2020. 16(5). 390–413

Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

# Теория упругости
# Theory of elasticity

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-390-413
UDC 539.3

RESEARCH PAPER / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

# Modern interpretation of Saint-Venant's principle and semi-inverse method

**Evgeny M. Zveryaev**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, 4 Miusskaya Sq, Moscow, 125047, Russian Federation*
*Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Highway, Moscow, 125993, Russian Federation*
zveriaev@mail.ru

**Article history**
Received: August 23, 2020
Revised: October 4, 2020
Accepted: October 14, 2020

**Abstract**

*Relevance.* The progressive development of views on the Saint-Venant formulated principles and methods underlying the deformable body mechanics, the growth of the mathematical analysis branch, which is used for calculation and accumulation of rules of thumb obtained by the mathematical results interpretation, lead to the fact that the existing principles are being replaced with new, more general ones, their number is decreasing, and this field is brought into an increasingly closer relationship with other branches of science and technology. Most differential equations of mechanics have solutions where there are gaps, quick transitions, inhomogeneities or other irregularities arising out of an approximate description. On the other hand, it is necessary to construct equation solutions with preservation of the order of the differential equation in conjunction with satisfying all the boundary conditions. Thus, the following *aims of the work* were determined: 1) to complete the familiar Saint-Venant's principle for the case of displacements specified on a small area; 2) to generalize the semi-inverse Saint-Venant's method by finding the complement to the classical local rapidly decaying solutions; 3) to construct on the basis of the semi-inverse method a modernized method, which completes the solutions obtained by the classical semi-inverse method by rapidly varying decaying solutions, and to rationalize asymptotic convergence of the solutions and clarify the classical theory for a better understanding of the classic theory itself. To achieve these goals, we used such *methods*, as: 1) strict mathematical separation of decaying and non-decaying components of the solution out of the plane elasticity equations by the methods of complex variable theory function; 2) construction of the asymptotic solution without any hypotheses and satisfaction of all boundary conditions; 3) evaluation of convergence. *Results.* A generalized formulation of the Saint-Venant's principle is proposed for the displacements specified on a small area of a body. A method of constructing asymptotic analytical solutions of the elasticity theory equations is found, which allows to satisfy all boundary conditions.

**Keywords:** contraction mapping principle, fixed point theorem, elasticity, strip, Saint-Venant, complete solution

**For citation**
Zveryaev E.M. Modern interpretation of Saint-Venant's principle and semi-inverse method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2020;16(5): 390–413. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-390-413

***Evgeny M. Zveryaev***, Doctor of Technical Sciences, Professor, senior researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Professor of Moscow Aviation Institute (National Research University); Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337.

# Современная трактовка принципа и полуобратного метода Сен-Венана

**Е.М. Зверяев**

*Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., 4*
*Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4*
zveriaev@mail.ru

**История статьи**
Поступила в редакцию: 23 августа 2020 г.
Доработана: 4 октября 2020 г.
Принята к публикации: 14 октября 2020 г.

**Для цитирования**
*Зверяев Е.М.* Современная трактовка принципа и полуобратного метода Сен-Венана // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 390–413. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-390-413

