2021. 17(2). 99–111

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-2-99-111
УДК 624.073

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Метод компенсирующих нагрузок для решения задач о циклически симметричном изгибе анизотропных пластин, контактирующих с упругим основанием

Е.Б. Коренева

Московское высшее общевойсковое командное орденов Ленина и Октябрьской Революции Краснознаменное училище, Российская Федерация, 109380, Москва, ул. Головачева, д. 2
elena.koreneva2010@yandex.ru

История статьи
Поступила в редакцию: 30 августа 2020 г.
Доработана: 3 февраля 2021 г.
Принята к публикации: 10 марта 2021 г.

Для цитирования
Коренева Е.Б. Метод компенсирующих нагрузок для решения задач о циклически симметричном изгибе анизотропных пластин, контактирующих с упругим основанием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 2. С. 99–111. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-99-111

Аннотация. Цель исследования – построение точных аналитических решений задач статики анизотропных пластин, находящихся под действием циклически симметричных воздействий и лежащих на упругом основании. Для решения поставленных в работе задач используется метод компенсирующих нагрузок, определяются основное и компенсирующие решения. Для нахождения решений используется новый прием, связанный с применением уравнения Нильсена. С помощью метода компенсирующих нагрузок впервые получены точные аналитические решения для задач об анизотропных пластинах, очерченных круговым контуром, лежащих на упругом основании при различных условиях опирания и при действии циклически симметричных нагрузок, распределенных вдоль окружности и по площади кольца. Также рассматривается задача о расчете неограниченной пластины, лежащей на упругом основании и имеющей круговое отверстие. Решения получены в замкнутом виде и выражены в функциях Бесселя.

Ключевые слова: анизотропные пластины, метод компенсирующих нагрузок, упругое основание, функции Бесселя

The method of compensating loads for solving of problems of cyclic symmetrical flexure of anisotropic plates, resting on an elastic subgrade

Elena B. Koreneva

Moscow Higher Combined Arms Military Command School Holding the Order of Lenin, the Order of the October Revolution nd the Order of the Red Banner, 2 Golovacheva St, Moscow, 109380, Russian Federation
elena.koreneva2010@yandex.ru

Article history
Received: August 30, 2020
Revised: February 3, 2021
Accepted: March 10, 2021

Abstract. The purpose of the study – receiving of exact analytical solutions of statics problems of anisotropic plates, resting on an elastic subgrade and subjected to an action of cyclic symmetrical loads. The method of compensating loads is used for solving of the formulated problems. The basic and the compensating

Коренева Елена Борисовна, профессор кафедры общетехнических дисциплин, доктор технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 8804-7930, Scopus Author ID: 6507213365.

Elena B. Koreneva, Professor of the Department of General Engineering Disciplines, Doctor of Technical Sciences; eLIBRARY SPIN-code: 8804-7930, Scopus Author ID: 6507213365.

For citation
Koreneva E.B. The method of compensating loads for solving of problems of cyclic symmetrical flexure of anisotropic plates, resting on an elastic subgrade. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2021;17(2):99–111. (In Russ.) http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-99-111

solutions are determined. The new approach, connected with the use of Nielsen's equation for receiving of the solutions, is applied. For the first time by means of the method of compensating loads the exact analytical solutions of the cycle symmetric flexure of anisotropic circular plates, resting on the elastic subgrade, are received. Various boundary conditions and the loads, distributed along circumferences and over ring surfaces, are considered. The problem of anisotropic infinite plate with the circular opening, resting on the elastic subgrade, is also examined. All the solutions are obtained in the closed form and expressed in terms of Bessel functions.

Keywords: anisotropic plates, method of compensating loads, elastic subgrade, Bessel functions

Введение

Пластины постоянной и переменной толщины, а также оболочки вращения находят широкое применение в различных областях: в строительной технике, машиностроении, авиастроении. В частности, фундаментные плиты и междуэтажные перекрытия сооружений, имеющих в плане круговую форму, представляют собой круглую или кольцевую плиту переменной или постоянной толщины. Среди подобных сооружений следует назвать телевизионные и водонапорные башни, дымовые трубы, цилиндрические резервуары. Подобные задачи возникают в машиностроении при расчете турбинных дисков, лопастей турбомашин, дисковых пружин.

При защите сооружений от нежелательного уровня вибраций употребляются тарельчатые виброизоляторы, основными конструктивными элементами являются круглые, а иногда и прямоугольные пластины переменной толщины и их системы.

Этим вопросам посвящена весьма обширная литература. Назовем, в частности, монографии [1] и [2], в которых отражены многие вопросы теории пластин и оболочек. В [3] рассматривается широкий круг вопросов расчета ортотропных и изотропных пластин различных очертаний при действии сложных нагрузок, применяются точные аналитические методы.

В настоящее время существуют мощные программные комплексы, позволяющие изучать работу подобных конструкций. Широко используются численные методы, в частности метод конечных элементов.

В [4] исследуются вопросы потери устойчивости ортотропных пластин с различными граничными условиями. В [5] изучаются колебания слоистых пластин, в [6] – вопросы вибрации изотропных и ортотропных прямоугольных пластин линейно-переменной толщины.

С помощью численного метода в [7] производится оценка экспериментальных исследований вопросов устойчивости пологих конических оболочек, находящихся под действием внешнего давления.

В [8] рассматриваются свободные колебания лопасти переменной толщины при произвольных граничных условиях. Статья [9] посвящена расчету прямоугольной пластины под действием термомеханической нагрузки. С помощью метода конечных элементов в [10] производится оценка работы лопасти ветровой турбины. Оболочки из наноматериала изучаются в [11]. Вибрации слоистых пластин – в [12].

С помощью приближенного аналитического метода декомпозиции уравнений в [13] исследуются некоторые задачи статики, колебаний и устойчивости тонкостенных конструкций. Точные аналитические решения задач расчета комбинированных пластин кусочно-переменной толщины получены в [14].

