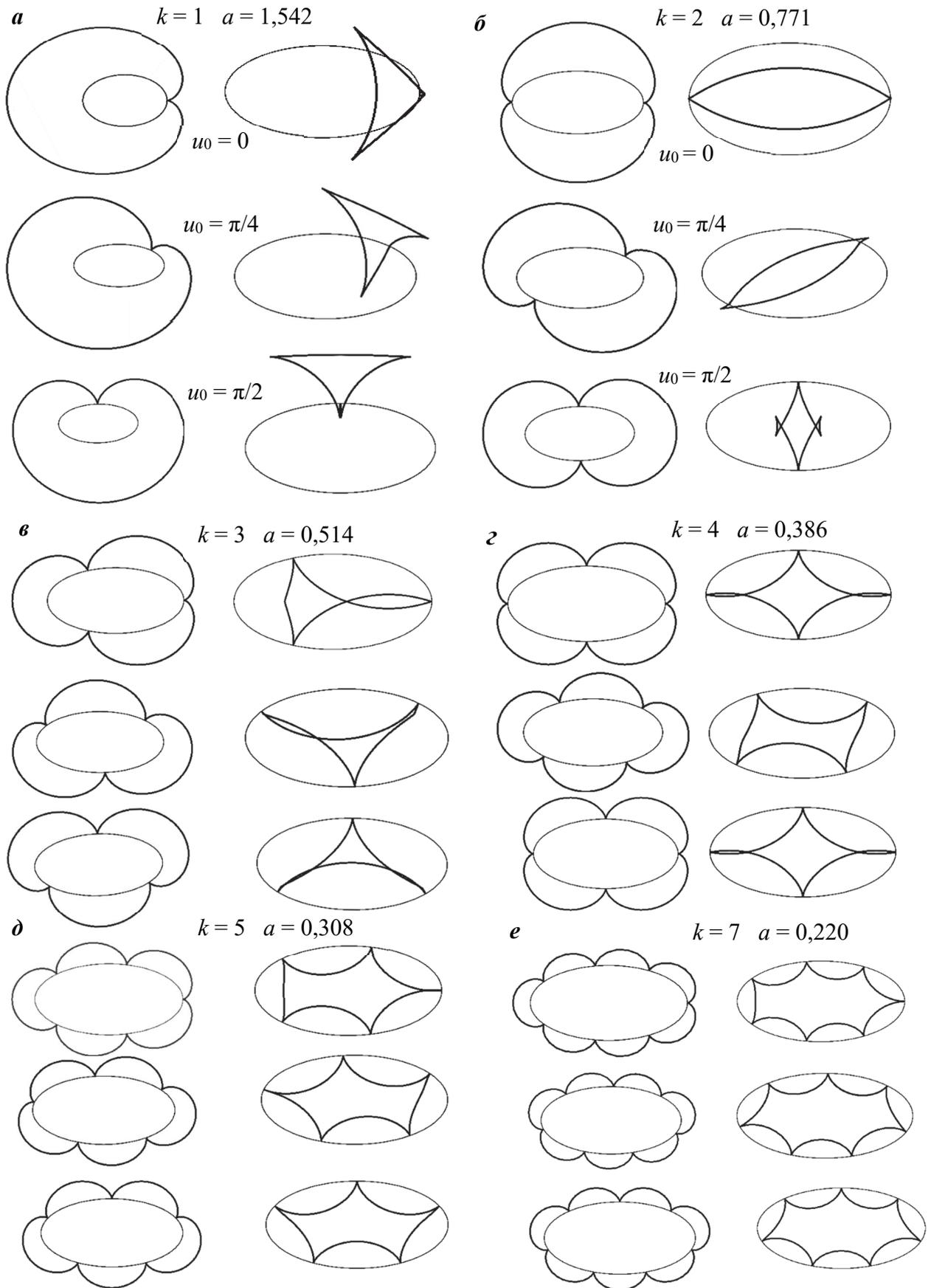


Рис. 2. Эпигипоциклоиды с базовым эллипсом $b = 2$, $c = 1$ формообразующая точка на окружности, $\mu = 1$

