

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
THEORY OF ELASTICITYDOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-481-492
УДК 519.633

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды
для плоского одномерного деформирования при аппроксимации
замыкающих уравнений биквадратичными функциями

С.В. Бакушев

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Российская Федерация, 440028, Пенза, ул. Германа Титова, д. 28
bakuchsv@mail.ru*

История статьи

Поступила в редакцию: 22 сентября 2020 г.
Доработана: 25 ноября 2020 г.
Принята к публикации: 30 ноября 2020 г.

Аннотация

Рассматриваются вопросы построения дифференциальных уравнений равновесия геометрически и физически нелинейной сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при аппроксимации диаграмм объемного и сдвигового деформирования квадратичными функциями. Построение физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объемного и сдвигового деформирования. В процессе аппроксимации графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования при помощи двух отрезков парабол секущий модуль сдвига на первом участке является линейной функцией интенсивности деформаций сдвига, секущий модуль объемного расширения – сжатия – линейной функцией первого инварианта тензора деформаций. На втором участке диаграмм и объемного и сдвигового деформирования секущий модуль сдвига является дробной (рациональной) функцией интенсивности деформаций сдвига, секущий модуль объемного расширения – сжатия – дробной (рациональной) функцией первого инварианта тензора деформации. Исходя из предположения об обособленности друг от друга диаграмм объемного и сдвигового деформирования, рассмотрены шесть основных случаев физических зависимостей, обусловленных взаимным расположением точек излома графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированных двумя параболой каждый. Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженного и деформированного состояний сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования. Замыкающие уравнения физических соотношений построены на основе экспериментальных данных и аппроксимированы биквадратичными функциями.

Ключевые слова: сплошная среда, плоская одномерная деформация, аппроксимация диаграмм деформирования, квадратичные функции, дифференциальные уравнения равновесия, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность

Для цитирования

Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоского одномерного деформирования при аппроксимации замыкающих уравнений биквадратичными функциями // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* 2020. Т. 16. № 6. С. 481–492. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-481-492>

Бакушев Сергей Васильевич, профессор кафедры механики, доктор технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 1382-2917, Scopus Author ID: 6505699177, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9134-8106>

© Бакушев С.В., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Differential equations of equilibrium of continuous medium for plane one-dimensional deformation at closing equations approximation by biquadratic functions

Sergey V. Bakushev

Penza State University of Architecture and Construction, 28 Germana Titova St, Penza, 440028, Russian Federation
bakuchsv@mail.ru

Article history

Received: September 22, 2020

Revised: November 25, 2020

Accepted: November 30, 2020

Abstract

Problems of differential equations construction of equilibrium of a geometrically and physically nonlinear continuous medium under conditions of one-dimensional plane deformation are considered, when the diagrams of volumetric and shear deformation are approximated by quadratic functions. The construction of physical dependencies is based on calculating the secant moduli of volumetric and shear deformation. When approximating the graphs of the volumetric and shear deformation diagrams using two segments of parabolas, the secant shear modulus in the first segment is a linear function of the intensity of shear deformations, the secant modulus of volumetric expansion – contraction is a linear function of the first invariant of the strain tensor. In the second section of the diagrams of both volumetric and shear deformation, the secant shear modulus is a fractional (rational) function of the shear strain intensity, the secant modulus of volumetric expansion – compression is a fractional (rational) function of the first invariant of the strain tensor. Based on the assumption of independence, generally speaking, from each other of the volumetric and shear deformation diagrams, six main cases of physical dependences are considered, depending on the relative position of the break points of the graphs of the diagrams volumetric and shear deformation, each approximated by two parabolas. The differential equations of equilibrium in displacements constructed in the article can be applied in determining the stressed and deformed state of a continuous medium under conditions of one-dimensional plane deformation, the closing equations of physical relations for which, constructed on the basis of experimental data, are approximated by biquadratic functions.

