

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62
УДК 69:624.074:624.012.4

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Анализ напряженного состояния оболочки одинакового ската при действии равномерно распределенной касательной нагрузки различными методами

О.О. Алёшина^{1*}, В.Н. Иванов¹, Д. Кахамарка-Сунига²

¹Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

²Католический университет г. Куэнка, Республика Эквадор, 010101, Куэнка, Av. De las Americas & Humboldt

*xiaofeng@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 17 октября 2020 г.

Доработана: 17 января 2021 г.

Принята к публикации: 4 февраля 2021 г.

Аннотация. На сегодняшний день существуют различные методы расчета для решения широкого спектра задач в строительстве, гидродинамике, теплопроводности, космических исследованиях и других отраслях. Для проектирования и возведения разнообразных тонкостенных конструкций типа оболочек применяются аналитические методы, составляющие один класс для решения задач, и численные методы расчета, составляющие другой класс, в том числе реализованные в вычислительных комплексах. В связи с тем, что тонкостенные пространственные конструкции в форме разнообразных оболочек широко используются во многих сферах деятельности человека, полезно понимать и знать возможности различных методов расчета. Работы по исследованию напряженно-деформированного состояния торсовой оболочки одинакового ската с эллипсом в основании представлены на данный момент в малом объеме. В статье впервые приводится вывод дифференциальных уравнений равновесия безмоментной теории оболочек для определения нормального усилия N_u от действия равномерно распределенной нагрузки, направленной по касательной вдоль прямолинейных образующих к срединной поверхности торса одинакового ската с направляющим эллипсом. Также получены параметры напряженного состояния исследуемого торса методом конечных элементов и вариационно-разностным методом. Используются вычислительный комплекс SCAD Office на основе метода конечных элементов и программа SHELLVRM, написанная на базе вариационно-разностного метода. Выполнен анализ числовых результатов параметров напряженного состояния исследуемого торса, установлены плюсы и минусы применения аналитического метода и двух численных методов расчета.

Ключевые слова: теория тонких оболочек, аналитическое решение, безмоментное состояние, торсовая оболочка, поверхность одинакового ската, метод конечных элементов, вариационно-разностный метод, вычислительный комплекс SCAD Office, система Mathcad

Для цитирования

Алёшина О.О., Иванов В.Н., Кахамарка-Сунига Д. Анализ напряженного состояния оболочки одинакового ската при действии равномерно распределенной касательной нагрузки различными методами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 51–62. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>

Алёшина Ольга Олеговна, преподаватель-исследователь, ассистент департамента строительства Инженерной академии; eLIBRARY SPIN-код: 8550-4986.

Иванов Вячеслав Николаевич, профессор департамента строительства Инженерной академии, доктор технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, Scopus Author ID: 57193384761, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4023-156X>.

Кахамарка-Сунига Давид, доцент инженерного факультета; eLIBRARY SPIN-код: 6178-4383, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8796-4635>, WoS ResearcherID: AAO-8887-2020.

© Алёшина О.О., Иванов В.Н., Кахамарка-Сунига Д., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods

Olga O. Aleshina^{1*}, Vyacheslav N. Ivanov¹, David Cajamarca-Zuniga²

¹Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

²Catholic University of Cuenca, Av. De las Americas & Humboldt, Cuenca, 010101, Republic of Ecuador

*xiaofeng@yandex.ru

Article history

Received: October 7, 2020

Revised: January 17, 2021

Accepted: February 4, 2021

Abstract. Nowadays there are various calculation methods for solving a wide range of problems in construction, hydrodynamics, thermal conductivity, aerospace research and many other areas of industry. Analytical methods that make up one class for solving problems, and numerical calculation methods that make up another class, including those implemented in computing complexes, are used for the design and construction of various thin-walled structures such as shells. Due to the fact that thin-walled spatial structures in the form of various shells are widely used in many areas of human activity it is useful to understand and know the capabilities of different calculation methods. Research works on the study of the stress-strain state of the torse shell of equal slope with an ellipse at the base are not widely available at the moment. For the first time the derivation of the differential equations of equilibrium of momentless theory of shells to determine the normal force N_n from the action of uniformly distributed load tangentially directed along rectilinear generatrices to the middle surface of the torse of equal slope with a directrix ellipse is presented in this article. The parameters of the stress state of the studied torse are also obtained by the finite element method and the variational-difference method. The SCAD software based on the finite element method and the program SHELLVRM written on the basis of the variational-difference method are used. The numerical results of the parameters of the stress state of the studied torse are analyzed, and the advantages and disadvantages of the analytical method and two numerical calculation methods are determined.

Keywords: thin shell theory, analytical method, momentless state, torse shell, surface of equal slope, finite element method, variational-difference method, SCAD Office computing system, Mathcad system

For citation

Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):51–62. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>

Введение

Для проектирования разнообразных инженерных сооружений используются различные методы расчета, такие как аналитические, численные и численно-аналитические. На практике для получения общих параметров напряженно-деформированного состояния пространственных сооружений инженеры используют автоматизированные численные методы расчета, поскольку аналитические методы расчета достаточно сложны и трудоемки.

Самым распространенным численным методом расчета является метод конечных элементов (МКЭ). Изначально МКЭ в более простой форме использовался для решения математических задач. Дальнейшее развитие МКЭ и появление автоматизированных программных комплексов, основанных на данном методе, таких как SIMULIA (www.3ds.com), ANSYS (www.ansys.com), SAP2000 (www.csiamerica.com), SCAD (www.scadsoft.com), PROKON (www.prokon.com) и другие, позволили решать широкий спектр задач космических исследований, моделировать и учитывать динамические нагрузки, решать различные вопросы теплопроводности, гидродинамики, строительства и многих других отраслей.

Идея дискретизации, на которой основан МКЭ, очень стара. До 1922 года Курант использовал идеи конечных элементов в принципе Дирихле (Dirichlet), дальнейший период 1962–1972 годов известен как золотой век МКЭ [1]. Существует пять групп работ (Курант, Аргирис, Тернер и соавт., Клаф и Зенкевич),

Olga O. Aleshina, teacher-researcher, assistant of the Department of Civil Engineering of the Academy of Engineering; eLIBRARY SPIN-code: 8550-4986.

