

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-2-112-120
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Математическое моделирование волн напряжений при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса: задача Лэмба

В.К. Мусаев

Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9
Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26
Минячевский государственный университет, Азербайджанская Республика, AZ4500, Минячевир, ул. Диллары Алиевой, д. 21
musayev-vk@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 17 октября 2020 г.
Доработана: 12 марта 2021 г.
Принята к публикации: 29 марта 2021 г.

Для цитирования

Мусаев В.К. Математическое моделирование волн напряжений при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса: задача Лэмба // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 2. С. 112–120. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-112-120>

Аннотация. Цель – рассмотреть задачу о численном моделировании продольных, поперечных и поверхностных волн на свободной поверхности упругой полуплоскости. Методы. Для решения нестационарной динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями использован метод конечных элементов в перемещениях. С его помощью линейная задача с начальными и граничными условиями приведена к линейной задаче Коши. Предложен квазирегулярный подход к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями и к аппроксимации исследуемой области. Методика основана на схемах: точка, линия и плоскость. Исследуемая область разбита по пространственным переменным на треугольные и прямоугольные конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область разбита на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Результаты. Приведена информация о численном моделировании упругих волн напряжений в упругой полуплоскости при сосредоточенном волновом воздействии в виде дельта-функции. Исследуемая расчетная область имеет 12 008 001 узловых точек. Решена система уравнений из 48 032 004 неизвестных. Показано изменение упругого контурного напряжения на свободной поверхности полуплоскости в разных точках. Амплитуда поверхностных волн Релея существенно больше амплитуд продольных, поперечных и других волн при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса на поверхности упругой полуплоскости. После поверхностных волн Релея наблюдается динамический процесс в виде стоячих волн.

Ключевые слова: нестационарный процесс, комплекс программ В.К. Мусаева, треугольный импульс, задача Лэмба, упругая полуплоскость, контурное напряжение, продольная волна, поперечная волна, волна Релея, стоячая волна

Мусаев Вячеслав Кадыр оглы, профессор кафедры «Техносферная безопасность» РУТ (МИИТ), профессор кафедры комплексной безопасности в строительстве МГСУ, профессор кафедры высшей математики МГУ (Азербайджан), доктор технических наук; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4336-6785>, eLIBRARY SPIN-код: 8162-1906.

© Мусаев В.К., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Mathematical modeling of stress waves under concentrated vertical action in the form of a triangular pulse: Lamb's problem

Vyacheslav K. Musayev

Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, bldg 9, Moscow, 127994, Russian Federation

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

Mingachevir State University, 21 Dilyara Alieva St, Mingachevir, AZ4500, Republic of Azerbaijan

musayev-vk@yandex.ru

Article history

Received: October 17, 2020

Revised: March 12, 2021

Accepted: March 29, 2021

For citation

Musayev V.K. Mathematical modeling of stress waves under concentrated vertical action in the form of a triangular pulse: Lamb's problem. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021; 17(2):112–120. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-112-120>

Abstract. *The aim of the work.* The problem of numerical simulation of longitudinal, transverse and surface waves on the free surface of an elastic half-plane is considered. *Methods.* To solve the non-stationary dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions, the finite element method in displacements was used. Using the finite element method in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions was led to a linear Cauchy problem. A quasiregular approach to solving a system of second-order linear ordinary differential equations in displacements with initial conditions and to approximating the area under study is proposed. The method is based on the schemes: point, line and plane. The study area is divided by spatial variables into triangular and rectangular finite elements of the first order. According to the time variable, the study area is divided into linear end elements with two nodal points. The Fortran-90 algorithmic language was used in the development of the software package. *Results.* Some information is given about numerical modeling of elastic stress waves in an elastic half-plane with a concentrated wave action in the form of a Delta function. The estimated area under study has 12 008 001 nodal points. A system of equations consisting of 48 032 004 unknowns is solved. The change of elastic contour stress on the free surface of the half-plane at different points is shown. The amplitude of Rayleigh surface waves is significantly greater than the amplitudes of longitudinal, transverse, and other waves with a concentrated vertical action in the form of a triangular pulse on the surface of an elastic half-plane. After surface Rayleigh waves, a dynamic process is observed in the form of standing waves.