Однако многие задачи статики и колебаний анизотропных пластин еще не рассмотрены. В настоящей работе изучается весьма актуальная проблема расчета анизотропных круглых пластин, контактирующих с упругим основанием при действии на них циклически симметричных нагрузок. Для решения поставленной задачи используется метод компенсирующих нагрузок (МКН); строится основное решение, удовлетворяющее разрешающему дифференциальному уравнению, и компенсирующее решение, которое в сумме с основным решением удовлетворяет также граничным условиям. Изучается действие разрывных нагрузок и различные условия закрепления. Получено решение задачи об анизотропной неограниченной пластине с круговым отверстием.

Разрешающее дифференциальное уравнение задачи о круглой пластине из анизотропного материала, в отличие от случая изотропной пластины, не распадается на два взаимно сопряженных дифференциальных уравнения второго порядка, каждое из которых интегрируется в функциях Бесселя. Ниже используется другой прием, связанный с получением решения в цилиндрических функциях. Вводится в рассмотрение уравнение Нильсена, позволяющее получить интеграл определенного дифференциального уравнения четвертого порядка в цилиндрических функциях.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о циклически симметричном изгибе круглой анизотропной пластины, лежащей на упругом основании. В этом случае деформации в пластине изменяются по законам $\cos k\,\theta$ или $\sin k\,\theta$, $(k = 2,3,\ldots)$. Подобный изгиб вызывается самоуравновешенной контурной и поверхностной нагрузкой вида

$$Q(\theta) = Q_k \cos k\,\theta,\; M(\theta) = M_k \cos k\,\theta, \tag{1}$$

$$q(r,\theta) = q_1(r)\cos k\,\theta,\; (k = 2, 3, 4,\ \ldots), \tag{2}$$

где $Q(\theta)$ и $M(\theta)$ – интенсивность контурной поперечной силы и контурного изгибающего момента; $q(r,\theta)$ – интенсивность распределенных по поверхности поперечных сил; Q_k, M_k – постоянные величины; $q_1(r)$ – функция только переменной r.

Циклически симметричный изгиб может возникнуть, когда на фундаментную плиту нагрузка сверху передается через равноотстоящие опоры.

Приведем дифференциальное уравнение, описывающее циклически симметричную деформацию круглой анизотропной пластины, лежащей на упругом основании, свойства которого описываются моделью Винклера. Положим, что материал пластины обладает цилиндрической анизотропией и является ортотропным. При внешней нагрузке, определяемой выражением (2), имеем [3]

$$D\left\{\frac{\partial^4 W}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial r^3} - \frac{n^2}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{n^2}{r^3}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{2(c_1+\sigma)}{r^2}\frac{\partial^4 W}{\partial r^2 \partial\theta^2} - \frac{2(c_1+\sigma)}{r^3}\frac{\partial^3 W}{\partial r \partial\theta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(c_1+\sigma+n^2)}{r^4}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} + \frac{n^2}{r^4}\frac{\partial^4 W}{\partial\theta^4}\right\} + k_1 W = q(r,\theta), \tag{3}$$

здесь D – цилиндрическая жесткость; σ – коэффициент Пуассона; k_1 – коэффициент постели; параметр $n^2 = n_1 n_2$ определяется из соотношений [3], [15].

$$E_r = \frac{E}{n_2},\; E_\theta = E n_2,\; \sigma_r = \frac{\sigma}{n^2},\; \sigma_\theta = \sigma; \tag{4}$$

$$c_1 = 2(n^2 - \sigma^2)G_{r\theta}/E n_2.$$

Будем разыскивать решение однородного уравнения, соответствующего (3), в виде

$$W(r,\theta) = w(r)\cos k\,\theta. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3) и приводя подобные члены, получим

$$Dn_2\left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{n^2+2(c_1+\sigma)k^2}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{n^2+2(c_1+\sigma)k^2}{r^3}\frac{dw}{dr} + \frac{n^2k^4-2(c_1+\sigma+n^2)k^2}{r^4} w\right) + k_1 w = 0. \tag{6}$$

В результате ряда преобразований получим следующее разрешающее уравнение:

$$r^4\frac{d^4 w}{dr^4} + 2r^3\frac{d^3 w}{dr^3} - (n^2 + 2(c_1+\sigma)k^2) \times r^2\frac{d^2 w}{dr^2} + (n^2 + 2(c_1+\sigma)k^2) r\frac{dw}{dr} +$$

$$+ k^2(n^2k^2 - 2(c_1 + \sigma + n^2))w + \frac{k_1 r^4}{Dn_2} w = 0. \tag{7}$$

Приведем выражения для изгибающих и крутящих моментов, а также поперечных сил для круглой ортотропной пластины [16]:

$$M_r = -Dn_2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)\right), \tag{8}$$

$$M_\theta = -Dn_2\left(\sigma\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + n^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)\right), \tag{9}$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -Dn_2 c * \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right), \tag{10}$$

$$Q_r = -n_2\left[D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{n^2}{r^2}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{(\sigma + c*)}{r^2}\frac{\partial^3 W}{\partial r\,\partial\theta^2} - \frac{\sigma + c* + n^2}{r^3}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right] + \frac{dD}{dr}\left[r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \sigma\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right]\right], \tag{11}$$

$$Q_\theta = -Dn_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(c * + \sigma)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{n^2}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta} + \frac{n^2}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right] - \frac{\partial D}{\partial r}n_2 c * \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right), \tag{12}$$

где $c * = c_1 n_2$.