Vyacheslav N. Ivanov, Professor of the Department of Civil Engineering of the Academy of Engineering, Doctor of Technical Sciences; eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909, Scopus Author ID: 57193384761, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4023-156X>.

David Cajamarca-Zuniga, Docent of the Department of Civil Engineering; eLIBRARY SPIN-code: 6178-4383, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8796-4635>, WoS ResearcherID: AAO-8887-2020.

в которых отражено развитие МКЭ, в одной из них и возникло название метода [2]. Клаф ввел термин «конечные элементы», Тернер усовершенствовал метод прямой жесткости, а работы Хьюза, Бате и Зенкевича [3] заложили основу для дальнейшего развития МКЭ [1]. В работе [4] предложена методика расчета изгибаемых пластин методом конечных элементов в напряжениях, выполнено сравнение с результатами метода конечных элементов в перемещениях. Рассмотрено решение плоских задач теории упругости на основе аппроксимации напряжений, выполнены расчеты консольной балки и пластины с отверстием при различных сетках конечных элементов и проведено сравнение с решениями по методу конечных элементов в перемещениях и точными решениями из работы [5]. Специальный выпуск, включающий 35 статей, посвящен исследованиям в области разработки и применения МКЭ [6].

Конечно-разностный энергетический метод (КРЭМ) [7–10], или так называемый вариационно-разностный метод (ВРМ) [9–14], также относится к численным методам расчета [15; 16]. Данный метод расчета учитывает геометрические характеристики срединной поверхности плит и оболочек, что позволяет более точно представлять напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций сложной геометрии. ВРМ (КРЭМ) основан на идее, выдвинутой Курантом в 1943 году [9; 17; 18]. Работу продолжил Хоуболт в 1958 году [8], выполнив статический анализ балок и пластин, комбинируя конечно-разностный аналог производных с вариационной формулировкой [19]. Далее Гриффин и Варга [20] в 1963 году вводят конечную разность в вариационную формулировку деформационной совместности и граничных условий для анализа плоских задач упругости [19]. Бушнелл в 1973 году, Браш и Алмрот [21] в 1975 году расширили подход для анализа конструкций других типов [22].

Успешное применение ВРМ во многом зависит от того, насколько хорошо система базовых функций позволяет получить качественные характеристики решения. Следовательно, можно ожидать, что для эффективного решения этих вариационных задач потребуются численные схемы, отличные от традиционных методов, основанных на непрерывных приближениях [23].

В департаменте строительства Инженерной академии Российского университета дружбы народов доктор технических наук, профессор В.Н. Иванов совместно со своими аспирантами (в настоящее время кандидатами технических наук) разработал программу SHELLVRM на базе вариационно-разностного метода (ВРМ). В разработке программы принимали участие Наср Юнес Ахмед Аббуши (Палестина), Ризван Муххамад (Пакистан), Бок Хьенг Кристиан Ален (Камерун), Говинд Прасад Ламичхане (Непал). Данная программа позволяет определять напряженно-деформированное состояние пластин и различных типов оболочек с ортогональной координатной системой срединной поверхности оболочек, средние поверхности которых описываются аналитическими уравнениями. В программу включены следующие классы оболочек: пологие оболочки на прямоугольных и криволинейных планах, оболочки вращения, оболочки в форме каналовой поверхности Иоахимстала, в форме поверхностей Монжа, нормальных циклических поверхностей. В программу включена система плоских кривых, на базе которых формируются отсеки классов поверхностей и вычисляются коэффициенты квадратичных форм. Основы ВРМ и текст программы для расчетов пластин приведены в [15].

Аналитические методы расчета применяются для пространственных конструкций в форме разнообразных поверхностей [24]. Аналитические методы расчета достаточно сложны и трудоемки. В энциклопедии [25] описано более 600 аналитических поверхностей. Геометрия поверхностей и автоматизированные возможности их построения рассматриваются в монографии [26].

Среди широкого разнообразия аналитических поверхностей торсовые оболочки одинакового ската обладают способностью разворачиваться на плоскость без складок и разрывов [27], также этот тип оболочек широко используется во многих областях промышленности и производства [28–31].

Данная статья является частью серии научных работ, посвященных изучению геометрии и напряженно-деформированного состояния торсовых оболочек одинакового ската с эллипсом в основании при различных нагружениях. Авторами были выполнены расчеты данной оболочки при действии линейной нагрузки на верхнем торце торса и при действии собственного веса материала оболочки [32; 33], а также с различным закреплением базового эллипса [34]. В работах [35; 36] предложена конструкция навеса в виде торса одинакового ската и получены новые результаты в области геометрических исследований. В настоящей статье рассматривается равномерно распределенная нагрузка вдоль прямолинейных образующих торса. Выбор типа нагрузки обусловлен возможностями безмоментной теории (БТ) оболочек. Главной задачей является нахождение аналитического решения и определение параметров напряженного состояния рассматриваемого торса указанным методом расчета с последующим сравнением с результатами двух численных методов (метода конечных элементов и вариационно-разностного метода).

Поверхность одинакового ската является линейчатой поверхностью, которая образуется прямой, движущейся в нормальной плоскости плоской направляющей кривой с постоянным углом наклона к плоскости направляющей кривой. Если взять эллипс в качестве плоской направляющей кривой, то прямые линии равного наклона к плоскости эллипса будут образовывать торсовую поверхность одинакового ската (рис. 1). Поверхности одинакового ската являются поверхностями нулевой гауссовой кривизны ($K = 0$). В работах [37; 38] описаны основные свойства данных поверхностей. Поверхность одинакового ската относится также к классу резных поверхностей Монжа [24; 27].