Keywords: nonstationary process, V.K. Musayev software package, triangular pulse, Lamb problem, elastic half-plane, contour stress, longitudinal wave, transverse wave, Rayleigh wave, standing wave

Введение

Волны напряжений различной природы, распространяясь в деформируемом теле, взаимодействуют друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Рассматривается задача о численном моделировании продольных, поперечных и поверхностных волн на свободной поверхности упругой полуплоскости при воздействии в виде дельта-функции (задача Лэмба).

В настоящее время в литературных источниках отсутствуют результаты численного решения задачи Лэмба в напряжениях при воздействии в виде треугольного импульса или дельта-функции.

В [1–29] приводится информация о постановке и методах решения волновых задач.

Рассматриваемый численный метод, алгоритм и комплекс программ в задачах переходного процесса механики деформируемых тел представлены в [14; 21–25; 27–29].

Оценка достоверности и точности рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ дана в [14; 21–25].

В [21] продемонстрирована практическая реализация метода конечных элементов для решения нестационарных волновых задач. Приведены результаты исследований некоторых задач для оценки физи-

Vyacheslav Kadyr ogly Musayev, Professor of the Department of Technosphere Safety of the RUT (MIIT), Professor of the Department of Integrated Safety in Construction of the NRU MGSU, Professor of the Department of Higher Mathematics of MSU (Azerbaijan), Doctor of Technical Sciences; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4336-6785>, eLIBRARY SPIN-code: 8162-1906.

ческой достоверности и математической точности. Рассматриваемые задачи представлены в виде исследуемого объекта с упругой плоскостью и полуплоскостью. Применяется фундаментальное воздействие в виде функции Хевисайда (ступенчатой функции). Основное внимание уделено оценке точности и достоверности численного решения нестационарных динамических задач для сложных деформируемых тел различной формы. На основе метода конечных элементов разработаны алгоритм и комплекс программ В.К. Мусаева для решения нестационарных волновых динамических задач теории упругости при различных начальных и граничных условиях, для областей различной формы, для модели уравнений состояния кусочно-неоднородной изотропной среды, подчиняющейся упругому закону Гука, при малых упругих деформациях. Первая задача – о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие в упругой плоскости. Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Контур круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 6 %. Вторая задача – решение первой задачи для сопоставления с результатами эксперимента, то есть динамической фотоупругости. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 2 %. Третья задача – о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие в плоскости. Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Внутренний контур подкрепления аппроксимирован 28 узловыми точками. По толщине круглое подкрепление аппроксимировано двумя узловыми точками. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 12 %. Четвертая задача – о воздействии плоской продольной упругой волны на Курпсайскую плотину с основанием в виде полуплоскости. Исследуемая расчетная область имеет 953 узловых точек. Курпсайская плотина аппроксимирована 224 узловыми точками. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 5 %. Пятая задача – о воздействии плоской продольной в виде треугольного импульса (дельта-функция) на упругую полуплоскость. Решается система уравнений из 59 048 неизвестных. Показано, что точное решение задачи соответствует рассматриваемому воздействию для упругих нормальных напряжений и имеется хорошее качественное и количественное совпадение с результатами точного решения. Шестая задача – о воздействии плоской продольной в виде ступенчатой функции (функция Хевисайда) на упругую полуплоскость. Решается система уравнений из 59 048 неизвестных для нормальных напряжений и имеется хорошее качественное и количественное совпадение с результатами точного решения. Анализ численных результатов показывает, что метод конечных элементов с успехом применяется для решения нестационарных динамических задач механики деформируемого твердого тела. Проведенные исследования сходимости и устойчивости, а также сравнение с результатами других методов показали хорошее совпадение.

В [22] рассмотрена некоторая информация моделирования нестационарных упругих волн в полуплоскости при импульсном воздействии в виде «восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга». Для решения поставленной задачи применяются волновые уравнения теории упругости. На основе метода конечных элементов разработаны численный метод, алгоритм и комплекс программ В.К. Мусаева. Решена задача о распространении нестационарных волн в упругой полуплоскости. Решается система уравнений из 83 448 неизвестных. Результаты позволяют сделать вывод о физической достоверности и математической точности численного решения.