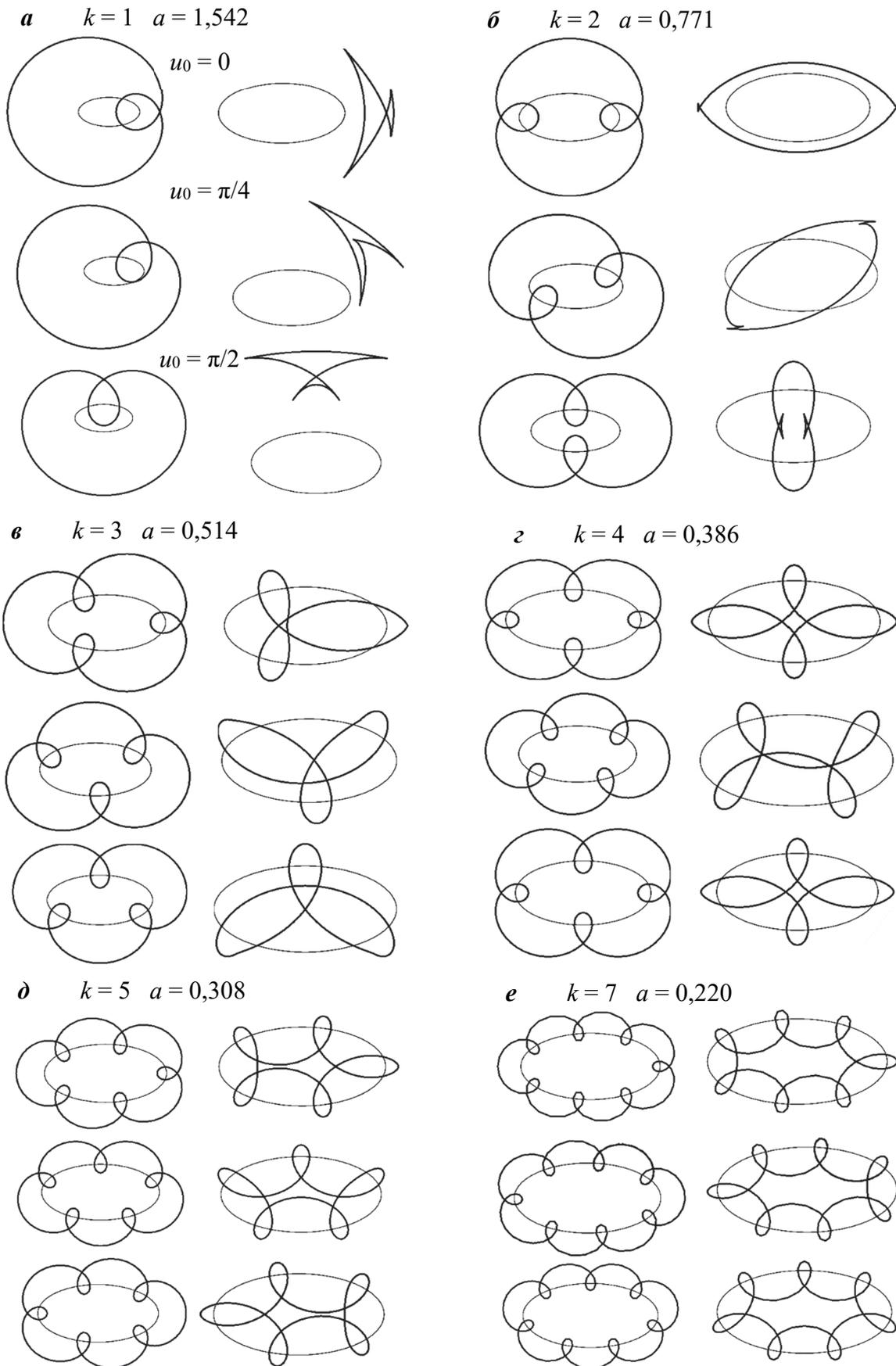


Рис. 3. Эпитрициклоиды с базовым эллипсом $b = 2$, $c = 1$, формообразующая точка вне окружности, $\mu = 2$