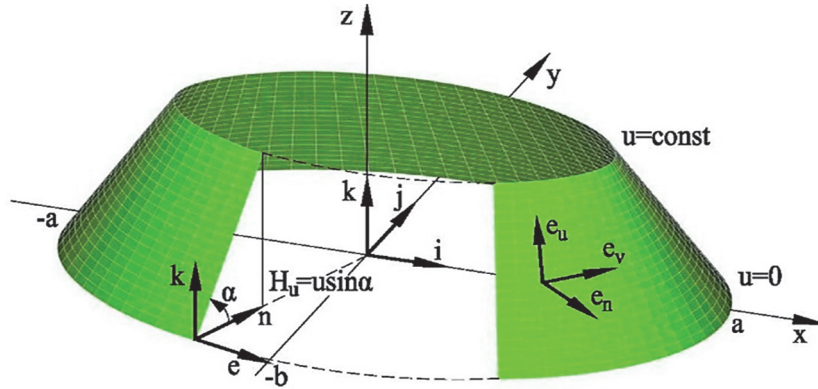


Рис. 1. Торсовая оболочка одинакового ската с эллипсом в основании

Направляющий эллипс может быть задан параметрическими уравнениями [27]:

$$x = x(v) = a \cos v, \quad y = y(v) = b \sin v, \quad (1)$$

где a, b – размеры полуосей направляющего эллипса в основании торса, параметр v в пределах $0 \leq v \leq 2\pi$.

Параметрическая форма задания поверхности торса с направляющим эллипсом (1) будет [27]:

$$x = x(u, v) = a \cos v - \frac{ub \cos \alpha \cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}};$$

$$y = y(u, v) = b \sin v - \frac{ua \cos \alpha \sin v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}};$$

$$z = z(u) = u \sin \alpha. \quad (2)$$

Семейство линий u – прямолинейные образующие торсовой поверхности одинакового ската, при этом координатная линия $u = 0$ совпадает с эллипсом в основании, α – угол между главной нормалью $\mathbf{n} = -\mathbf{e} \times \mathbf{k}$, направленной внутрь направляющего эллипса, и прямой образующей u (рис. 1).

Коэффициенты основных квадратичных форм данной поверхности и ее главные кривизны [27]:

$$A = 1; \quad B = \mu^{1/2} - u \frac{\beta}{\mu}; \quad F = 0; \quad L = M = 0; \quad N = B \frac{ab \sin \alpha}{\mu};$$

$$k_1 = k_u = 0; \quad k_2 = k_v = \frac{ab \sin \alpha}{B\mu}, \quad (3)$$

где $\mu = \mu(v) = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v$, $\beta = ab \cos \alpha$.

Рассмотрим применение трех различных методов расчета, таких как безмоментная теория расчета оболочек, метод конечных элементов и вариационно-разностного метод, на примере тонкой торсовой оболочки

одинакового ската с эллипсом в основании при действии равномерно распределенной нагрузки $q = 1 \text{ кН/м}^2$, направленной по касательной вдоль прямолинейных образующих u к срединной поверхности торса (рис. 2). Таким образом, внешняя поверхностная нагрузка будет $X = -q$, $Y = Z = 0$. Геометрические параметры торса $a = 3 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$, длина прямолинейных образующих $u = 2 \text{ м}$. Граничные условия в уровне направляющего эллипса ($u = 0 \text{ м}$) – шарнирно-подвижное опирание, при $u = 2 \text{ м}$ – свободный край.

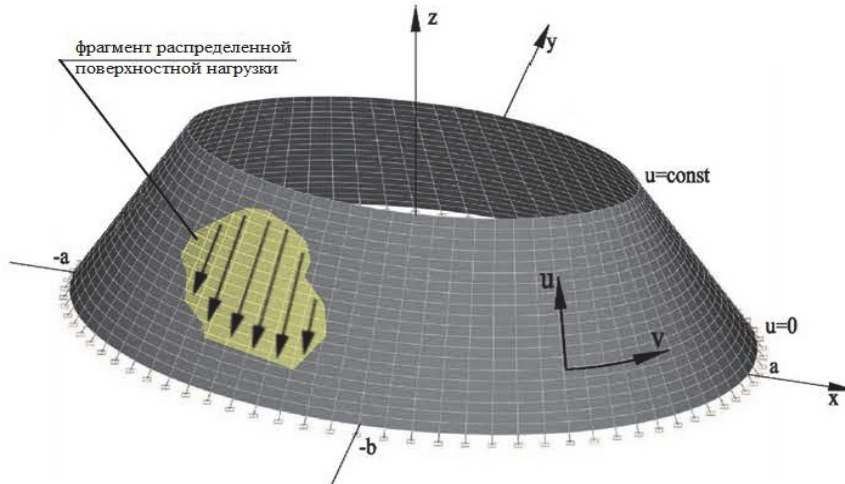


Рис. 2. Торс под действием внешней распределенной поверхностной нагрузки

Для определения параметров напряженного состояния рассматриваемого торса используются безмоментная теория расчета оболочек [24; 27], комплекс SCAD Office, основанный на методе конечных элементов, и программа SHELLVRM на базе вариационно-разностного метода [15; 16].

Дифференциальные уравнения равновесия безмоментной теории получаются из общих уравнений равновесия моментной теории оболочек [24; 27].

Дифференциальные уравнения равновесия безмоментной торсовой оболочки

Безмоментная теория является упрощенным вариантом общей теории расчета тонких упругих оболочек, в которой пренебрегают влиянием поперечных сил и моментов. При этом возможность существования безмоментного напряженного состояния оболочки зависит от ряда условий [24; 27]. Оболочка должна иметь форму плавно изменяющейся непрерывной поверхности, нагрузка на оболочку должна быть также непрерывной и плавной, а закрепление краев позволять оболочке свободно перемещаться в направлении нормали к срединной поверхности, углы поворота на краях оболочки не должны быть стеснены.

Получим дифференциальные уравнения равновесия для определения нормального усилия при действии равномерно распределенной нагрузки, действующей в направлении касательной вдоль прямолинейных образующих к срединной поверхности рассматриваемого торса.