Определим решение дифференциального уравнения (7). Как было указано выше, в отличие от случаев, рассмотренных ранее в литературе, для решения задач о пластинах, сделанных из изотропного материала и лежащих на упругом винклеровском основании при действии неосесимметричных нагрузок [9], разрешающее уравнение не распадается на два сопряженных уравнения второго порядка, каждое из которых интегрируется в функциях Бесселя. В работе используется новый прием: коэффициенты разрешающего дифференциального уравнения (7) будем сопоставлять с коэффициентами уравнения Нильсена, которое имеет вид [16; 17]

$$r^4\frac{d^4 w}{dr^4} + A_3 r^3\frac{d^3 w}{dr^3} + A_2 r^2\frac{d^2 w}{dr^2} + A_1 r\frac{dw}{dr} + A_0 w = 0, \tag{13}$$

здесь

$$A_3 = 6 - 4a - 4c,$$

$$A_2 = 2(a^2 - \mu^2 c^2) + 4(a + c - 1)^2 + 4(a - 1)\times(c - 1) - 1,$$

$$A_1 = [2(\mu^2 c^2 - a^2) - (2a - 1)(2c - 1)](2a + 2c - 1),$$

$$A_0 = (a^2 - \mu^2 c^2)(a^2 + 4ac + 4c^2 - \mu^2 c^2) - b^4 c^4 r^{4c}.$$

Как известно, уравнение Нильсена интегрируется в функциях Бесселя [18–20]. В результате сопоставления коэффициентов (7) и (13) имеем

$$\left.\begin{aligned}
&6 - 4a - 4c = 2,\\
&2(a^2 - \mu^2 c^2) + 4(a + c - 1)^2 + 4(a - 1)\times(c - 1) - 1 = -n^2 - 2(c_1 + \sigma)k^2,\\
&2(\mu^2 c^2 - a^2) - (2a - 1)(2c - 1)\times(2a + 2c - 1) = n^2 + 2(c_1 + \sigma)k^2,\\
&(a^2 - \mu^2 c^2)(a^2 + 4ac + 4c^2 - \mu^2 c^2) - b^4 c^4 r^{4c} = k^2(n^2 k^2 - 2(c_1 + \sigma + n^2)) + \frac{k_1}{Dn_2}r^4;
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

отсюда получим следующие значения параметров, при которых решения задачи получаются в цилиндрических функциях:

$$\mathrm{c} = 1,\ b = \sqrt[4]{\frac{k_1}{Dn_2}}\,i^{1/2}; \tag{15}$$

$a = 0$; $\mu = 0$ или $\mu = \pm 2$.

Приведем решение однородного уравнения (7), доставляемое функциями Бесселя. В зависимости от значения параметра μ эти решения можно записать следующим образом:

– при $\mu = 0$

$$w = \left(C_1 J_0(br) + C_2 Y_0(br) + C_3 I_0(br) + C_4 K_0(br)\right)\cos k\,\theta; \tag{16}$$

– при $\mu = \pm 2$

$$w = (B_1 u_\mu(br) + B_2 \upsilon_\mu(br) + B_3 f_\mu(br) + B_4 g_\mu(br))\cos k\,\theta. \tag{17}$$

Далее, используя формулы (8)–(12), определим усилия.

Метод компенсирующих нагрузок

Основное решение

Для решения поставленной задачи применим метод компенсирующих нагрузок. Рассмотрим действие различных циклически симметричных нагрузок и ряд условий закрепления контура. Также изучим задачу о расчете неограниченной анизотропной пластины с круговым отверстием при неосесимметричной нагрузке. Для использования МКН требуется построить основное и компенсирующее решения. Основным назовем такое решение, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению и одновременно имеет необходимые особенности, которые соответствуют внешней нагрузке, действующей на пластину. В большинстве случаев основное решение может рассматриваться как решение задачи о неограниченной в плане пластине. Однако основное решение не может удовлетворять граничным условиям, если рассматривается задача о пластине, которая ограничена тем или иным контуром. Компенсирующее решение вводится для того, чтобы вместе с основным решением удовлетворять упомянутым граничным условиям [21–23].

Введем безразмерную координату $x = br$. При загружении ортотропной пластины сосредоточенной силой P основное решение имеет вид

$$w_0 = \frac{P}{4Dn_2 b^2} f_0(x). \tag{18}$$

Приведенное выше выражение является основной функцией влияния при $P = 1$. Для отдельных частных задач можно получать основные решения, интегрируя (18).

Рассмотрим анизотропную неограниченную пластину, находящуюся под действием сил $q\cos k\,\theta$, равномерно распределенных по окружности, концентрической контуру, с приведенным радиусом α.

Запишем выражение для прогиба в точке с координатами x, ϕ, пользуясь принципом сложения воздействий:

$$w = \frac{q\alpha}{4Dn_2 b^3} \times \int_0^{2\pi} f_0\left(\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x\cos(\theta - \phi)}\right)\cos k\,\theta d\theta. \tag{19}$$

Для вычисления вышеприведенного интеграла (19) воспользуемся формулой сложения функций Бесселя:

$$Z_0\left(\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x\cos(\theta - \phi)}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}{}' J_\mu(\alpha) Z_\mu(x)\cos k\,(\theta - \phi), \tag{20}$$

здесь знак ' символизирует то, что при $k = 0$ вводится коэффициент $1/2$.

Указанная формула справедлива при $\alpha < x$; если $\alpha > x$, то в правой части (20) α и x меняются местами. Положим

$$Z_0 = H_0^{(1)}\left(\sqrt{i}\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x\cos(\theta - \phi)}\right).$$

Производя интегрирование и отделяя действительную и мнимую части, получим:

– при $x \le \alpha$

$$w_0 = w_I = \frac{\pi\alpha q}{2Dn_2 b^3}\left[u_\mu(x) f_\mu(\alpha) - \upsilon_\mu(x) g_\mu(\alpha)\right]\cos k\,\theta; \tag{21}$$

– при $x \geq \alpha$

$$w_0 = w_{\mathrm{II}} = \frac{\pi\alpha q}{2Dn_2b^3}\left[u_\mu(\alpha)f_\mu(x) - \upsilon_\mu(\alpha)g_\mu(x)\right]\cos k\,\theta. \tag{22}$$

При использовании вронскиана уравнения Бесселя можно показать, что полученные выше решения (21), (22) при $x = \alpha$ удовлетворяют условиям сопряжения участков.

Решим задачу об анизотропной неограниченной пластине, загруженной по закону

$$\psi(x)\cos k\,\theta,$$

где $\psi(x)$ – заданная функция.

Для этого потребуется интегрировать выражения (21) и (22).