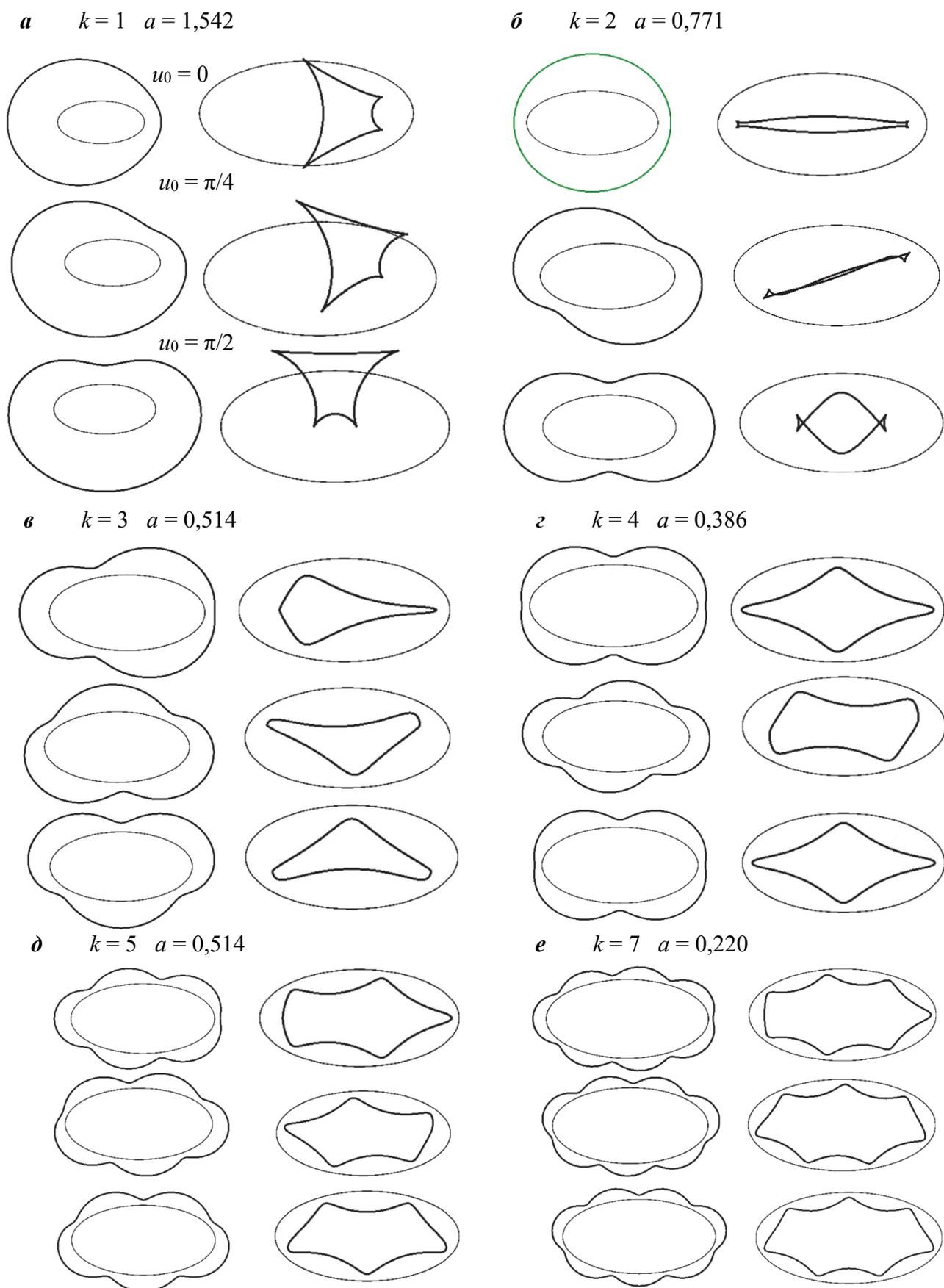


Рис. 4. Эпитрициклоиды с базовым эллипсом $b = 2$, $c = 1$, формообразующая точка внутри окружности, $\mu = 0,5$

При $v = 0$ окружность катится с вогнутой стороны базовой кривой – точка c формирует гипоциклоиду, при $v = \pi$ – формируется эпициклоида на выпуклой стороне базовой кривой.

Если параметр v изменяется от 0 до 2π , точка d описывает окружность радиуса $R = a(1 - \mu \cos \theta)$ вокруг касательной к базовой кривой в точке касания окружности с базовой кривой. При повороте от 0 до π точка гипоциклоиды переходит в точку эпициклоиды.

При качении окружности и вращении $v = (0 \div 2\pi)$ в каждой точке касания с базовой кривой формируется циклическая поверхность

$$\rho(u, v) = r_n(u)_n - a\mu \sin \theta \tau_n + a(1 - \mu \cos \theta) e(u, v). \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) практически соответствуют образованию циклоидальных кривых и циклических поверхностей при качении окружности как по плоской, так и по пространственной базовой кривой.