Keywords: continuous medium, plane one-dimensional deformation, approximation of deformation diagrams, quadratic functions, differential equilibrium equations, geometric linearity, geometric nonlinearity

For citation

Bakushev S.V. Differential equations of equilibrium of continuous medium for plane one-dimensional deformation at closing equations approximation by biquadratic functions. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):481–492. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-481-492>

1. Введение

Построение математических моделей, наиболее полно описывающих механическое поведение сплошных деформируемых сред и позволяющих адекватно отражать их напряженное и деформированное состояние, является одной из приоритетных задач механики деформируемого твердого тела. Одним из путей решения этой практически важной задачи является разработка уточненных математических моделей, описывающих реальные диаграммы объемного и сдвигового деформирования. Основная трудность при этом заключается в том, что диаграммы объемного и сдвигового деформирования сугубо индивидуальны для каждого рассматриваемого материала. Ввиду этого возникает задача построения математических моделей этих диаграмм, имея в наличии только значения координат нескольких характерных точек на этих диаграммах и задаваясь видом кривых на интервалах между этими характерными точками. Одной из наиболее простых математических моделей при этом будет модель, построенная на базе трех характерных точек диаграмм объемного и сдвигового деформирования и аппроксимированная на интервалах между этими точками отрезками прямых (билинейная модель) [1]. Более сложной является математическая модель, построенная на базе трех характерных точек диаграмм объемного и сдвигового деформирования и аппроксимированная на интервалах между этими точками отрезками парабол (биквадратичная модель) [2].

Следующим шагом на пути решения практических задач является построение дифференциальных уравнений равновесия для различных частных случаев напряженного и деформированного состояний сплош-

ной среды, соответствующих принятым диаграммам объемного и сдвигового деформирования. В работе [3] представлены дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях при аппроксимации диаграмм объемного и сдвигового деформирования билинейными функциями для характерных случаев напряженно-деформированного состояния сплошной среды: одномерного плоского, осесимметричного, центрально-симметричного деформирования, плоской деформации в декартовых и цилиндрических координатах, как без учета, так и с учетом геометрической нелинейности (в трактовке В.В. Новожилова [4]). Надо отметить, что в настоящее время разработано много математических моделей, описывающих механическое поведение сплошных сред, в частности грунтовых массивов. Работа [5] посвящена разработке рекомендаций по выбору достоверных математических моделей грунтов в численных расчетах грунтовых плотин и их сравнению с наиболее распространенными моделями в современной практике применения [6–9].

Данная работа посвящена разработке дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида биквадратичными функциями. В качестве математических моделей сплошной среды используются как модели, не учитывающие геометрическую нелинейность, так и модели, учитывающие геометрическую нелинейность.

Следует отметить, что вопросами расчета физически и геометрически нелинейных деформируемых сплошных сред и конструкций при сложном напряженно-деформированном состоянии занимаются многие отечественные и зарубежные исследователи [10–12]. Общие вопросы учета нелинейности в расчетах строительных конструкций рассматриваются в работе [13]. Отмечается, что физические процессы, в частности в механике деформируемого твердого тела, чаще всего носят нелинейный характер. Строгие линейные зависимости между различными параметрами, определяющими состояние того или иного объекта, встречаются крайне редко. Фактически линейные предположения действительны только в особых обстоятельствах и обычно включают некоторую меру «малости», например, небольшие деформации, небольшие смещения, небольшие вращения и т. д. В работе [14] обсуждаются проблемы получения корректных решений нелинейных задач теории упругости, особенно в связи с развитием численных методов решения, в частности метода конечных элементов. В статье [15] утверждается, что в настоящее время нелинейные расчеты можно рассматривать лишь как некоторый дополнительный инструмент, который используют в тех случаях, когда применение простых стандартных методов расчета является недостаточным. Указывается на декларативность нормативных требований относительно обязательности выполнения нелинейных расчетов объектов строительства. Приводится перечень проблем, отсутствие решения которых мешает полноценному использованию нелинейного анализа в проектировании.