Пусть на изучаемую пластину действует нагрузка q, распределенная по окружности, приведенный радиус которой равен α. Разложим указанную нагрузку в ряд Фурье:

$$q = \sum(a_k\cos k\,\theta + b_k\sin k\,\theta).$$

Учитывая (21) и (22), получим следующие выражения:

– при $\alpha \leq x$

$$w_0 = \frac{\pi\alpha}{2Dn_2b^3}\times\left\{\sum a_k\left[u_\mu(\alpha)f_\mu(x) - \upsilon_\mu(\alpha)g_\mu(x)\right]\sin k\,\phi + \sum b_k\left[u_\mu(\alpha)f_\mu(x) - \upsilon_\mu(\alpha)g_\mu(x)\right]\cos k\,\phi\right\}; \tag{23}$$

– при $\alpha \geq x$

$$w_0 = \frac{\pi\alpha}{2Dn_2b^3}\times\left\{\sum a_k\left[u_\mu(x)f_\mu(\alpha) - v_\mu(x)g_\mu(\alpha)\right]\sin k\,\phi + \sum b_k\left[u_\mu(x)f_\mu(\alpha) - v_\mu(x)g_\mu(\alpha)\right]\cos k\,\phi\right\}. \tag{24}$$

Далее построим основное решение для случая нагрузки, изменяющейся по закону

$$q = F(x,\theta). \tag{25}$$

Для этого будем использовать формулы (23) и (24). Представим нагрузку (25) в виде ряда

$$q = \sum\psi_k(x)\,[a_k\cos k\,\theta + b_k\sin k\,\theta]. \tag{26}$$

В случае, если внешняя нагрузка может быть представлена в виде формулы

$$q = \sum x^k\,(a_k\cos k\,\theta + b_k\sin k\,\theta) \tag{27}$$

или

$$q = \sum x^{-k}\,(a_k\cos k\,\theta + b_k\sin k\,\theta), \tag{28}$$

процесс интегрирования заметно упрощается.

Приведем формулы дифференцирования функций Бесселя:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dz}[z^kJ_k(z)] = z^kJ_{k-1}(z),\\&\frac{d}{dz}\left[z^kH_k^{(1)}(z)\right] = z^kH_{k-1}^{(1)}(z).\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Положим $z = x\sqrt{i}$. Произведем интегрирование; отделим действительную и мнимую части, получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&\int x^k\, u_{k-1}(x)dx = \frac{x^k}{\sqrt{2}}[u_k(x) + \upsilon_k(x)],\\
&\int x^k\, \upsilon_{k-1}(x)dx = -\frac{x^k}{\sqrt{2}}[u_k(x) - \upsilon_k(x)],\\
&\int x^k\, f_{k-1}(x)dx = \frac{x^k}{\sqrt{2}}[f_k(x) + g_k(x)],\\
&\int x^k\, g_{k-1}(x)dx = -\frac{x^k}{\sqrt{2}}[f_k(x) - g_k(x)].
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Рассмотрим действие на неограниченную анизотропную пластину нагрузки, распределенной по площади кругового кольца с внутренним радиусом α_1 и наружным α_2, $\alpha_1 \le x \le \alpha_2$, и изменяющейся по закону (27). Решение можно получить, интегрируя выражения (21) и (22). С этой целью в этих выражениях предварительно заменим нагрузку q элементарной нагрузкой $q_0\alpha^k dz = q_0\frac{\alpha^k}{b}d\alpha$. При этом появится множитель $\frac{1}{b^4Dn_2}$, равный $\frac{1}{k_1}$. Затем произведем интегрирование указанных выражений в пределах от $\alpha = \alpha_1$ до $\alpha = \alpha_2$.

Запишем решение при $x \le \alpha_1 < \alpha_2$:

$$w = \frac{\pi q_0}{2k_1\sqrt{2}}\left(\left\{\alpha_2^{k+1}[f_{k+1}(\alpha_2) + g_{k+1}(\alpha_2)] - \alpha_1^{k+1}[f_{k+1}(\alpha_1) + g_{k+1}(\alpha_1)]\right\}u_k(x) + \right.$$

$$\left. + \left\{\alpha_2^{k+1}[f_{k+1}(\alpha_2) - g_{k+1}(\alpha_2)] - \alpha_1^{k+1}[f_{k+1}(\alpha_1) - g_{k+1}(\alpha_1)]\right\}\upsilon_k(x)\right)\cos k\,\phi; \quad (31)$$

– при $x > \alpha_2 > \alpha_1$ имеем

$$w = \frac{\pi q_0}{2k_1\sqrt{2}}\left(\left\{\alpha_2^{k+1}[u_{k+1}(\alpha_2) + \upsilon_{k+1}(\alpha_2)] - \alpha_1^{k+1}[u_{k+1}(\alpha_1) + \upsilon_{k+1}(\alpha_1)]\right\}f_k(x) + \right.$$

$$\left. + \left\{\alpha_2^{k+1}[u_{k+1}(\alpha_2) - \upsilon_{k+1}(\alpha_2)] - \alpha_2^{k+1} \times [u_{k+1}(\alpha_1) - \upsilon_{k+1}(\alpha_1)]\right\}g_k(x)\right)\cos k\,\phi; \quad (32)$$

– при $\alpha_2 \ge x \ge \alpha_1$ решение принимает вид

$$w = \frac{\pi q_0}{2k_1\sqrt{2}}\left\{\alpha_2^{k+1}[f_{k+1}(\alpha_2) + g_{k+1}(\alpha_2)]u_k(x) + \alpha_2^{k+1}[f_{k+1}(\alpha_2) - g_{k+1}(\alpha_2)] \times \right.$$

$$\left. \times\, \upsilon_k(x) - \alpha_1^{k+1}[u_{k+1}(\alpha_1) + \upsilon_{k+1}(\alpha_1)]f_k(x) - \alpha_1^{k+1}[u_{k+1}(\alpha_1) - \upsilon_{k+1}(\alpha_1)]g_k(x) + 2x^k\frac{\sqrt{x}}{\pi}\right\}\cos k\,\phi. \quad (33)$$

Приведенные выше формулы (31)–(33) дают выражения прогибов для k-го члена ряда (27). Следует отметить имеющий практическое значение случай, когда $k = 1$. Подобное имеет место при расчете фундаментных плит на действие горизонтальных нагрузок.