Эпигипоциклоиды

На рис. 2 изображены эпигипоциклоиды с параметрами базового эллипса $r_n(u) = b \cos u + c \sin u$, $b = 2$, $c = 1$, с образующей точкой d на окружности – $\mu = 1$ и различными параметрами качения окружности.

Из рис. 2 видно, что вид эпигипоциклоид зависит от начальной точки направляющей кривой u_0 касания катящейся окружности с образующей точкой d .

На рис. 3 приведены эпигипоциклоиды качения окружности по базовому эллипсу $b = 2$, $c = 1$ с формообразующей точкой вне окружности – $\mu = 2$ и различными параметрами окружности.

На рис. 4 представлены эпигипоциклоиды качения окружности по базовому эллипсу $b = 2$, $c = 1$ с формообразующей точкой внутри окружности – $\mu = 0,5$ и различными параметрами окружности.

На рис. 5 эпигипоциклоиды с направляющей базовой синусоидой $y = a \sin \pi x / L$, $a = 0,65$, $L = 1$, $x = 0 \div 2L$; а) $\mu = 1$; б) $\mu = 0,5$; в) $\mu = 2$.

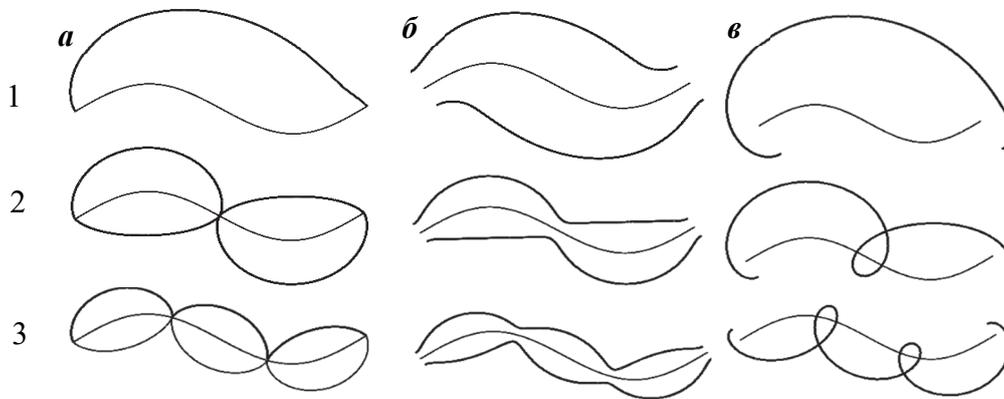


Рис. 5. Эпигипоциклоиды с базовой синусоидой на две полуволны: а – $\mu = 1$; б – $\mu = 0,5$; в – $\mu = 2$; 1 – верхний ряд $\kappa = 1$; 2 – средний $\kappa = 2$; 3 – нижний $\kappa = 3$

На рис. 5, а1, в1, в2 – эпициклоиды, в2 – гипоциклоида, на остальных совмещены эпициклоиды и гипоциклоиды. Из совмещенных рисунков видно, что гипоциклоиды с направляющим эллипсом обратно симметричны эпициклоидам.

Эпигипоциклоидальные циклические поверхности

Далее представлены рисунки эпигипоциклоидальных циклических поверхностей с эллипсоидальной базовой кривой: $\kappa = 1$ (рис. 6), $\kappa = 2$ (рис. 7), $\kappa = 3$ (рис. 8).

На рис. 9 изображены эпигипоциклоидальные циклические поверхности n базовой синусоиды в две полуволны.