Общие дифференциальные уравнения равновесия безмоментной теории имеют вид [24; 27]

$$\frac{\partial}{\partial u} (BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u} N_v + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial v} (A^2 S) + ABX = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (AN_v) - \frac{\partial A}{\partial v} N_u + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} (B^2 S) + ABY = 0;$$

$$\frac{N_v}{R_v} + \frac{N_u}{R_u} - Z = 0. \quad (4)$$

Для рассматриваемого варианта приложения нагрузки (рис. 2) получаем $X = -q$ и $Y = Z = 0$. Дифференциальные уравнения равновесия (4) с учетом выражений (3) преобразуются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u}N_v + \frac{\partial S}{\partial v} + XB &= 0; \\ \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u}(B^2S) &= 0; \\ \frac{N_v}{R_v} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (5) имеет второй порядок. Для ее решения достаточно иметь одно граничное условие в каждой точке контура торсовой оболочки. Таким образом, на торце оболочки при $u = 2$ м усилие $N_u = 0$. Более того, из второго и третьего уравнений системы (5) усилия $N_v = 0$ и $S = 0$.

Интегрируя первое уравнение системы (5), получаем выражение для определения значений нормальной силы N_u вдоль прямолинейных образующих u :

$$N_u = \frac{1}{B(u, v)} \left[\int qB(u, v) du + X_1(v) \right], \quad (6)$$

где $X_1(v)$ – произвольная функция интегрирования.

Выполним интегрирование (6):

$$\int B(u, v) du = u\mu^{1/2} - \frac{u^2\beta}{2\mu} = \frac{u}{2}(B(u, v) + \mu^{1/2}) = \frac{\mu}{2\beta}(\mu - B^2(u, v)). \quad (7)$$

Для того чтобы выполнялось граничное условие $N_u = 0$ на торце при $u = \eta = 2$ м, произвольная функция интегрирования $X_1(v)$ в (7) должна быть равна

$$X_1(v) = -q \left(\eta\mu^{1/2} - \frac{\eta^2\beta}{2\mu} \right). \quad (8)$$

Уравнение (6) для вычисления значений нормальных сил N_u вдоль прямолинейных образующих с учетом значения произвольной функции интегрирования $X_1(v)$ (8) принимает вид

$$N_u = \frac{q}{B(u, v)} \left[\mu^{1/2}(u - \eta) - \frac{\beta}{2\mu}(u^2 - \eta^2) \right]. \quad (9)$$

Для нахождения численных результатов нормальных сил N_u (9) используем приложение Mathcad.

Численные методы исследования напряженного состояния оболочки

Исследование напряженного состояния торса одинакового ската выполняется методом конечных элементов и вариационно-разностным методом. Первый расчет проводится в вычислительном комплексе SCAD Office. Вид расчетной модели при аппроксимации срединной поверхности совокупностью четырехугольных плоских элементов показан на рис. 2. Максимальное расстояние между узлами конечных элементов расчетной модели 0,228 м. Количество конечных элементов – 1680, узлов – 1760.

Для реализации шарнирно-подвижных опор, что является необходимым условием безмоментной работы торса, в программе SCAD добавлены стержневые элементы с шарнирами (рис. 3). Введение шарниров в данных опорных стержневых элементах освобождает линейные перемещения торсовой оболочки в направлении нормали к срединной поверхности (рис. 3, направление z_1), угловые перемещения по касательной к поверхности (рис. 3, направление y_1) и по нормали к поверхности оболочек (рис. 3, направление x_1), а также угловые перемещения в направлении прямолинейных образующих u (рис. 3, направление x_1).

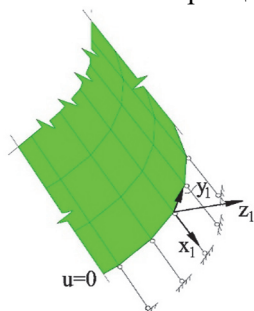


Рис. 3. Реализация безмоментного состояния в SCAD Office

Второй расчет выполняется в программе SHELLVRM, основанной на базе вариационно-разностного метода. Расчетная сетка аналогична сетке в МКЭ. В данном расчете также учтены и реализованы все необходимые условия безмоментного состояния оболочки. Расчет делается для отсека 1/4 торсовой оболочки с учетом двух плоскостей симметрии.

Результаты и обсуждение

Сравнение полученных результатов аналитического расчета с результатами численных методов (методом конечных элементов и вариационно-разностным методом) выполняется по 11 сечениям (рис. 4).