Компенсирующее решение

Далее перейдем к рассмотрению анизотропной пластины, лежащей на упругом основании, ограниченной круговым контуром с различными условиями закрепления. Компенсирующее решение представим как результат действия двух компенсирующих нагрузок q_1 и q_2. Эти нагрузки действуют по концентрическим окружностям с приведенными радиусами α_1 и α_2. Обозначим через β приведенный радиус внешнего контура. Компенсирующее решение может интерпретироваться как результат действия некоторой системы сил, которая приложена к пластине бесконечного радиуса.

Будем решать задачу для различных условий закрепления контура. Также изучим задачу о неограниченной анизотропной пластине с круговым отверстием.

Сначала рассмотрим круглую анизотропную пластину, лежащую на упругом винклеровском основании, защемленную по всему контуру. Представим взятые из основного решения при $x = \beta$ прогиб w_0 и угол наклона нормали к контуру $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ в виде

$$w_0 = \sum(A_k \sin k\,\phi + B_k \cos k\,\phi), \tag{34}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \sum(C_k \sin k\,\phi + D_k \cos k\,\phi). \tag{35}$$

Далее определим компенсирующие нагрузки q_1 и q_2, которые на контуре пластины в сумме с основным решением должны удовлетворять условиям заделки. Указанное требование приводит к решению системы уравнений

$$\alpha_1 \int_0^{2\pi} q_1(\theta) f_0\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \beta^2 - 2\alpha_1\beta\cos(\theta - \phi)}\right) d\theta + \alpha_2 \int_0^{2\pi} q_2(\theta) f_0\left(\sqrt{\alpha_2^2 + \beta^2 - 2\alpha_2\beta\cos(\theta - \phi)}\right) d\theta +$$

$$+4Db^3 w_0 = 0; \tag{36}$$

$$\alpha_1 \int_0^{2\pi} q_1(\theta) \frac{\partial}{\partial\beta} f_0\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \beta^2 - 2\alpha_1\beta\cos(\theta - \phi)}\right) d\theta + \alpha_2 \int_0^{2\pi} q_2(\theta) \frac{\partial}{\partial\beta} f_0\left(\sqrt{\alpha_2^2 + \beta^2 - 2\alpha_2\beta\cos(\theta - \phi)}\right) d\theta +$$

$$+4Db^2 \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0. \tag{37}$$

Формулы (36) и (37) отражают равенство нулю прогибов и углов поворота на контуре пластины.

Для решения этих интегральных уравнений следует разложить функции q_1 и q_2 в тригонометрические ряды, использовать формулы сложения цилиндрических функций, выполнить интегрирование. Тогда уравнения (36) и (37) перейдут в систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов этих рядов. Эта система уравнений здесь не приводится.

Компенсирующее решение при $x < \alpha_1$ можно представить в виде

$$w_k = \sum_{k=0}^{\infty}[(a_k \sin k\,\phi + b_k \cos k\,\phi)\, u_k(x) + (c_k \sin k\,\phi + d_k \cos k\,\phi)\upsilon_k(x)]. \tag{38}$$

Определим коэффициенты ряда (38), используя выражения (36) и (37); в результате получим следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_k u_k(\beta) + c_k \upsilon_k(\beta) + A_k = 0,\\ &a_k u_k'(\beta) + c_k \upsilon_k'(\beta) + C_k \tfrac{1}{b} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned} &b_k u_k(\beta) + d_k \upsilon_k(\beta) + B_k = 0,\\ &b_k u_k'(\beta) + d_k \upsilon_k'(\beta) + D_k \tfrac{1}{b} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

В приведенных выше системах первое и второе уравнения связаны с условиями для прогиба и угла поворота на контуре соответственно.

В результате решения указанных систем получим

$$a_k = -\frac{C_k \frac{1}{b}\upsilon_k(\beta) - A_k \upsilon_k'(\beta)}{\upsilon_k(\beta)u_k'(\beta) - u_k(\beta)\upsilon_k'(\beta)}, \tag{41}$$

$$b_k = -\frac{D_k \frac{1}{b}\upsilon_k(\beta) - B_k \upsilon_k'(\beta)}{\upsilon_k(\beta)u_k'(\beta) - u_k(\beta)\upsilon_k'(\beta)}, \tag{42}$$

$$c_k = \frac{C_k \frac{1}{b}u_k(\beta) - A_k u_k'(\beta)}{\upsilon_k(\beta)u_k'(\beta) - u_k(\beta)\upsilon_k'(\beta)}, \tag{43}$$

$$d_k = \frac{D_k \frac{1}{b}u_k(\beta) - B_k u_k'(\beta)}{\upsilon_k(\beta)u_k'(\beta) - u_k(\beta)\upsilon_k'(\beta)}. \tag{44}$$

Для получения компенсирующего решения внесем формулы (41)–(44) в (38). В результате получим

$$w_k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\upsilon_k(\beta)u_k'(\beta) - u_k(\beta)\upsilon_k'(\beta)} \Big(\Big\{ \Big[C_k \frac{1}{b} \upsilon_k(\beta) - A_k \upsilon_k'(\beta) \Big] \sin k\,\phi +$$

$$+ \Big[D_k \frac{1}{b} \upsilon_k(\beta) - B_k \upsilon_k'(\beta) \Big] \cos k\,\phi \Big\} u_k(x) - \Big\{ \Big[C_k \frac{1}{b} u_k(\beta) - A_k u_k'(\beta) \Big] \sin k\,\phi +$$

$$+ \Big[D_k \frac{1}{b} u_k(\beta) - B_k u_k{}'(\beta) \Big] \cos k\,\phi \Big\} \upsilon_k(x) \Big). \tag{45}$$

Указанным способом можно построить компенсирующие решения для других условий закрепления изучаемых анизотропных пластин на упругом основании. Рассмотрим случай шарнирного опирания по всему контуру.