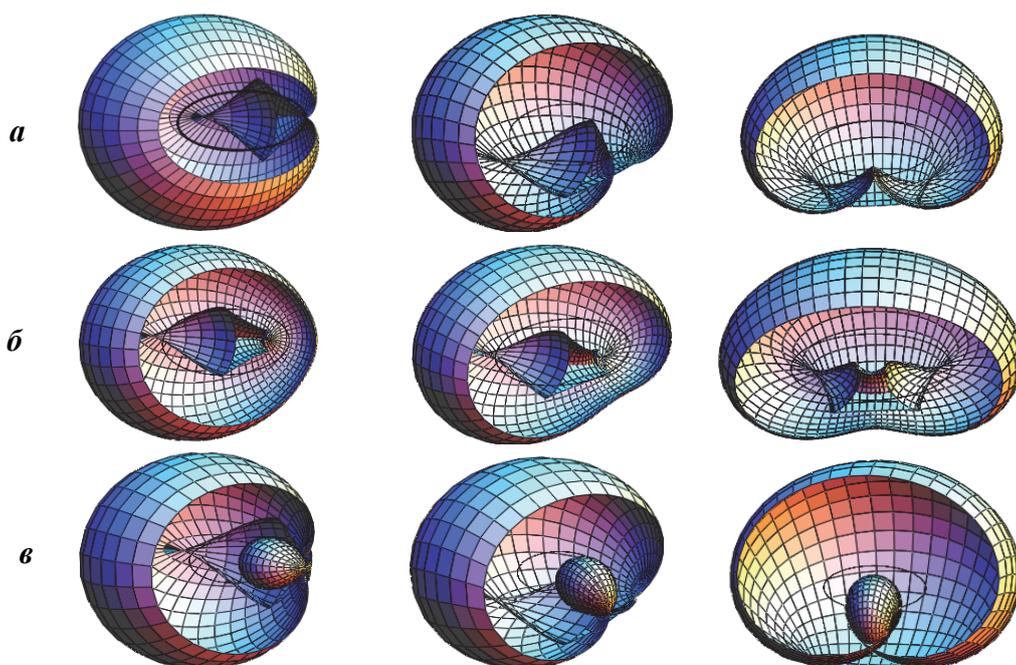


Рис. 6. Эпигипоциклоидальные циклические поверхности с базовым эллипсом, $k = 1$:
 $a - \mu = 1$; $b - \mu = 0,5$; $v - \mu = 2$

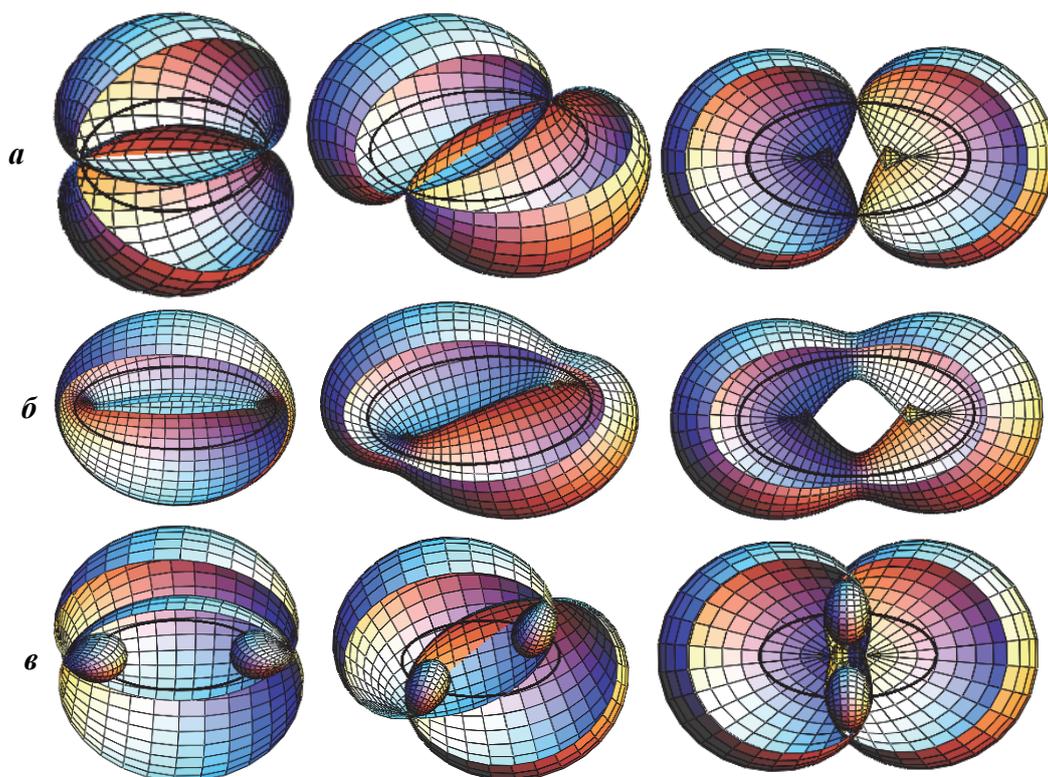


Рис. 7. Эпигипоциклоидальные циклические поверхности с базовым эллипсом, $k = 2$:
 $a - \mu = 1$; $b - \mu = 0,5$; $v - \mu = 2$