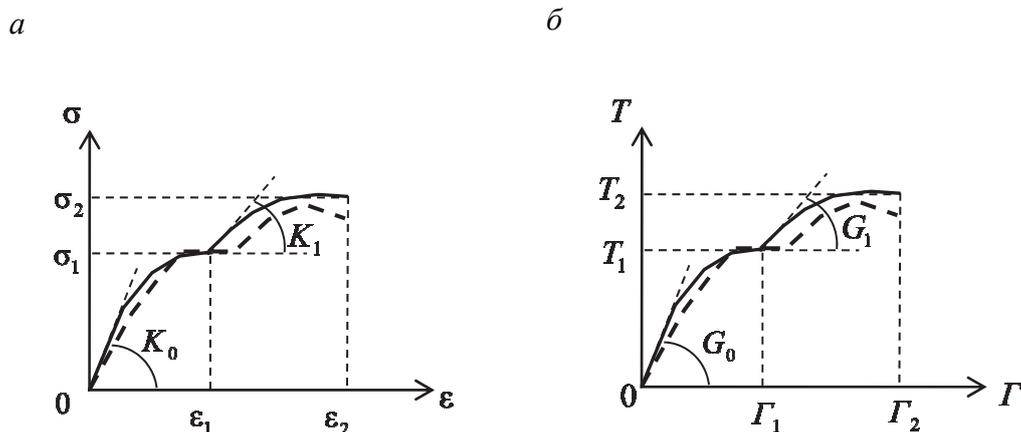


Рис. Диаграммы объемного (а) $\sigma \approx \varepsilon$ и сдвигового (б) $T \approx \Gamma$ деформирования:
пунктирные толстые линии – исходные кривые объемного и сдвигового деформирования;
сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол

Figure. Chart surround (а) $\sigma \approx \varepsilon$ and shifting (б) $T \approx \Gamma$ deformation:
dotted thick lines – original curves of volume and shift deformation; solid thick lines – approximating segments of parabola

Во многих работах рассматривается расчет грунтовых массивов и элементов строительных конструкций методом конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности. В частности, в работах [16–19] методом конечных элементов выполняется расчет грунтовых массивов, в [20–24] –

расчет элементов строительных конструкций методом конечных элементов, в [25] проводится анализ работ по расчету пластин и оболочек за пределом упругости с учетом неоднородности материала, связанной с изменением его свойств в результате термообработки, облучения и воздействия агрессивной среды. Анализ показал необходимость разработки методов и алгоритмов расчета, позволяющих вести исследования неоднородных элементов конструкций с разрывными параметрами с учетом физической и геометрической нелинейности и начальными несовершенствами формы срединной поверхности.

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования $u_x = u(x)$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида квадратичными функциями как для геометрически линейной, так и для геометрически нелинейной модели сплошной среды (см. рисунок).

2. Геометрически линейная модель

В соответствии с работой [2] секущие модули объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ на первом криволинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ (см. рисунок) будут определяться выражениями

$$K'(\varepsilon) = \frac{1}{3}K_0 + K_{01}\varepsilon; \quad G'(\Gamma) = G_0 + G_{01}\Gamma, \quad (1)$$

где

$$K_{01} = \frac{\sigma_1 - K_0\varepsilon_1}{3\varepsilon_1^2}; \quad G_{01} = \frac{T_1 - G_0\Gamma_1}{\Gamma_1^2}. \quad (2)$$

На втором криволинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ секущий модуль объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и секущий модуль сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ будут вычисляться по формулам

$$K''(\varepsilon) = a_1\varepsilon + b_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}; \quad G''(\Gamma) = a_2\Gamma + b_2 + \frac{c_2}{\Gamma}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}; \quad b_1 = \frac{1}{3} \left[K_1 - 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1 \right]; \\ c_1 &= \frac{1}{3} \left[\sigma_1 - K_1\varepsilon_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1^2 \right]; \quad a_2 = \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}; \\ b_2 &= G_1 - 2 \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1; \quad c_2 = T_1 - G_1\Gamma_1 - \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1^2. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (2) и (4) обозначено: K_0 – начальный модуль объемного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – начальный модуль упрочнения при объемном расширении (сжатии); G_1 – начальный модуль упрочнения при сдвиге; σ_1 , ε_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$; T_1 , Γ_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T \approx \Gamma$; σ_2 , ε_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$; T_2 , Γ_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T \approx \Gamma$.

Кроме того, σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

Физические уравнения для геометрически линейной модели

При плоском одномерном деформировании сплошной среды $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$; $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2}$, причем $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$

и, следовательно, $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$. Тогда $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma} \varepsilon_{xx} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Поскольку $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon^2}$, то графики нелинейных диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ при плоском одномерном деформировании связаны друг с другом. Ввиду этого рассмотрим шесть основных случаев физических зависимостей для плоского одномерного деформирования сплошной среды.

Случай 1: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$. Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования совпадают, то есть $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$. При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (5)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1. \quad (6)$$

Здесь интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, при которых

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_1|. \quad (7)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_1 \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (8)$$

Здесь объемной деформации ε_0 соответствуют такие компоненты деформации, при которых

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon)^2} = \Gamma_1. \quad (9)$$

В этом случае физические уравнения с учетом формул (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G^I(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G^I(\Gamma) \cdot \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

Случай 2: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$. Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ и } \Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (11)$$

Здесь объемной деформации ε_0 и интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняются соотношения (9) и (7) соответственно.