Для того чтобы найти решение поставленной задачи, следует разложить в ряд значения на контуре прогибов и изгибающих моментов, взятых из основного решения. Прогибы будем раскладывать в ряд, пользуясь формулой (34); радиальные изгибающие моменты на контуре могут быть представлены с помощью формулы

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (M_k \sin k\,\phi + L_k \cos k\,\phi). \tag{46}$$

Компенсирующее решение в данном случае будет представлено в виде ряда; его коэффициенты определяются из систем уравнений

$$-a_k \Big[\upsilon_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} u_k{}'(\beta) + (1-\sigma) \tfrac{k^2}{\beta^2} u_k(\beta) \Big] - c_k \Big[-u_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} \upsilon_k{}'(\beta) + (1-\sigma) \tfrac{k^2}{\beta^2} \upsilon_k(\beta) \Big] + \tfrac{1}{b^2 D} M_k = 0, \tag{47}$$

$$a_k u_k(\beta) + c_k \upsilon_k(\beta) + A_k = 0, \tag{48}$$

$$-b_k \Big\{ \upsilon_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} u_k{}'(\beta) + (1-\sigma) \tfrac{k^2}{\beta^2} u_k(\beta) \Big\} - d_k \Big\{ -u_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} \upsilon_k{}'(\beta) + (1-\sigma) \tfrac{k^2}{\beta^2} \upsilon_k(\beta) \Big\} + \tfrac{1}{b^2 D} L_k = 0, \tag{49}$$

$$b_k u_k(\beta) + d_k \upsilon_k(\beta) + B_k = 0. \tag{50}$$

Вышеприведенные уравнения получаются в результате приравнивания к нулю суммы прогибов и суммы радиальных изгибающих моментов на контуре для основного и компенсирующего решений соответственно.

Введем для краткости следующие обозначения:

$$u_k^{(M)}(\beta) = -u_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} \Big[\upsilon_k{}'(\beta) - \tfrac{k^2}{\beta} \upsilon_k(\beta) \Big], \tag{51}$$

$$\upsilon_k^{(M)}(\beta) = \upsilon_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} \Big[u_k{}'(\beta) - \tfrac{k^2}{\beta} u_k(\beta) \Big], \tag{52}$$

$$f_k^{(M)}(\beta) = -f_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} \Big[g_k{}'(\beta) - \tfrac{k^2}{\beta} g_k(\beta) \Big], \tag{53}$$

$$g_k^{(M)}(\beta) = g_k(\beta) - \tfrac{1-\sigma}{\beta} \Big[f_k{}'(\beta) - \tfrac{k^2}{\beta} f_k(\beta) \Big]. \tag{54}$$

Далее внесем полученные значения коэффициентов в ряд (38). Получим следующее выражение для компенсирующего решения:

$$w_k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u_k(\beta)u_k^{(M)}(\beta) - \upsilon_k(\beta)\upsilon_k^{(M)}(\beta)} \times \left(\left\{\left[M_k \frac{1}{b^2 D}\upsilon_k(\beta) + A_k u_k^{(M)}(\beta)\right]\sin k\,\phi + \right.\right.$$

$$\left. + \left[L_k \frac{1}{b^2 D}\upsilon_k(\beta) + B_k u_k^{(M)}(\beta)\right]\cos k\,\phi\right\} u_k(x) - \left\{\left[M_k \frac{1}{b^2 D} u_k(\beta) + A_k \upsilon_k^{(M)}(\beta)\right]\sin k\,\phi + \right.$$

$$\left.\left. + \left[L_k \tfrac{1}{b^2 D} u_k(\beta) + B_k \upsilon_k^{(M)}(\beta)\right]\cos k\,\phi\right\}\upsilon_k(x)\right). \tag{55}$$

Найдем компенсирующее решение для случая анизотропной круглой пластины со свободным краем. В этом случае, как известно, изгибающий момент и приведенная поперечная сила обращаются на контуре в нуль.

Значение приведенной поперечной силы на контуре, взятое из основного решения, разложим в ряд:

$$Q_1 - \tfrac{dH_1}{dS} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(N_k \sin k\,\phi + Q_k \cos k\,\phi). \tag{56}$$

Пусть изгибающие моменты даны рядом (46).

Уравнения для определения коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k составляются аналогично тому, как это было выполнено в предыдущих примерах.

Введем следующие обозначения:

$$u_k^{[Q]}(\beta) = -u_k{}'(\beta) - (1-\sigma)\tfrac{k^2}{\beta^2}\left[\upsilon_k{}'(\beta) - \tfrac{\upsilon_k(\beta)}{\beta}\right], \tag{57}$$

$$\upsilon_k^{[Q]}(\beta) = \upsilon_k{}'(\beta) - (1-\sigma)\tfrac{k^2}{\beta^2}\left[u_k{}'(\beta) - \tfrac{u_k(\beta)}{\beta}\right], \tag{58}$$

$$f_k^{[Q]}(\beta) = -f_k{}'(\beta) - (1-\sigma)\tfrac{k^2}{\beta^2}\left[g_k{}'(\beta) - \tfrac{g_k(\beta)}{\beta}\right], \tag{59}$$

$$g_k^{[Q]}(\beta) = g_k{}'(\beta) - (1-\sigma)\tfrac{k^2}{\beta^2}\left[f_k{}'(\beta) - \tfrac{f_k(\beta)}{\beta}\right]. \tag{60}$$