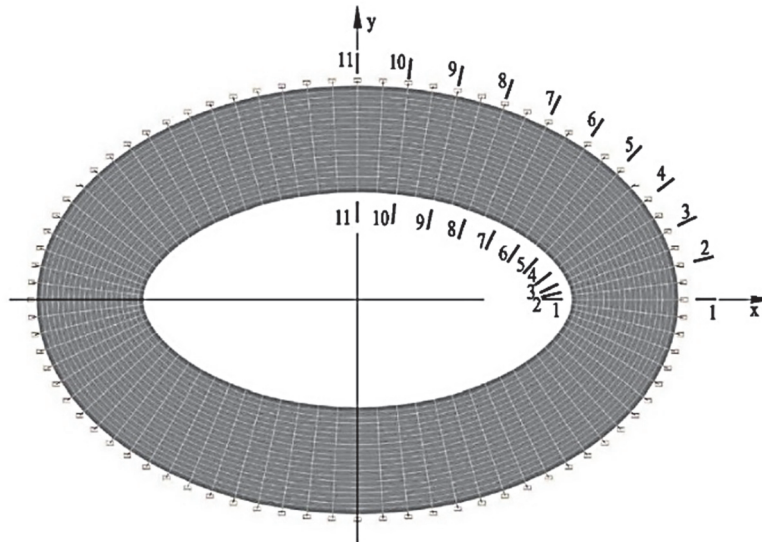


Рис. 4. Сечения торса для сравнения результатов

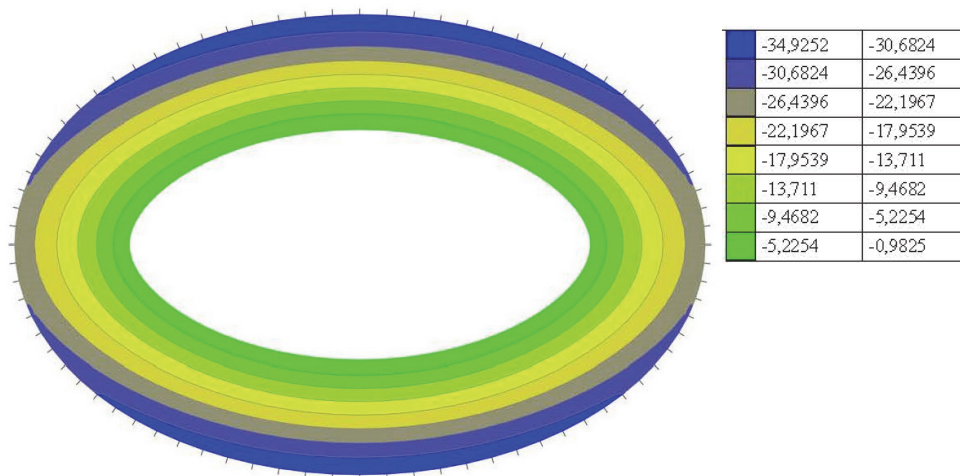


Рис. 5. Нормальное напряжение $\sigma(N_u)$ в МКЭ, кН/м²

Максимальные отклонения аналитических результатов нормальной силы N_u вдоль прямолинейных образующих от результатов двух численных методов в сечении 1–1 составляют 7,4 % (табл. 1), в сечении 2–2 – 5,0 %, в сечении 3–3 – 1,9 %, в сечении 4–4 – 3,7 %, в сечении 5–5 – 4,1 % (табл. 2), в сечении 6–6 – 3,6 %, в сечении 7–7 – 2,8 %, в сечении 8–8 – 2,2 %, в сечении 9–9 – 2,0 %, в сечении 10–10 – 1,9 %, а в сечении 11–11 – 1,9 % (табл. 3). В узлах с координатами $u = 2,00$ м в МКЭ и ВРМ значения отличны от нуля при сравнении с БТ.

Для понимания общей картины напряженного состояния (НДС) торсовой оболочки при действии равномерно распределенной нагрузки q , направленной по касательной к срединной поверхности торса, на рис. 5 показано распределение изополей нормального напряжения $\sigma(N_u)$, полученных в программном комплексе SCAD Office.

Таблица 1

Численные результаты расчетов нормальной силы N_u : сечение 1–1

Координата по оси U , м	N_u , БТ, сечение 1–1, кН/м	N_u , МКЭ, сечение 1–1, кН/м	Отклонение, БТ и МКЭ, сечение 1–1, %	N_u , ВРМ, сечение 1–1, кН/м	Отклонение, БТ и ВРМ, сечение 1–1, %
0,000	-1,2500	-1,2438	0,50	-1,2980	3,70
0,200	-1,1432	-1,1906	3,98	-1,1920	4,09
0,400	-1,0353	-1,0841	4,50	-1,0860	4,67
0,600	-0,9258	-0,9757	5,11	-0,9767	5,21
0,800	-0,8143	-0,8640	5,75	-0,8645	5,81
1,000	-0,7000	-0,7477	6,39	-0,7480	6,42
1,200	-0,5818	-0,6253	6,96	-0,6255	6,99
1,400	-0,4579	-0,4942	7,35	-0,4944	7,38
1,600	-0,3250	-0,3503	7,22	-0,3504	7,25
1,800	-0,1769	-0,1871	5,45	-0,1870	5,40
2,000	0,0000	-0,0563	–	-0,0002	–

Таблица 2

Численные результаты расчетов нормальной силы N_u : сечение 5–5

Координата по оси U , м	N_u , БТ, сечение 5–5, кН/м	N_u , МКЭ, сечение 5–5, кН/м	Отклонение, БТ и МКЭ, сечение 5–5, %	N_u , ВРМ, сечение 5–5, кН/м	Отклонение, БТ и ВРМ, сечение 5–5, %
0,000	-1,5623	-1,5004	4,12	-1,5340	1,84
0,200	-1,4292	-1,4004	2,06	-1,4010	2,01
0,400	-1,2930	-1,2647	2,23	-1,2650	2,21
0,600	-1,1531	-1,1262	2,39	-1,1270	2,32
0,800	-1,0090	-0,9840	2,54	-0,9842	2,52
1,000	-0,8599	-0,8375	2,68	-0,8376	2,66
1,200	-0,7050	-0,6859	2,78	-0,6860	2,77
1,400	-0,5432	-0,5284	2,80	-0,5285	2,78
1,600	-0,3731	-0,3637	2,58	-0,3638	2,56
1,800	-0,1928	-0,1892	1,88	-0,1899	1,53
2,000	0,0000	-0,0572	–	-0,0002	–

Таблица 3

Численные результаты расчетов нормальной силы N_u : сечение 11–11

Координата по оси U , м	N_u , БТ, сечение 11–11, кН/м	N_u , МКЭ, сечение 11–11, кН/м	Отклонение, БТ и МКЭ, сечение 11–11, %	N_u , ВРМ, сечение 11–11, кН/м	Отклонение, БТ и ВРМ, сечение 11–11, %
0,000	-1,7778	-1,7439	1,95	-1,7870	0,51
0,200	-1,6159	-1,6240	0,50	-1,6240	0,50
0,400	-1,4512	-1,4585	0,50	-1,4590	0,53
0,600	-1,2833	-1,2899	0,51	-1,2900	0,52
0,800	-1,1122	-1,1178	0,50	-1,1180	0,52
1,000	-0,9375	-0,9420	0,47	-0,9420	0,48
1,200	-0,7590	-0,7622	0,42	-0,7622	0,42
1,400	-0,5763	-0,5783	0,35	-0,5784	0,36
1,600	-0,3892	-0,3901	0,23	-0,3902	0,26
1,800	-0,1972	-0,1973	0,07	-0,1974	0,10
2,000	0,0000	-0,0553	–	0,0000	–

Сравнение полученных численных результатов нормальной силы N_u тремя различными методами расчета показывает хорошее схождение. Концентрация наибольших отклонений численных значений нормальной силы N_u безмоментной теории от ВРМ и МКЭ находится в области оболочки с наибольшим изменением радиуса кривизны вдоль криволинейных направляющих, то есть в верхних узлах сечений 1–1 и 2–2 (рис. 4). Данные расхождения связаны с одним из условий использования безмоментной теории, а именно необходимостью плавного изменения геометрии срединной поверхности оболочки.