В этом случае физические уравнения с учетом формул (1) и (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G'(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G'(\Gamma) \cdot \varepsilon.\end{aligned}\quad (12)$$

Случай 3: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$. Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0. \quad (13)$$

Здесь объемной деформации ε_0 и интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняются соотношения (9) и (7) соответственно.

В этом случае физические уравнения с учетом формул (1) и (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon.\end{aligned}\quad (14)$$

Случай 4: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$. Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования совпадают, то есть $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (15)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_0| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (16)$$

Здесь объемной деформации ε_0 соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняется соотношение (9).

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_0. \quad (17)$$

Здесь интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения с учетом формул (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon.\end{aligned}\quad (18)$$

Случай 5: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = K_1, \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$. Точка излома графика на квадратичной диаграмме

объемного деформирования отсутствует. При этом, если $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$, то физические уравнения будут иметь вид (10), а если $\Gamma \geq \Gamma_1$ – (14).

Случай 6: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} = G_1$. Точка излома графика на квадратичной диаграмме

сдвигового деформирования отсутствует. При этом, если $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$, то физические уравнения будут иметь вид (10), а если $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$ – (12).

Дифференциальные уравнения равновесия для геометрически линейной модели

Подставляя физические уравнения (10), (12), (14), (18) в дифференциальное уравнение равновесия одномерного плоского деформирования сплошной среды

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + F_x = 0, \quad (19)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях:

1) для физических уравнений (10) дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях будет иметь вид

$$\left\{ \frac{1}{3} K_0 + \frac{4}{3} G_0 + 2K_{01} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{8}{3\sqrt{3}} G_{01} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \frac{8\sqrt{3}}{9} G_{01} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0; \quad (20)$$

2) для физических уравнений (12) получим:

$$\left\{ a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} + \frac{4}{3} \left(G_0 + G_{01} \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \right) + \left[a_1 - c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{8\sqrt{3}}{9} G_{01} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0; \quad (21)$$

3) для физических уравнений (14):

$$\left\{ \frac{1}{3} K_0 + 2K_{01} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \left[a_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + b_2 + \frac{c_2 \sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right] + \frac{8\sqrt{3}}{9} \left[a_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{3c_2}{4} \right] \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0; \quad (22)$$

4) для физических уравнений (18):

$$\left\{ a_1 \varepsilon + b_1 + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} + \frac{4}{3} \left[a_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} + b_2 + \frac{c_2 \sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ \left. + \left[a_1 - c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9} \left[a_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{3c_2}{4} \right] \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0. \quad (23)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений без учета геометрической нелинейности построены.

3. Геометрически нелинейная модель

Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды [4] описываются соотношениями, устанавливающими в самом общем случае перекрестные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и нелинейных деформаций:

$$K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), \quad G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), \quad (24)$$

где σ^* – первый инвариант тензора обобщенных напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщенных касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Аппроксимируя зависимости (24) биквадратичными функциями, нетрудно получить секущие модули объемного расширения (сжатия) $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ и сдвига $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ на первом и втором криволинейных участках диаграмм $\sigma^* \approx \varepsilon^*$ и $T^* \approx \Gamma^*$, аналогичных соотношениям (1)–(4). При этом все величины, входящие в формулы (1)–(4), следует записывать со звездочками.

Таким образом, K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объемного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; K_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при объемном расширении (сжатии); G_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге; σ_1^* , ε_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma^* \approx \varepsilon^*$; T_1^* , Γ_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T^* \approx \Gamma^*$; σ_2^* , ε_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma^* \approx \varepsilon^*$; T_2^* , Γ_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T^* \approx \Gamma^*$.

Физические соотношения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоского одномерного деформирования будут записываться в форме, аналогичной соотношениям (10), (12), (14), (18) (если у всех величин, входящих в эти формулы проставить звездочки).