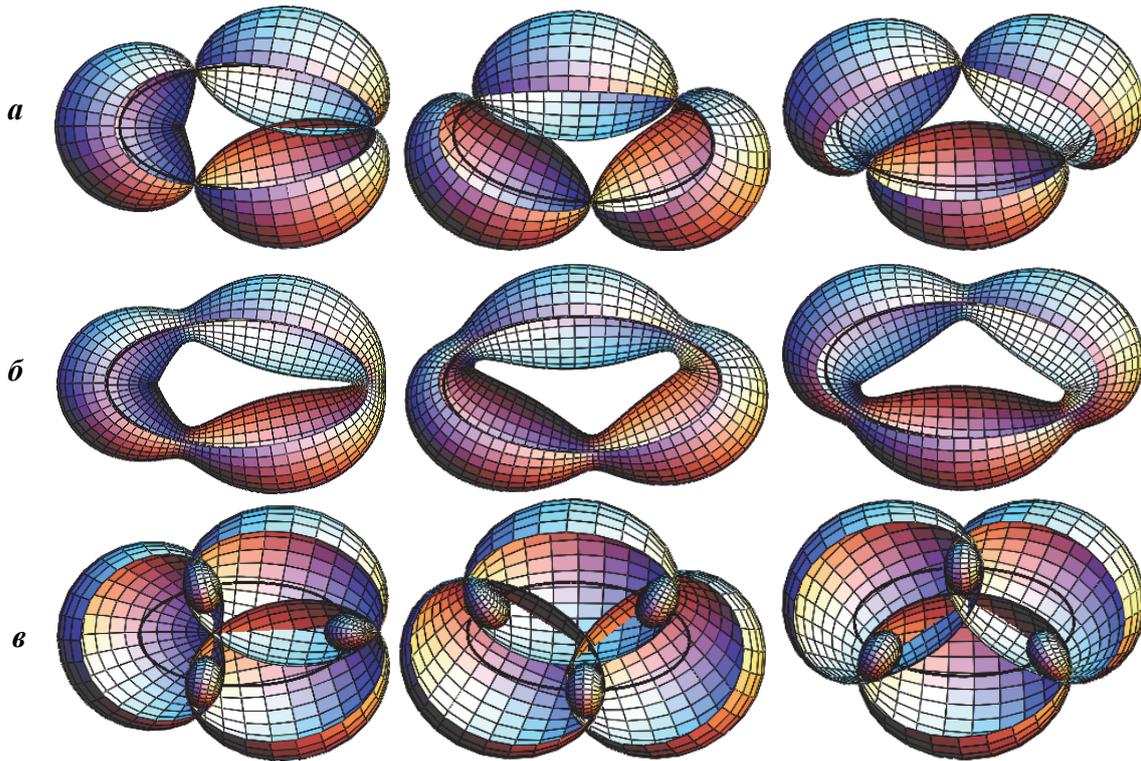


Рис. 8. Эпигипоциклоидальные циклические поверхности с базовым эллипсом, $k = 3$:
 $a - \mu = 1$; $б - \mu = 0,5$; $в - \mu = 2$