В [23] рассмотрена задача о воздействии волны в виде импульсного воздействия «восходящая часть – четверть круга, нисходящая – четверть круга» на упругую полуплоскость. Для упругих нормальных напряжений получено хорошее совпадение с результатами аналитического решения. Сравнение результатов нормальных напряжений с результатами аналитического решения, показало хорошее совпадение. Результаты, полученные с помощью комплекса программ В.К. Мусаева, показали хорошую достоверность численного решения распространения упругих волн в деформируемых телах.

Постановка задачи

Для решения задачи о моделировании нестационарных упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие.

Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma, \\ \sigma_x &= \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \quad \sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S(S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Методика

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матриц и векторов для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\vec{\ddot{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \vec{\dot{\Phi}}|_{t=0} = \vec{\dot{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\vec{\dot{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\vec{\ddot{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \vec{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду:

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \vec{\Phi} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \vec{\dot{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек:

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i), \quad \vec{\dot{\Phi}}_{i+1} = \vec{\dot{\Phi}}_i + \Delta t \vec{\dot{\Phi}}_{i+1}, \quad (4)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Шаг по временной переменной Δt определяем из соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{c_p} (i = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента; r – число конечных элементов.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных волновых воздействиях. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным и по временным переменным на конечные элементы первого порядка.

Результаты и обсуждение

Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной волны в виде дельта-функции (рис. 2), перпендикулярной свободной поверхности упругой полуплоскости (рис. 1).

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс см}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$.

В точке B перпендикулярно свободной поверхности ABC приложено упругое нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $0 \leq n \leq 11$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $11 \leq n \leq 21$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1 \text{ МПа}$ (-1 кгс/см^2)).

Граничные условия для контура $CDEA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $CDEA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 500$. Контур ABC свободен от нагрузок, кроме точки B , где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y .

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6} \text{ с}$; $E = 3,15 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ($3,15 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$ ($0,255 \cdot 10^5 \text{ кгс см}^2/\text{см}^4$); $C_p = 3587 \text{ м/с}$; $C_s = 2269 \text{ м/с}$.

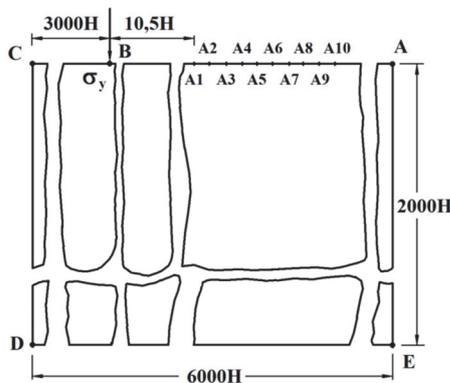


Рис. 1. Постановка задачи

о воздействии сосредоточенной волны в виде дельта-функции на свободной поверхности упругой полуплоскости

Figure 1. Statement of the problem of the effect of a concentrated wave in the form of a Delta function on the free surface of an elastic half-plane

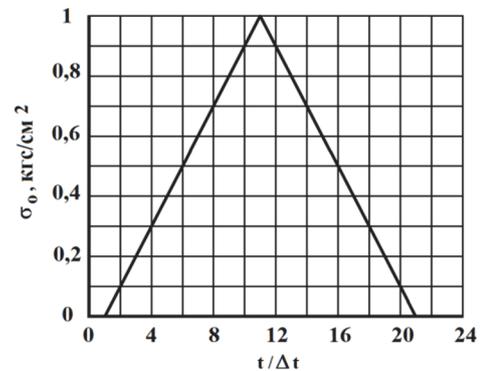


Рис. 2. Воздействие в виде дельта-функции

Figure 2. The impact in the form of Delta functions

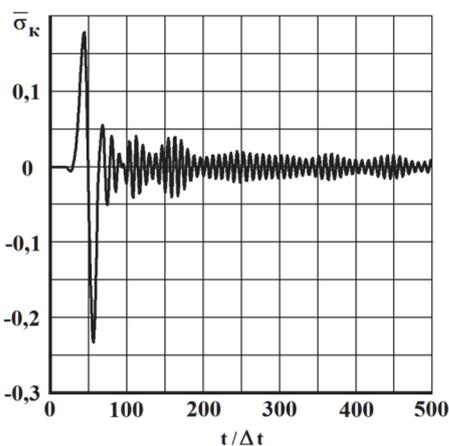


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A1$

Figure 3. The change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at the point $A1$