По правилам сопротивления материалов численные значения нормальной силы N_u при действии равномерно распределенной нагрузки, направленной по касательной к срединной поверхности в узлах всех сечений, при координате $u = 2,00$ м должны быть $N_u = 0$. Однако значения нормальной силы N_u в МКЭ и ВРМ отличны от нуля, при этом результаты ВРМ более точны по сравнению с МКЭ. Как известно, точность результатов расчетов с помощью МКЭ и ВРМ зависит от правильного выбора размера конечных элементов (сетки). Более того, в работе [15] отмечается, что сравнение результатов расчетов ВРМ и МКЭ при одинаковых сетках показывает близкую точность, а в ряде случаев ВРМ дает даже большую точность результатов.

МКЭ и ВРМ позволяют получить численные значения также для нормальных сил N_v вдоль криволинейных направляющих, изгибающие моменты M_u, M_v , касательные силы S и поперечные силы Q_u, Q_v . Значения нормальной силы N_v в ВРМ от $-0,0246$ до $0,0148$ кН/м, в МКЭ от $-0,0490$ до $0,0216$ кН/м. Значения поперечных сил Q_u, Q_v колеблются от $-0,01$ до $0,01$ кН/м. Значения касательных сил S в МКЭ в интервале от $-0,0354$ до $0,0354$ кН/м, в ВРМ от $-0,0162$ до $0,0067$ кН/м. Значения изгибающего момента M_u в ВРМ от $-0,0261$ до $0,4244$ Н·м/м, в МКЭ от $-0,1143$ до $0,4733$ Н·м/м. Значения изгибающего момента M_v в ВРМ от $-0,4140$ до $1,4030$ Н·м/м, в МКЭ от $-0,4398$ до $1,5562$ Н·м/м.

Особый интерес представляют изгибающие моменты M_u и M_v , так как по значениям изгибных напряжений при сравнении с нормальными напряжениями можно судить об изгибном состоянии торсовой оболочки при действии на нее рассматриваемой нагрузки.

Напряжения σ_M и σ_N от нормальных усилий $N_{u,v}$ и моментов $M_{u,v}$ определяются следующим образом:

$$\sigma_N = \frac{N_{u,v}}{h}; \quad \sigma_M = \frac{6M_{u,v}}{h^2}. \quad (10)$$

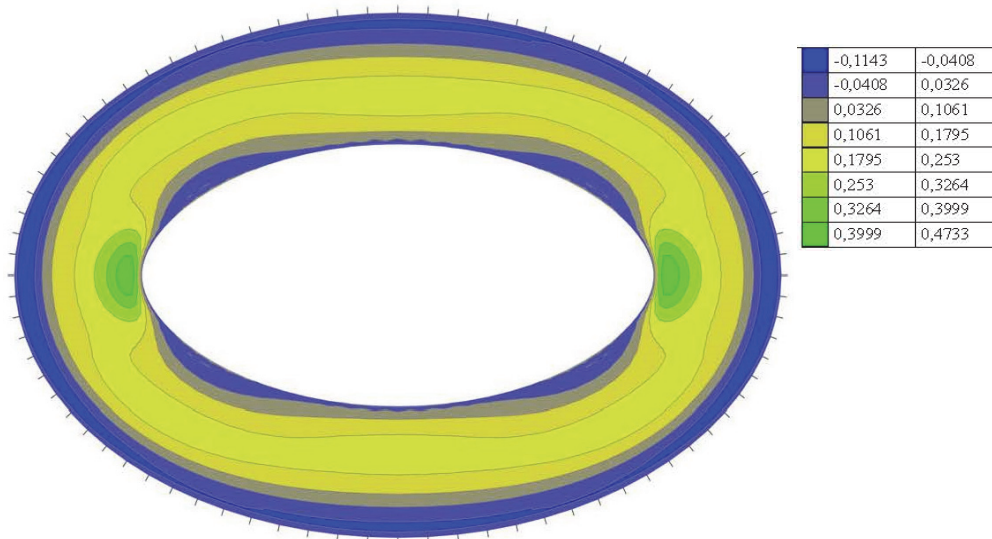


Рис. 6. Изгибающий момент M_u в МКЭ, Н·м/м

Максимальное соотношение напряжений σ_{Mu} к σ_{Nu} в ВРМ в сечении 1–1 в узле с координатой $u = 2,00$ м составляет 156,5 %, в узле с координатой $u = 1,80$ м – 27,2 %, в узле с координатой $u = 1,60$ м – 13,1 %, в узле с координатой $u = 1,40$ м – 7,2 %, в остальных узлах не превышает 4,4 %. В сечении 2–2 в узле с координатой $u = 2,00$ м составляет 61,9 %, в узле с координатой $u = 1,80$ м – 25,0 %, в узле с коор-

динатой $u = 1,60$ м – 12,3 %, в узле с координатой $u = 1,40$ м – 6,8 %, в остальных узлах не превышает 4,2 %. В сечении 3–3 в узле с координатой $u = 2,00$ м составляет 25,9 %, в узле с координатой $u = 1,80$ м – 18,5 %, в узле с координатой $u = 1,60$ м – 9,9 %, в остальных узлах не превышает 5,8 %. В сечении 4–4 в узле с координатой $u = 2,00$ м составляет 7,0 %, в узле с координатой $u = 1,80$ м – 9,3 %, в узле с координатой $u = 1,60$ м – 6,7 %, в остальных узлах не превышает 4,5 %. В сечении 5–5 в узле с координатой $u = 2,00$ м составляет 45,5 %; в сечении 6–6 в узле с координатой $u = 2,00$ м – 13,3 %; в сечении 7–7 в узле с координатой $u = 2,00$ м – 17,4 %; в сечении 8–8 в узле с координатой $u = 2,00$ м – 10,9 %; в сечении 10–10 в узле с координатой $u = 2,00$ м – 8,9 %; в сечении 11–11 в узле с координатой $u = 2,00$ м – 34,8 %, в узле с координатой $u = 1,80$ м – 5,8 %. В остальных узлах сечений 5–5 – 11–11 соотношение напряжений не превышает 5,2 %.