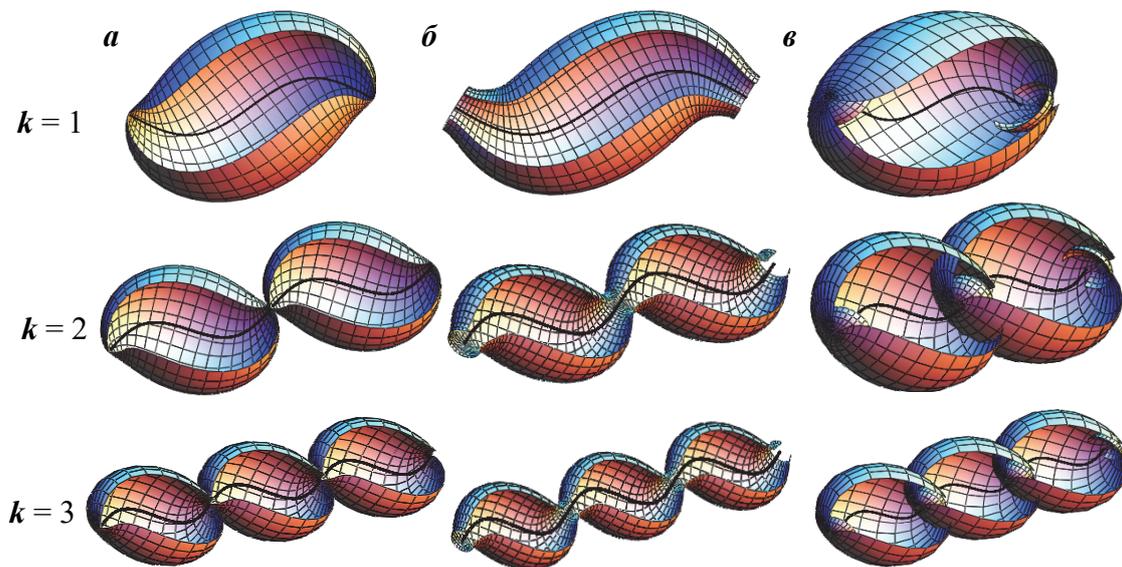


Рис. 9. Эпигипоциклоидальные циклические поверхности с базовой синусоидой:
 $a - \mu = 1$; $б - \mu = 0,5$; $в - \mu = 2$

Заключение

Показана возможность построения обобщенных эпигипоциклоидальных кривых при качении окружности с жестко привязанной точкой по произвольной кривой и эпигипоциклоидальных циклических поверхностей при вращении окружности в нормальной плоскости базовой направляющей кривой. Приведены рисунки вариантов эпигипоциклоид и циклических поверхностей при качении окружности по эллипсу и

синусоиде. Рисунки кривых и поверхностей построены с использованием комплекса MathCad на основе векторных уравнений (1), (3). Используя различные направляющие кривые, в том числе пространственные, можно создавать разнообразные формы циклических поверхностей.

Приведенные примеры визуализации поверхностей показывают большие возможности создания новых форм пространственных конструкций и их использования в архитектуре и современном градостроительстве.

Список литературы

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике: для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: ГИФизМатлит, 1962. 608 с.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики: в 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1965. 480 с.
3. *Иванов В.Н., Романова В.А.* Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad, AutoCad: монография. М.: Изд-во АСВ, 2016. 412 с.
4. *Lawrence J.D.* A catalog of special plane curves. New York: Dover Publ., 1972. Pp. 161, 168–170, 175.
5. *Corneli J.* The PlanetMath encyclopedia // ITP 2011 Workshop on Mathematical Wikis (MathWikis 2011) Nijmegen, Netherlands, August 27, 2011. Nijmegen, 2011. Pp. 6–12.
6. Математическая энциклопедия: в 5 т. / под ред. И.М. Виноградова. М.: Советская энциклопедия, 1977.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.
8. *Churkin G.M.* A quality of the points of the points of hypocycloid. Novosibirsk, 1989. 10 p.
9. Barra M. The cycloid // Educ. Stud. Math. 1975. Vol. 6. No. 1. Pp. 93–98.
10. *Иванов В.Н.* Эпи-гипоциклоиды и эпи-гипоциклоидальные каналовые поверхности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 242–247. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-3-242-247>
11. *Иванов В.Н.* Эпи-гипоциклоидальные каналовые поверхности в линиях кривизны // Инженерные системы – 2019: труды научно-практической конференции с международным участием (Москва, 3–5 апреля 2019 г.). М.: РУДН, 2019. С. 147–157.
12. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. М.: ГИФМЛ, 1963. 540 с.
13. *Soliman M.A., Mahmoud W.M., Solouma E.M., Bary M.* The new study of some characterization of canal surfaces with Weingarten and linear Weingarten types according to Bishop frame // Journal of the Egyptian Mathematical Society. 2019. Vol. 27. Article number: 26. <https://doi.org/10.1186/s42787-019-0032-y>
14. *Krivoshapko S.N., Bock Hyeng C.A.* Classification of cyclic surfaces and geometrical research of canal surfaces // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2012. Vol. 12. Issue 3. Pp. 360–374.
15. *Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Encyclopedia of analytical surfaces. Springer International Publishing, 2015. 752 p.
16. *Ivanov V.N.* Constructing shells and their visualization in system “MathCad” on basis of vector equations of surfaces // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. 012018. <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012018>