Решая системы уравнений для определения коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k, внесем полученные результаты в ряд (38). Учитывая обозначения (57)–(60), после ряда преобразований получим компенсирующее решение в виде

$$w_k = -\frac{1}{b^2 D}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u_k^{[Q]}(\beta)\upsilon_k^{[M]}(\beta) - u_k^{[M]}(\beta)\upsilon_k^{[Q]}(\beta)} \times \left\{\left(\left[\frac{1}{b} N_k u_k^{[M]}(\beta) - M_k u_k^{[Q]}(\beta)\right]\sin k\,\phi + \right.\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{b} Q_k u_k^{[M]}(\beta) - L_k \upsilon_k^{[Q]}(\beta)\right]\cos k\,\phi\right) u_k(x) - \left(\left[\frac{1}{b} N_k u_k^{[M]}(\beta) - M_k \upsilon_k^{[Q]}(\beta)\right]\sin k\,\phi + \right.$$

$$\left.\left. + \left[\tfrac{1}{b} Q_k \upsilon_k^{[M]}(\beta) - L_k \upsilon_k^{[Q]}(\beta)\right]\cos k\,\phi\right)\upsilon_k(x)\right\}. \tag{61}$$

С помощью МКН получим решение задачи об анизотропной неограниченной пластине, лежащей на упругом винклеровском основании, с круговым отверстием при произвольной нагрузке. Искомый результат может быть представлен в виде суммы основного и компенсирующего решений. Основное решение получено выше. Соответствующее компенсирующее решение представим выражением

$$w_k = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}[(a_k{}'\sin k\,\phi + b_k{}'\cos k\,\phi)\, f_k(x) + (c_k{}'\sin k\,\phi + d_k{}'\cos k\,\phi) g_k(x)]. \tag{62}$$

Примем, что начало координат находится в центре отверстия. В компенсирующее решение будут входить только конечные значения функций $f(x)$ и $g(x)$ и их производных, поскольку точка $x = 0$, в которой названные функции имеют особенности, не входит в изучаемую область.

Для определения компенсирующего решения следует в формулах, полученных выше, всюду заменить функции u и υ на f и g. Приведем компенсирующее решение для случая анизотропной неограниченной пластины со свободным круговым отверстием:

$$w_k = -\frac{1}{b^2 D}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{f_k^{[Q]}(\beta)g_k^{[M]}(\beta) - f_k^{[M]}(\beta)g_k^{[Q]}(\beta)} \times$$

$$\times \left\{ f_k(x)\left(\left[\frac{1}{b}N_k f_k^{[M]}(\beta) - M_k f_k^{[Q]}(\beta)\right]\sin k\,\phi + \left[\frac{1}{b}Q_k f_k^{[M]}(\beta) - L_k f_k^{[Q]}(\beta)\right]\cos k\,\phi\right) - \right.$$

$$\left. - g_k(x)\left(\left[\frac{1}{b}N_k g_k^{[M]}(\beta) - M_k g_k^{[Q]}(\beta)\right]\sin k\,\phi + \left[\frac{1}{b}Q_k g_k^{[M]}(\beta) - L_k g_k^{[Q]}(\beta)\right]\cos k\,\phi\right)\right\}. \quad (63)$$

Метод компенсирующих нагрузок можно также применить для расчета анизотропной пластины на упругом основании, ограниченной двумя концентрическими окружностями. В этом случае компенсирующее решение следует представить в виде ряда, коэффициенты которого определяются из уравнений, соответствующих существующим граничным условиям. Тогда каждая система будет состоять из четырех уравнений, которые здесь не выписываются.

Заключение

Впервые получены точные аналитические решения задач об анизотропных пластинах, контактирующих с упругим основанием, при действии на них циклически симметричных нагрузок. Решения выражены в функциях Бесселя. Для интегрирования разрешающего дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами применяется новый прием, связанный с использованием уравнения Нильсена. К решению поставленной задачи применяется метод компенсирующих нагрузок. Получено основное решение, удовлетворяющее исходному уравнению. Производится учет действия разрывных нагрузок, распределенных по концентрическим окружностям и по площадям колец. Определяется компенсирующее решение, которое в сумме с основным удовлетворяет граничным условиям. Рассматриваются различные условия закрепления контура. В цилиндрических функциях получено решение об анизотропной неограниченной пластине с круговым отверстием.

Список литературы

1. *Коваленко А.Д.* Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1976. 703 с.

2. *Коренев Б.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 458 с.

3. *Коренева Е.Б.* Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. М.: Изд-во АСВ, 2009. 240 с.

4. *Bank L.C., Yin J.* Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges // Thin-Walled Structures. 1996. Vol. 24. Pp. 83–96.

5. *Chen W.Q., Lüe C.F.* 3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported // Composite Structures. 2005. Vol. 69. Pp. 77–87.

6. *Civalek Ö.* Fundamental frequency of isotropic and orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness by discrete singular convolution method // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol. 33. Pp. 3825–3835. https://doi:10.1016/j.apm.2008.12.019

7. *Karasev Al., Varianychko M., Bessmertnyi Ya., Krasovsky V., Karasev G.* Numerical analysis on experimental research on buckling of closed shallow conical shells under external pressure // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2020. Vol. 58. Issue 1. Pp. 117–126. https://doi.org/10.15632/jtam-pl/115321

8. *Li C., Cheng H.* Free vibration analysis of a rotating varying-thickness-twisted blade with arbitrary boundary conditions // Journal of Sound and Vibration. 2020. Vol. 492. Article 115791. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115791

9. *Khakpour Komarsofla M., Jedari Salami S., Shakeri M., Khakpour Komarsofla A.* Optimization of three-dimensional up to yield bending behaviour using the full layer-wise theory for FGM rectangular plate subjected to thermo-mechanical loads // Compos. Struct. 2021. Vol. 257. 113172. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113172

10. *VanSkike W.P., Hale R.D.* Comparative assessment of finite element modelling techniques for wind turbine rotors blades // AIAA Scitech 2020 Forum. Session: Wind Turbine Modeling. 2020. https://doi.org/10.2514/6.2020-0990

11. *Sarafraz A., Sahmani S., Aghdam M.M.* Nonlinear primary resonance analysis of nanoshells including vibrational mode interaction based on the surface elasticity theory // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. 2020. Vol. 41. Pp. 233–260. https://doi.org/10.1007/s10483-020-2564-5

12. *Javed S., Al Mukahal F.H.H., El Sayed S.B.A.* Geometrical influence on the vibration of layered plates // Hindawi. Shock and Vibration. 2021. Vol. 3. Pp. 1–17. https://doi.org/10.1155/2021/8843358

13. *Koreneva E.B., Grosman V.R.* Equation decomposition method for solving of problems of statics, vibration and stability of thin-walled constructions // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16. No. 2. Pp. 63–70.