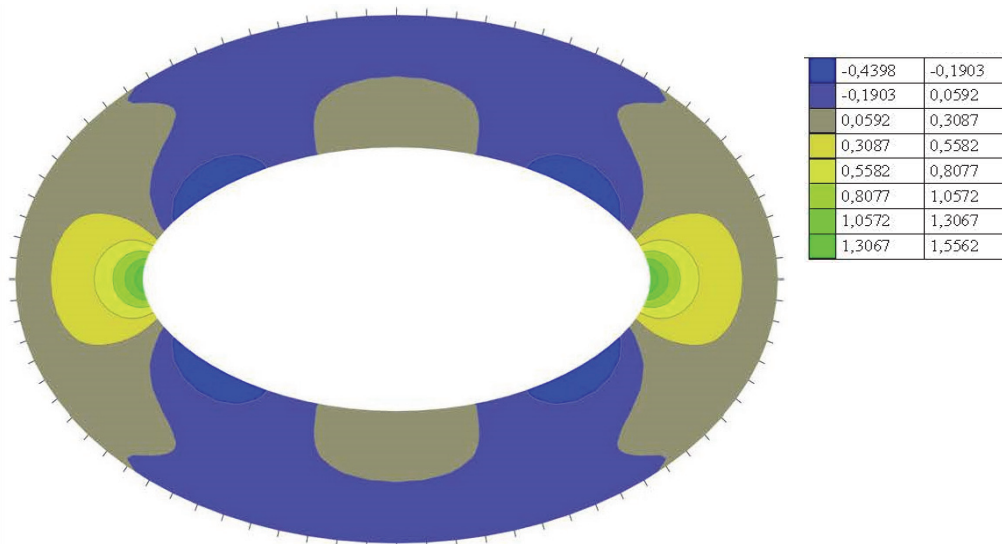


Рис. 7. Изгибающий момент M_v в МКЭ, Н·м/м

Изгибные напряжения σ_{Mv} , возникающие от равномерно распределенной нагрузки, направленной по касательной вдоль прямолинейных образующих к срединной поверхности, в ВРМ оказывают еще большее влияние на изгибное состояние рассматриваемой торсовой оболочки с направляющим эллипсом.

Результаты изучения влияния изгибных напряжений σ_{Mu} и σ_{Mv} в МКЭ показывают аналогичный характер. На рис. 6 и 7 представлены изополя распределения изгибающих моментов M_u и M_v , полученные в программном комплексе SCAD Office.

Заключение

Научное исследование выполнено на базе Инженерной академии Российского университета дружбы народов (РУДН). В области изучения геометрии и напряженного-деформированного состояния различных оболочек, в частности класса торсовых оболочек, работы в РУДН ведутся с 1960-х годов. Неоспоримый вклад в современную теорию оболочек внесли д. т. н., профессор В.Г. Рекач, д. т. н., профессор С.Н. Кривошапко и д.т.н., профессор В.Н. Иванов и их аспиранты (на сегодняшний день кандидаты технических наук). В настоящий момент С.Н. Кривошапко и В.Н. Иванов продолжают свои исследования в области теории оболочек [39–41].

Дифференциальные уравнения равновесия для торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом и выражение для определения числовых значений нормальной силы N_u при действии равномерно распределенной нагрузки, направленной по касательной вдоль прямолинейных образующих к срединной поверхности торса, получены впервые и представлены в данной работе.

Определение внутреннего усилия N_u исследуемой торсовой оболочки аналитическим методом является сложной и трудоемкой задачей, требующей большой затраты времени и повышенной концентрации внимания, так как незначительная неточность может привести к некорректным результатам. Проведенное сравнение результатов безмоментной теории с результатами метода конечных элементов и вариационно-разностного метода показывает хорошее схождение, что свидетельствует о правильности полу-

ченных дифференциальных уравнений равновесия и выражения для определения значений нормальной силы N_u . Использование программ SHELLVRM и SCAD упрощает решение данной задачи. Однако расчет в программе SHELLVRM возможен при наличии текста программы для ее реализации, а в программе SCAD возникает сложность для реализации безмоментного состояния (введение шарнирно-подвижных опор). При выборе метода решения поставленной задачи программа SCAD на базе метода конечных элементов является наиболее простой и универсальной.

Значения нормальной силы N_u вдоль прямолинейных образующих оболочки свидетельствуют о том, что рассматриваемая оболочка работает на сжатие. Таким образом, это является большим плюсом при выборе материалов для конструирования и изготовления торсовых оболочек. Учитывая свойство данного класса оболочек быть развернутыми на плоскость без складок и разрывов, это также является достоинством при выборе торсов среди оболочек похожих форм.

Благодаря результатам МКЭ и ВРМ установлено, что изгибные напряжения σ_{Mu} и σ_{Mv} оказывают существенное влияние на напряженное состояние торсовой оболочки. В связи с этим при конструировании различных сооружений в форме данного класса оболочек необходимо учитывать изгибающие моменты M_v и M_u . Безмоментная теория не позволяет получить данные параметры напряженного состояния торса. Таким образом, можно сделать вывод, что для рассматриваемой торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом безмоментная теория не применима.