Дифференциальные уравнения равновесия для геометрически нелинейной модели

Поскольку дифференциальное уравнение равновесия для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоского одномерного деформирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* \right] + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x = 0, \quad (25)$$

отлично от дифференциального уравнения равновесия для геометрически линейной модели сплошной среды (19) и, кроме того, при плоском одномерном деформировании сплошной среды, описываемой

геометрически нелинейной моделью $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^*$; $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^{*2}}$, причем $\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ и, следова-

тельно, $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^2}$, то есть $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}^*}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial \Gamma^*}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma^*} \varepsilon_{xx}^* \frac{\partial \varepsilon_{xx}^*}{\partial x} =$
 $= \frac{4}{3\Gamma^*} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то запись дифференциального уравнения равновесия в перемеще-

ниях для геометрически нелинейной модели будет отличаться от записи дифференциального уравнения в перемещениях для геометрически линейной модели (формулы (20)–(23)).

Геометрически нелинейный аналог уравнения (20) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) + K_{01}^* \varepsilon^* \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{1}{3} K_0^* + \right. \\ & \left. + 2K_{01}^* \varepsilon^* + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} G_{01}^* \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Геометрически нелинейный аналог уравнения (21) записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \left[a_1^* \varepsilon^* + b_1^* + \frac{c_1^*}{\varepsilon^*} + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[a_1^* \varepsilon^* + b_1^* + \frac{c_1^*}{\varepsilon^*} + \right. \\ & \left. + \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} G_{01}^* \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Геометрически нелинейный аналог уравнения (22) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} K_0^* + K_{01}^* \varepsilon^* + \frac{4}{3} \left(a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{1}{3} K_0^* + 2K_{01}^* \varepsilon^* + \right. \\ & \left. + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) + \frac{4}{3} \left(a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right] F_x = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Геометрически нелинейный аналог уравнения (15) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[a_1^* \varepsilon^* + b_1^* + \frac{c_1^*}{\varepsilon^*} + \frac{4}{3} \left(a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \times \\ & \times \left[\left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* + a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) + \frac{4}{3} \left(a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right] F_x = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие напряженно-деформированное состояние сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений с учетом геометрически нелинейности построены.

4. Результаты и обсуждение

Для описания напряженно-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформированного состояния, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях построены. Для сплошной среды, механическое поведение которой описывается и в части объемных, и в части сдвиговых деформаций произвольными функциями, аппроксимируемыми биквадратичными замыкающими уравнениями без учета геометрической нелинейности, дифференциальные уравнения представлены соотношениями (20), (21), (22), (23). Для сплошной среды, описываемой геометрически нелинейной моделью, графики диаграмм объемного и сдвигового деформирования которой аппроксимированы биквадратичными замыкающими уравнениями, дифференциальные уравнения представлены соотношениями (26), (27), (28), (29).

Дифференциальные уравнения имеют достаточно сложную структуру. Это объясняется тем, что при аппроксимации нелинейных графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования при помощи двух отрезков парабол на первом нелинейном участке секущий модуль объемного расширения – сжатия является линейной функцией первого инварианта тензора деформаций (1_1), а секущий модуль сдвига – интенсивности деформаций сдвига (1_2). На втором нелинейном участке диаграмм и объемного и сдвигового деформирования секущий модуль объемного расширения – сжатия является дробной (рациональной) функцией первого инварианта тензора деформации (3_1), а секущий модуль сдвига – интенсивности деформаций сдвига (3_2). Вместе с тем эти дифференциальные уравнения линейны относительно старшей производной от перемещения по пространственной координате и являются квазилинейными. Квазилинейность дифференциальных уравнений второго порядка не может существенно усложнить процедуру их решения, так как методы решения таких уравнений разработаны достаточно подробно.

5. Заключение

Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния сплошных сред, в частности, грунтовых массивов под монолитной фундаментной плитой под здание или сооружение, оснований под складские сооружения больших объемов и т. д., находящихся в условиях одномерного плоского деформирования, замыкающие уравнения физических соотношений для которых описываются биквадратичными функциями.