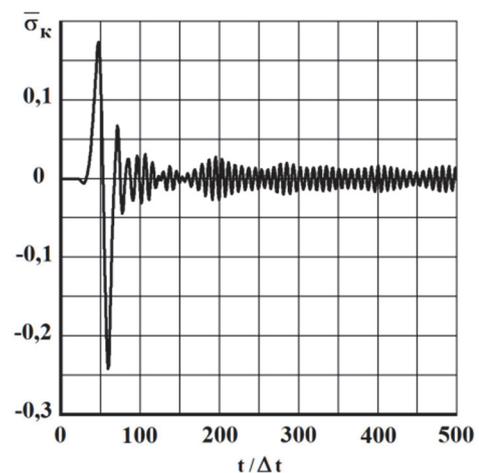


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A2$

Figure 4. The change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at the point $A2$

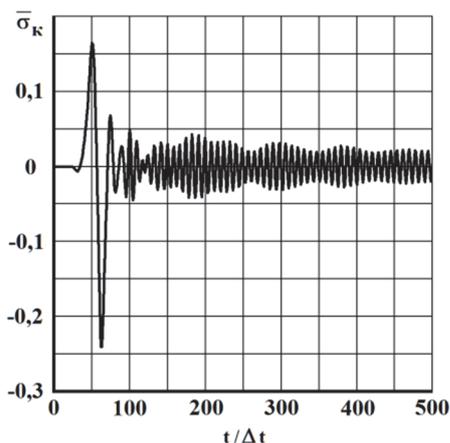


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A3
Figure 5. The change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at the point A3

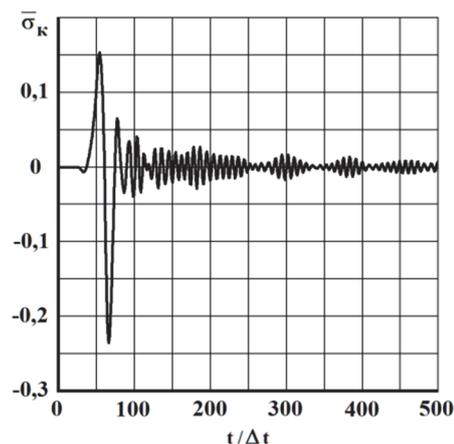


Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A4
Figure 6. The change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at the point A4

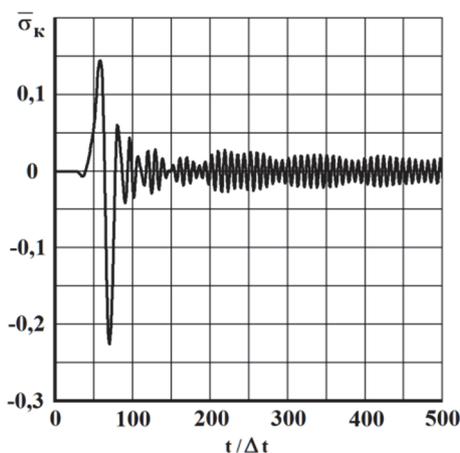


Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A5
Figure 7. The change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at the point A5

Исследуемая расчетная область имеет 12 008 001 узловых точек. Решается система уравнений из 48 032 004 неизвестных.

На рис. 3–7 показано изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k/|\sigma_0|$) во времени n в точках A1–A5 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости (расстояние между точками A1 и A2 равно H , A2 и A3 – H , A3 и A4 – H , A4 и A5 – H , A5 и A6 – H , A6 и A7 – H , A7 и A8 – H , A8 и A9 – H , A9 и A10 – H).