14. *Koreneva E.B., Grosman V.R.* The problems of computation of combined plates with piecewise variable thickness. Solutions in orthogonal polynomials // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16. No. 3. Pp. 30–34.

15. *Бурмистров Е.Ф.* Симметричная деформация ортотропных оболочек вращения. Саратов.: Изд-во Саратовского университета, 1962. 109 с.

16. *Коренева Е.Б.* Метод компенсирующих нагрузок для решения задач об анизотропных средах // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. 1. Pp. 71–77.

17. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

18. *Abramovitz M., Stigan I.A.* Handbook of mathematical functions. 10th ed. National Bureau of Standards, 1972. 820 p.

19. *Коренева Е.Б., Гросман В.Р.* Аналитическое решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины переменной толщины, лежащей на упругом основании // Вестник МГСУ. 2011. № 8. С. 156–159.

20. *Гросман В.Р.* Собственные колебания круглых ортотропных пластин переменной толщины. Решения в функциях Бесселя // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3. С. 52–54.

21. *Коренева Е.Б.* Аналитический метод решения задач о колебаниях упругих анизотропных тел // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 5. С. 47–51.

22. *Коренева Е.Б.* Аналитическое моделирование некоторых задач статики и колебаний анизотропных тел // VII International Symposium APCSCE, 1–8 July 2018. Novosibirsk, 2018. P. 478.

23. *Koreneva E.B., Grosman V.R.* Forced vibrations of anisotropic elastic solids subjected to an action of complicated loads // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. Vol. 15. No. 3. Pp. 77–83.

References

1. Kovalenko A.D. *Selected memoirs*. Kiev: Naukova Dumka Publ.; 1976. (In Russ.)

2. Korenev B.G. *Some problems of the theory of elasticity and heat conductivity, solved in terms of Bessel functions*. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1960. (In Russ.)

3. Koreneva E.B. *Analytical methods for calculation of plates with varying thickness and their practical application*. Moscow: ASV Publ.; 2009. (In Russ.)

4. Bank L.C., Yin J. Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges. *Thin-Walled Structures*. 1996;24:83–96.

5. Chen W.Q., Lüe C.F. 3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported. *Composite Structures.* 2005;69:77–87.

6. Civalek Ö. Fundamental frequency of isotropic and orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness by discrete singular convolution method. *Applied Mathematical Modelling.* 2009;33:3825–3835. https://doi:10.1016/j.apm.2008.12.019

7. Karasev Al., Varianychko M., Bessmertnyi Ya., Krasovsky V., Karasev G. Numerical analysis on experimental research on buckling of closed shallow conical shells under external pressure. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* 2020;58(1):117–126. https://doi.org/10.15632/jtam-pl/115321

8. Li C., Cheng H. Free vibration analysis of a rotating varying-thickness-twisted blade with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 2020;492:115791. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115791

9. Khakpour Komarsofla M., Jedari Salami S, Shakeri M., Khakpour Komarsofla A. Optimization of three-dimensional up to yield bending behaviour using the full layer-wise theory for FGM rectangular plate subjected to thermo-mechanical loads. *Compos. Struct.* 2021;257(1):113172. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113172

10. Vanskike W.P., Hale R.D. Comparative assessment of finite element modelling techniques for wind turbine rotors blades. *AIAA Scitech 2020 Forum. Session: Wind Turbine Modeling.* 2020. https://doi.org/10.2514/6.2020-0990

11. Sarafraz A., Sahmani S., Aghdam M.M. Nonlinear primary resonance analysis of nanoshells including vibrational mode interaction based on the surface elasticity theory. *Math. Mech.-Engl. Ed.* 2020;41:233–260. https://doi.org/10.1007/s10483-020-2564-5

12. Javed S., Al Mukahal F.H.H., El Sayed S.B.A. Geometrical influence on the vibration of layered plates. *Hindawi. Shock and Vibration.* 2021;(3):1–17. https://doi.org/10.1155/2021/8843358

13. Koreneva E.B., Grosman V.R. Equation decomposition method for solving of problems of statics, vibration and stability of thin-walled constructions. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020;16(2):63–70.

14. Koreneva E.B., Grosman V.R. The problems of computation of combined plates with piecewise variable thickness. Solutions in orthogonal polynomials. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020;16(3):30–34.

15. Burmistrov E.F. *The simmetrical deformation of orthotropic shells of rotation*. Saratov: Izd-vo Saratovskogo Universiteta Publ.; 1962. (In Russ.)

16. Koreneva E.B. Method of compensating loads for solving of anisotropic medium problems. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018;14(1):71–77. (In Russ.)

17. Kamke E. *The Handbook for ordinary differential equations*. Moscow: Nauka Publ.; 1965. (In Russ.)

18. Abramovitz M., Stigan I.A. *Handbook of mathematical functions.* 10^{th} ed. National Bureau of Standards; 1972.

19. Koreneva E.B., Grosman V.R. Analytical solution of the flexure of circular orthotropic plate of variable thickness, resting on an elastic subgrade. *Vestnik MGSU*. 2011;8:156–159. (In Russ.)

20. Grosman V.R. Natural vibrations of circular orthotropic plates of variable thickness. The solutions in terms of Bessel functions. *Stroitelnaya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*. 2012;(3):52–54. (In Russ.)

21. Koreneva E.B. The analytical method of oscillation problems of elastic anisotropic solids. *Stroitelnaya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*. 2018;(5):47–51. (In Russ.)

22. Koreneva E.B. The analytical simulation of the certain problems of statics and oscillations of anisotropic solids. VII International Symposium APCSCE. 1–8 July 2018. Novosibirsk; 2018. p. 478. (In Russ.)

23. Koreneva E.B., Grosman V.R. Forced vibrations of anisotropic elastic solids subjected to an action of complicated loads. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019;15(3):77–83.