Список литературы

1. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 2 (283). С. 2–11.
2. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. № 3 (290). С. 2–14.
3. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твердого тела. М.: ЛЕНАНД, 2020. 304 с.
4. Новожилов В.В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958. 370 с.
5. Ляпичев Ю.П. Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 4. С. 261–270. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270>
6. Duncan J.M., Chang Y.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils // *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1970. Vol. 96. No. 5. Pp. 1629–1653.
7. Mroz Z., Norris V., Zienkiewicz O. Anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading // *Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics*. 1978. No. 2. Pp. 203–221.
8. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behaviour of 'wet clay' // *Engineering Plasticity* / ed. by J. Heyman, F.A. Leckie. Cambridge: Cambridge University Press, 1968. Pp. 535–609.
9. Prevost J.H. Anisotropic undrained stress-strain behavior of clays // *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 1978. Vol. 104. No. 8. Pp. 1075–1090.
10. Aziz H.Y., Maula B.H. Estimation of negative skin friction in deep pile foundation using the practical and theoretically approaches // *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018. Vol. 13. No. 10. Pp. 3340–3349.
11. Miller T., Lee C. Novel pile design for multi-level car park above twin rail tunnels // *Australian geomechanics*. 2017. Vol. 52. No. 44. Pp. 15–27.
12. Zhang Y. Estimation of Free Penetration of Steel Pile and Numerical Simulation // *Ship Building of China*. 2017. Vol. 58. Pp. 547–556.

13. Егоров В.В., Абу-Хасан М.С., Исаченкова К.Е. Учет нелинейности в расчетах строительных конструкций // БСТ: Бюллетень строительной техники. 2020. № 4 (1028). С. 62–64.
14. Шутов В.А., Миренков В.Е. Деформируемое твердое тело и постулаты механики // Творчество и современность. 2019. № 1 (9). С. 125–128.
15. Перельмутер А.В., Тур В.В. Готовы ли мы перейти к нелинейному анализу при проектировании? // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2017. Т. 13. № 3. С. 86–102.
16. Протосеня А.Г., Иовлев Г.А. Прогноз напряженно-деформируемого состояния в окрестности подземного сооружения в нелинейно-деформируемых грунтовых массивах // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2020. № 2. С. 215–228.
17. Федоровский В.Г., Бобьрь Г.А., Боков И.А., Ильин С.В. Применение метода конечных элементов в геотехнических расчетах по первому предельному состоянию // Вестник НИЦ «Строительство». 2019. № 1 (20). С. 102–112.
18. Христич Д.В., Астапов Ю.В., Артюх Е.В., Соколова М.Ю. Численное моделирование напряжений в массиве глинистого грунта под фундаментом // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2019. № 4. С. 312–319.
19. Bukotas G., Kačianauskas R. Analysis of axisymmetric bore-type foundation in respect of plastic deformation [Ašiai simetrinio gręžinio pamato analizė įvertinant plastines deformacijas] // Journal of Civil Engineering and Management. 1997. Vol. 3. No. 10. Pp. 24–31. DOI: 10.3846/13921525.1997.10531680.
20. Косицын С.Б., Чан С.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния пересекающихся цилиндрических оболочек при упруго-пластических деформациях с учетом геометрической нелинейности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 1. С. 3–9.
21. Аганов В.П., Васильев А.В. Учет геометрической нелинейности при расчете железобетонных колонн прямоугольного сечения методом конечных элементов // Вестник МГСУ. 2014. № 4. С. 37–43.
22. Аганов В.П., Айдемиров К.Р. Применение метода конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности для расчета предварительно напряженных железобетонных ферм // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017. Т. 44. № 1. С. 127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137.
23. Соколов С.А., Качаун А.Н., Скудалов П.О., Чермных С.В. Анализ работы узлов стропильной фермы типа «Молодечно» с учетом физической и геометрической нелинейности // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: Строительство. Электротехника и химические технологии. 2019. № 2 (2). С. 36–42.
24. Bahaz A., Amara S., Jaspert J.P., Demonceau J.F. Analysis of the Behaviour of Semi Rigid Steel End Plate Connections // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 149. Article 02058. DOI: 10.1051/mateconf/201814902058.
25. Попов О.Н., Малиновский А.П., Моисеенко М.О., Тренутнева Т.А. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2013. № 4 (41). С. 127–142.