Список литературы

1. Sabat L., Kundu C.K. History of finite element method: a review // Recent Developments in Sustainable Infrastructure. 2021. Pp. 395–404. <https://doi.org/10.1007/978-981-15-4577-132>
2. Gupta K.K., Meek J.L. A brief history of the beginning of the finite element method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996. Vol. 39. No. 22. Pp. 3761–3774. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961130\)39:22<3761::AID-NME22>3.0.CO;2-5](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3761::AID-NME22>3.0.CO;2-5)
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
4. Tyukalov Yu.Ya. Finite element models in stresses for bending plates // Magazine of Civil Engineering. 2018. № 6 (82). Pp. 170–190. <https://doi.org/10.18720/MCE.82.16>
5. Tyukalov Yu.Ya. Finite element models in stresses for plane elasticity problems // Magazine of Civil Engineering. 2018. № 1 (77). Pp. 23–37. <https://doi.org/10.18720/MCE.77.3>
6. Cen S., Li C., Rajendran S., Hu Z. Advances in finite element method // Mathematical Problems in Engineering. 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/206369>
7. Bushnell D., Almroth B.O., Brogan F. Finite-difference energy method for nonlinear shell analysis // Computers and Structures. 1971. Vol. 1. Issue 3. Pp. 361–387. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(71\)90020-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90020-4)
8. Barve V.D., Dey S.S. Isoparametric finite difference energy method for plate bending problems // Computers and Structures. 1983. Vol. 17. No. 3. Pp. 459–465. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(83\)90137-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(83)90137-2)
9. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells // International Applied Mechanics. 2012. Vol. 48. No. 6. Pp. 613–687. <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>
10. Trushin S., Goryachkin D. Numerical evaluation of stress-strain state of bending plates based on various models // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153. Pp. 781–784. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.242>
11. Иванов В.Н., Кушнарченко И.В. Подкрепления в вариационно-разностном методе расчета оболочек сложной формы // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 25–34.
12. Ivanov V., Rynkovskaya M. Analysis of thin walled wavy shell of monge type surface with parabola and sinusoid curves by variational-difference method // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. Pp. 1–5. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20179512007>
13. Govind P.L. Complicated features and their solution in analysis of thin shell and plate structures // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2018. Vol. 14. No. 6. Pp. 509–515. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-509-515>
14. Dzhavadyan A.D. Grid selection in the variation-difference method for solving second-order elliptic equations with quasidegenerate quadratic form // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No. 6. Pp. 22–33. [https://doi.org/doi:10.1016/s0041-5553\(89\)80004-7](https://doi.org/doi:10.1016/s0041-5553(89)80004-7)
15. Иванов В.Н. Основы метода конечных элементов и вариационно-разностного метода. М.: РУДН, 2008.
16. Иванов В.Н. Вариационно-разностный метод и метод глобальных элементов в расчете сопряжений отсек-ов оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: межвузовский сборник научных трудов. М.: Изд-во АСВ, 2003. Вып. 12. С. 34–41.
17. Mikhlin S.G. Variational-difference approximation // Journal of Soviet Mathematics. 1978. Vol. 10. No. 5. Pp. 661–787. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF01083968>

18. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1943. Vol. 49. No. 1. Pp. 1–23.
19. Zhong H., Yu T. A weak form quadrature element method for plane elasticity problems // *Applied Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 33. No. 10. Pp. 3801–3814. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.12.007>
20. Griffin D.S., Varga R.S. Numerical solution of plane elasticity problems // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963. Vol. 11. No. 4. Pp. 1046–1062.
21. Brush D.O., Almroth B.O. *Buckling of bars, plates, and shells*. New York: McGraw-Hill, 1975.
22. Xing Y., Liu B., Liu G. A differential quadrature finite element method // *International Journal of Applied Mechanics*. 2010. Vol. 2. No. 1. Pp. 207–227. <https://doi.org/10.1142/S1758825110000470>
23. Repin S.I. A variational-difference method of solving problems with functionals of linear growth // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1989. Vol. 29. No. 3. Pp. 35–46. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90145-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90145-6)
24. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: монография. М.: РУДН, 2010. 540 с.
25. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Switzerland: Springer International Publishing AG, 2015.
26. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах «MathCad» и «AUTOCad»: монография. М.: Издательство АСВ, 2016. 412 с.
27. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек. М.: РУДН, 2009. 357 с. (Библиотека классического университета).
28. Krivoshapko S.N. The application, geometrical and strength researches of torse shells: the review of works published after 2008 // *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2018. No. 2. Pp. 19–25.
29. Кривошапко С.Н. Перспективы и преимущества торсовых поверхностей при моделировании машиностроительных и строительных конструкций // *Вестник гражданских инженеров*. 2019. № 1 (72). С. 20–30. <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-20-30>
30. Aleshina O.O. New information about the use of shells with tangential developable middle surfaces. *Process Management and Scientific Developments*. Birmingham: Infinity, 2020. Pp. 140–146.
31. Chen M., Tang K. A fully geometric approach for developable cloth deformation simulation // *Visual Computer*. 2010. Vol. 26. No. 6–8. Pp. 853–863. <https://doi.org/10.1007/s00371-010-0467-5>
32. Иванов В.Н., Алёшина О.О. Сравнительный анализ параметров напряженно-деформированного состояния торса с направляющим эллипсом с помощью трех методов расчета // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. № 3 (290). С. 37–46. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.3.37.46>
33. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Grinko E.A. Investigation of the equal slope shell stress state by analytical and two numerical methods // *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2020. No. 6. Pp. 2–13. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.6.2.13>
34. Иванов В.Н., Алёшина О.О. Сравнительный анализ результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 5. С. 374–383. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383>
35. Алёшина О.О. Исследования по геометрии и расчету торсовых оболочек одинакового ската // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 3 (284). С. 63–70.
36. Алёшина О.О. Определение закона задания замкнутых кривых торсовых оболочек одинакового ската // *Инженерные системы – 2020: труды научно-практической конференции с международным участием, посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов: в 2 т. / под общ. ред. М.Ю. Мальковой*. М.: РУДН, 2020. Т. 1. С. 22–30.
37. Камудини Джаявардена М.К. Геометрия и пример расчета на прочность тонкой упругой оболочки в форме торса-геликоида // *Вопросы прочности пространственных систем: материалы XXVIII Научной конференции инженерного факультета*. М.: РУДН, 1992. С. 48–51.
38. Кривошапко С.Н., Крутов А.В. Ребра возврата, линии раздела и самопересечения некоторых технологических поверхностей откоса // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования*. 2001. № 1. С. 98–104.
39. Иванов В.Н., Ламичхане Г.П. Комбинированные пространственные конструкции // *Инженерные системы – 2020: труды научно-практической конференции с международным участием, посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов: в 2 т. / под общ. ред. М.Ю. Мальковой*. М.: РУДН, 2020. Т. 1. С. 31–39.
40. Krivoshapko S.N. The opportunities of umbrella-type shells // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020. Vol. 16. No. 4. Pp. 271–278. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-271-278>
41. Кривошапко С.Н. Аналитические линейчатые поверхности и их полная классификация // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 2. С. 131–138. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138>