Заключение

На объекты жизнедеятельности человека оказывают влияние сейсмические нагрузки или воздействия. Они создают серьезные проблемы своими разрушительными последствиями. В истории человечества первой теорией сейсмической безопасности была статическая. Потом появилась нацеленная на исследование проблемы резонанса спектральная теория, взявшая за основу одномассовый осциллятор. Обе теории были предложены в начале XX века. Однако, несмотря на имеющиеся теории сейсмической безопасности, здания и сооружения продолжали разрушаться при сейсмических воздействиях. Это было связано с тем, что данные теории несовершенны и не отражают реальный физический процесс волнового воздействия на объекты жизнедеятельности человека. Тогда ученые располагали ограниченным инструментарием для исследования, как в области математического, так и физического мониторинга. Хотя основные уравнения строительной механики (механики деформируемого твердого тела) были получены в XIX веке, их решение в нестационарной волновой постановке в начале XX века оставалось невозмож-

ным. Поэтому предпринимались попытки решения частных уравнений и получения некоторых знаний и закономерностей волнового напряженного состояния. Были получены знания в области продольных, поперечных, конических, релеевских и других волн. До появления электронных вычислительных машин удалось накопить некоторые знания в области переходного периода. Например, было установлено, что при отражении волны сжатия от свободной поверхности конструкции волна сжатия становится растягивающей и тем самым создается ситуация откольных явлений. В конце XX века появились электронные вычислительные машины, которые позволили решать многие задачи строительной механики (механики деформируемого твердого тела) на нестационарные волновые воздействия. Однако переход от дифференциальных уравнений с начальными и граничными условиями к системе с конечным числом неизвестных для волновых процессов оказался непростым. Это связано со многими проблемами, в том числе вычислительными, а также с моделью физических процессов переходного процесса. В настоящее время можно решать волновые задачи, создавая базу знаний как в области фундаментальной, так и прикладной науки, а производная от этих знаний обеспечивает развитие производственной науки, то есть нормативно-правовой базы.

В начале XX века была поставлена задача Лэмба для изучения закономерностей распространения волн напряжений в сплошной деформируемой среде с целью создания базы знаний по сейсмологии и сейсмостойкости геобъектов. Известно, что здания и сооружения разрушаются и для их защиты в эксплуатационный период нужна информация о сейсмических воздействиях. В первую очередь – это знания в области продольных, поперечных и поверхностных волн. Они помогают определить и ранжировать сейсмические воздействия на здания и сооружения. В настоящее время эта информация называется бальностью землетрясений. В зависимости от величины бальности землетрясений применяются разные подходы и методы защиты строительных объектов от сейсмических воздействий. Основным в обеспечении безопасности строительных объектов является оценка несущей способности. Ее можно осуществить при наличии информации о напряженном состоянии. Не зря в методе предельного состояния оценка несущей способности занимает почетное первое место, хотя определение напряжений всегда сложнее, чем перемещений и ее производных по времени.

Дадим некоторую оценку статической и волновой механике грунтов. Если ранжировать по задачам, которые рассмотрены в учебниках по механике грунтов, тогда на первое место смело можно поставить задачу Фламана (пока мы рассматриваем двумерную плоскую задачу). Задача Фламана – это сосредоточенное вертикальное воздействие на свободной поверхности полуплоскости. Она полностью повторяет задачу Лэмба, различие в том, что задача Фламана применима при статическом воздействии, а задача Лэмба – при нестационарном динамическом воздействии. Напрашивается следующий вывод: чем больше мы будем знать о физических результатах при решении задачи Лэмба, тем быстрее нестационарная волновая механика грунтов выделится в научное направление и появится одноименный учебник для студентов и исследователей. Таким образом, можно сказать, что волновая теория сейсмической безопасности находится на заключительном этапе своего формирования.

На основе метода конечных элементов разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных волновых воздействиях на уникальные объекты. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных и поперечных волн и плотность.

Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных для решения задач при волновых воздействиях с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

Решена задача о математическом моделировании нестационарных упругих волн напряжений при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде дельта-функции на поверхности полуплоскости. Исследуемая расчетная область имеет 12 008 001 узловых точек. Решается система уравнений из 48 032 004 неизвестных. Растягивающее упругое контурное напряжение $\bar{\sigma}_k$ имеет максимальное значение $\bar{\sigma}_k = 0,18$. Сжимающее упругое контурное напряжение $\bar{\sigma}_k$ имеет максимальное значение $\bar{\sigma}_k = -0,24$.

Амплитуда поверхностных волн Релея существенно больше амплитуд продольных, поперечных и других волн при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса на поверхности упругой полуплоскости.

После поверхностных волн Релея наблюдается динамический процесс в виде стоячих волн.

Список литературы

1. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностранная литература, 1955. 192 с.
2. Дэвис Р. Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностранная литература, 1961. 104 с.
3. Eringen A.C. Mechanics of continua. New York: John Wiley & Sons, 1967. 502 p.
4. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 420 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
6. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
9. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 308 с.
10. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
11. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
12. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 320 с.
13. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 344 с.
14. Musayev V.K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects // Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. St. Louis: University of Missouri – Rolla, 1991. Pp. 2086–2097.
15. O'Rourke M.J., Liu X. Response of buried pipelines subject to earthquake effects. Buffalo: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER), 1999. 250 p.
16. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. Vol. 8. Issue 1. Pp. 87–95. <http://dx.doi.org/10.1134/S1063771011030109>
17. Nemchinov V.V. Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2013. Vol. 9. Issue 1. Pp. 85–89.
18. Nemchinov V.V. Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2013. Vol. 9. Issue 1. Pp. 90–97.
19. Prasad B.B. Fundamentals of soil dynamics and earthquake engineering. Delhi: PHI Learning, 2013. 556 p.
20. Kuznetsov S.V., Terenteva E.O. Lamb problems: a review and analysis of methods and approaches // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. Vol. 10. Issue 1. Pp. 78–93.
21. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2015. Vol. 11. Issue 1. Pp. 135–146.
22. Дикова Е.В. Достоверность численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. при решении задачи о распространении плоских продольных упругих волн (восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 12–3. С. 354–357.
23. Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В. Моделирование упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 1. С. 36–40.
24. Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В. Моделирование с помощью численного метода Мусаева В.К. нестационарных упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая часть – линейная) в сплошной деформируемой среде // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 1. С. 63–68.
25. Куранцов В.А., Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Самойлов С.Н., Кузнецов М.Е. Моделирование импульса (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – линейная; вторая ветвь: треугольник) в упругой полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 2. С. 51–55.
26. Avershyeva A.V., Kuznetsov S.V. Numerical simulation of Lamb wave propagation isotropic layer // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. Vol. 15. Issue 2. Pp. 14–23.
27. Musayev V.K. Mathematical modeling of non-stationary elastic waves stresses under a concentrated vertical exposure in the form of delta functions on the surface of the half-plane (Lamb problem) // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. Vol. 15. Issue 2. Pp. 111–124.
28. Israilov M.S. Theory of sound barriers: diffraction of plane, cylindrical and spherical waves on a “hard-soft” half plane // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. No. 3. Pp. 412–419.
29. Мусаев В.К. Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений в консоли с основанием (полуплоскость) при фундаментальном сейсмическом воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 477–482. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482>