References

1. Bakushev S.V. Approximations of warp diagrams using bilinear functions. *Structural Mechanics and Structural Analysis*. 2019;2(283):2–11. (In Russ.)
2. Bakushev S.V. Approximation of deformation diagrams by quadratic functions. *Structural Mechanics and Structural Analysis*. 2020;3(290):2–14. (In Russ.)
3. Bakushev S.V. *Differencial'nye uravneniya i kraevye zadachi mekhaniki deformiruemogo tvordogo tela [Differential equations and boundary problems in the mechanics of a deformable solid]*. Moscow: LENAND Publ.; 2020. (In Russ.)
4. Novozhilov V.V. *Teoriya uprugosti [The theory of elasticity]*. Leningrad: Sudpromgiz Publ.; 1958. (In Russ.)
5. Lyapichev Y.P. Choice of mathematic models of soils in static and seismic analyses of embankment dams. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2020;16(4):261–270. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270> (In Russ.)
6. Duncan J.M., Chang Y.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1970;96(5):1629–1653.
7. Mroz Z., Norris V., Zienkiewicz O. Anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading. *Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics*. 1978;2:203–221.
8. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behaviour of 'wet clay'. In: Heyman J., Leckie F.A. (eds.) *Engineering Plasticity* (p. 535–609). Cambridge: Cambridge University Press; 1968.
9. Prevost J.H. Anisotropic undrained stress-strain behavior of clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 1978;104(8):1075–1090.
10. Aziz H.Y., Maula B.H. Estimation of negative skin friction in deep pile foundation using the practical and theoretically approaches. *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018;13(10):3340–3349.
11. Miller T., Lee C. Novel pile design for multi-level car park above twin rail tunnels. *Australian Geomechanics*. 2017;52(44):15–27.
12. Zhang Y. Estimation of Free Penetration of Steel Pile and Numerical Simulation. *Ship Building of China*. 2017;(58):547–556.

13. Egorov V.V., Abu-Khasan M.S., Isachenkova K.E. Consideration of nonlinearity in the calculations of building structures. *BST: Byulleten' stroitel'noj tehniki [BEB: Building Equipment Bulletin]*. 2020;4(1028):62–64. (In Russ.)
14. Shutov V.A., Mirenkov V.E. Deformable solid body and postulates mechanics. *Creativity and modernity*. 2019; 1(9):125–128. (In Russ.)
15. Perelmuter A.V., Tur V.V. Whether we are ready to proceed to a nonlinear analysis at designing? *International Journal of Civil and Construction*. 2017;13(3):86–102. (In Russ.)
16. Protosenya A.G., Iovlev G.A. Stress-strain state prediction surrounding underground structure, constructed in nonlinear deformed medium-soft soils. *Izvestiya Tula State University. Earth Sciences*. 2020;(2):215–228. (In Russ.)
17. Fedorovsky V.G., Bobyr G.A., Bokov I.A., Iliyn S.V. Application of finite element method to the geotechnical ULS analysis. *Bulletin of SRC "Stroitelstvo"*. 2019;1(20):102–112. (In Russ.)
18. Khristich D.V., Astapov Y.V., Artyukh E.V., Sokolova M.Y. Numerical modeling of stresses in the massif of a clay soil under the foundation. *Izvestiya Tula State University. Earth Sciences*. 2019;(4):312–319. (In Russ.)
19. Bukotas G., Kačianauskas R. Analysis of axisymmetric bore-type foundation in respect of plastic deformation. *Journal of Civil Engineering and Management*. 1997;3(10):24–31. DOI: 10.3846/13921525.1997.10531680.
20. Kositsyn S.B., Than Huan Linh. The analysis of the stress-strain state of the intersecting cylindrical shells for the elasto-plastic deformations with a view of geometrical nonlinearity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013;(1):3–9. (In Russ.)
21. Agapov V.P., Vasilev A.V. Account for geometrical nonlinearity in the analysis of reinforced concrete columns of rectangular section by finite element method. *Vestnik MGSU (Monthly Journal on Construction and Architecture)*. 2014; (4):7–43. (In Russ.)
22. Agapov V.P., Aidemirov K.R. Application of finite element method taking into account physical and geometric nonlinearity for the calculation of prestressed reinforced concrete beams. *Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2017;44(1):127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137. (In Russ.)
23. Sokolov S.A., Kachaun A.N., Skudalov P.O., Cheremnykh S.V. Analysis of the “Molodechno” type truss beam nodes, taking into account the physical and geometric nonlinearity. *Vestnik of Tver State Technical University. Series: Building. Electrical Engineering and Chemical Technology*. 2019;2(2):36–42. (In Russ.)
24. Bahaz A., Amara S., Jaspert J.P., Demonceau J.F. Analysis of the Behaviour of Semi Rigid Steel End Plate Connections. *MATEC Web of Conferences*. 2018;149:02058. DOI: 10.1051/mateconf/201814902058.
25. Popov O.N., Malinovskii A.P., Moiseenko M.O., Treputneva T.A. Current state of stress-strain analysis of inhomogeneous construction members strained beyond the elastic limit. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture*. 2013;4(41):127–142. (In Russ.)