References

1. Kolskij G. *Volny napryazhenij v tverdyh telah* [Stress waves in solids]. Moscow: Inostrannaya literatura Publ.; 1955. (In Russ.)
2. Dejvis R. *Volny napryazhenij v tverdyh telah* [Stress waves in solids]. Moscow: Inostrannaya literatura Publ.; 1961. (In Russ.)
3. Eringen A.C. *Mechanics of continua*. New York: John Wiley & Sons; 1967.
4. Rihtmajer R., Morton K. *Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach* [Difference methods for solving boundary value problems]. Moscow: Mir Publ.; 1972. (In Russ.)
5. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The finite element method in engineering]. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
6. Potter D. *Vychislitel'nye metody v fizike* [Computational methods in physics]. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
7. Novackij V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
8. Timoshenko S.P., Guder D. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Nauka Publ.; 1975. (In Russ.)
9. Guz A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. *Difrakciya uprugih voln* [Diffraction of elastic waves]. Kiev: Naukova Dumka Publ.; 1978. (In Russ.)
10. Segerlind L. *Primenenie metoda konechnykh elementov* [Application of the finite element method]. Moscow: Mir Publ.; 1979. (In Russ.)
11. Bate K., Wilson E. *Chislennye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical methods of analysis and the finite element method]. Moscow: Strojizdat Publ.; 1982. (In Russ.)
12. Zenkevich O., Morgan K. *Konechnye elementy i approksimaciya* [Finite elements and approximation]. Moscow: Mir Publ.; 1986. (In Russ.)
13. Han X. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir Publ.; 1988. (In Russ.)
14. Musayev V.K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects. *Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. St. Louis: University of Missouri – Rolla; 1991. p. 2086–2097. <https://scholarsmine.mst.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3626&context=icrageesd>
15. O'Rourke M.J., Liu X. Response of buried pipelines subject to earthquake effects. Buffalo: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER); 1999.
16. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012;8(1):87–95. <http://dx.doi.org/10.1134/S1063771011030109>
17. Nemchinov V.V. Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013;9(1):85–89.
18. Nemchinov V.V. Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013;9(1):90–97.
19. Prasad B.B. *Fundamentals of soil dynamics and earthquake engineering*. Delhi: PHI Learning; 2013.
20. Kuznetsov S.V., Terenteva E.O. Lamb problems: a review and analysis of methods and approaches. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014;10(1):78–93.
21. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2015;11(1):135–146.
22. Dikova E.V. Reliability of the numerical method, algorithm and software package of V.K. Musayev in solving the problem of propagation of plane longitudinal elastic waves (ascending part-linear, descending part-quarter of a circle) in a half-plane. *Mezhdunarodnyj Zhurnal Eksperimental'nogo Obrazovaniya*. 2016;(12–3):354–357. (In Russ.)
23. Starodubcev V.V., Akatev S.V., Musaev A.V., Shiyarov S.M., Kurancov O.V. Modeling of elastic waves in the form of a pulsed action (the ascending part is a quarter of a circle, the descending part is a quarter of a circle) in a half-plane using the numerical method of V.K. Musayev. *Problemy Bezopasnosti Rossijskogo Obshchestva*. 2017;(1):36–40. (In Russ.)
24. Starodubcev V.V., Akatev S.V., Musaev A.V., Shiyarov S.M., Kurancov O.V. Simulation using the numerical method of V.K. Musaev of non-stationary elastic waves in the form of a pulsed action (the ascending part is a quarter of a circle, the middle part is horizontal, the descending part is linear) in a continuous deformable medium. *Problemy Bezopasnosti Rossijskogo Obshchestva*. 2017;(1):63–68. (In Russ.)
25. Kurancov V.A., Starodubcev V.V., Musaev A.V., Samojlov S.N., Kuznecov M.E. Simulation of the momentum (first branch: ascending part – quarter circle, descending part – linear; second branch: triangle) in an elastic half-plane using the numerical method of V.K. Musayev. *Problemy Bezopasnosti Rossijskogo Obshchestva*. 2017;(2):51–55. (In Russ.)
26. Avershyeva A.V., Kuznetsov S.V. Numerical simulation of Lamb wave propagation isotropic layer. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019;15(2):14–23. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-2-14-23>
27. Musayev V.K. Mathematical modeling of non-stationary elastic waves stresses under a concentrated vertical exposure in the form of delta functions on the surface of the half-plane (Lamb problem). *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019;15(2):111–124. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-2-111-124>
28. Israilov M.S. Theory of sound barriers: diffraction of plane, cylindrical and spherical waves on a “hard-soft” half plane. *Mechanics of Solids*. 2019;54(3):412–419. <https://doi.org/10.3103/S0025654419020043>
29. Musayev V.K. Mathematical modeling of unsteady elastic stress waves in a console with a base (half-plane) under fundamental seismic action. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):477–482. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482>