**Аннотация**

*Актуальность.* Постепенное развитие взглядов на сформулированные Сен-Венаном принципы и методы, лежащие в основе механики деформируемого тела, рост той ветви математического анализа, которая применяется при вычислениях, и накопление практических правил, получаемых путем истолкования математических результатов, приводят к тому, что существующие принципы заменяются новыми, более общими, число их уменьшается и данная область приводится во все более тесную связь с другими отделами науки и техники. Большинство дифференциальных уравнений механики обладает решениями, в которых наблюдаются разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания. Большой интерес представляет обобщенная формулировка принципа Сен-Венана для затухания заданных на малом участке перемещений для объяснения полученных приближенных решений. С другой стороны, необходимо построение решений уравнений с сохранением порядка дифференциального уравнения в сочетании с выполнением всех граничных условий. Таким образом, были определены следующие *цели исследования*: 1) дополнить известный принцип Сен-Венана для случая заданных на малом участке тела перемещений; 2) построить на основе полуобратного метода модернизированный метод, дополняющий полученные классическим полуобратным методом решения быстро меняющимися затухающими решениями; 3) обосновать асимптотическую сходимость решений и уточнить классические теории для более полного понимания самой классической теории. Для достижения поставленных целей использовались такие *методы*, как: 1) строгое математическое выделение затухающей и незатухающей компонент решения из уравнений плоской задачи теории упругости методами теории функций комплексного переменного; 2) построение асимптотического решения без каких-либо гипотез и выполнение всех граничных условий; 3) оценка сходимости решения. *Результаты.* Предложена формулировка обобщенного принципа Сен-Венана для заданных на малом участке тела перемещений. Найден метод построения асимптотических аналитических решений уравнений теории упругости, позволяющий выполнить все граничные условия.

**Ключевые слова:** принцип сжатых отображений, теорема о неподвижной точке, упругость, полоса, Сен-Венан, полное решение

## 1. Introduction

The main factor for refusing a researcher in recognition of his works becomes fairly meaningful and reasonable lack of trust for something overly unconventional and provocative. If we go back to the image of sphere of knowledge, then any attempt at leaping too far out of the bounds of the sphere will likely be eventually unsuccessful. These are, for example, numerous attempts at creating a "theory of everything" or alternatively subverting some fundamental theory – theory of relativity or evolution. Such "theories of everything" and "subversions of fundamentals" look too mistrustful to spark an interest to seriously consider them. In this case the apriori lack of trust for something excessively strange and pretentious serves as "population control" for disposing of potentially destructive phenomena.

It is common for continuum mechanics and the related field of partial derivatives mathematics to gradually develop fundamental ideas, put forth by the "founding fathers" of the science. Progressive development of views on the principles underlying deformable body mechanics, growth of the mathematical analysis field, which is used for computation and accumulation of rules of thumb, obtained by interpreting mathematical results, lead to

***Зверяев Евгений Михайлович***, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, профессор Московского авиационного института; Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337.

the fact that the principles are replaced by the other, more general ones, their number decreases, and this field is brought into an increasingly closer relationship with other branches of physics. Besides, same physical principles, in the end, serve as a basis for them all.

Elasticity theory is considered to be founded on two basic Saint-Venant's ideas: the principle and the semi-inverse method. Saint-Venant's principle, named after Adhemar Jean Claude Saint-Venant, may be expressed as follows: "…the difference between the effects of two unique, but statically equivalent loads, becomes very small at sufficiently large distances from the load". This statement was published by Saint-Venant in 1855 [1]. Later, von Mises brought forward an assumption that the principle cannot be applied to the bodies of finite dimensions [2]. In this paper, this assertion is refuted.

The force and moment based (stress resultants) solution for thin-walled systems had been determining the direction of researchers' efforts for a long time. After constructing basic theories for plates, shells and thin-walled systems some contradictions were noted: it is impossible to satisfy all the boundary conditions and to evaluate all the stresses and displacements. Then, great difficulties were encountered in solving problems for anisotropic composite materials. Due to this, attention was given to solving problems in stresses, at least in the constraints area. The problem of applying semi-inverse Saint-Venant's method to mechanics of composite materials was brought to the forefront. Such problems require reconsideration of the accumulated practice and its generalization in order to obtain new possibilities of expanded application of classic ideas to new problems and materials on the basis of extended and generalized formulations.

Friedrichs and Dressler [3] and Goldenveiser and Kolos [4] have independently proven that the classical Kirchhoff's plate theory is the main term of the asymptotic expansion (by small parameter of thickness) for the linear theory of thin-wall isotropic bodies. On the other hand, based on their approach the internal solution, which has a value only close to an edge, is determined by a series of boundary value problems. These problems are very complicated to solve, almost as complicated as the initial problem. Saint-Venant's principle may be used for boundary stresses to create boundary conditions in the classic plate theory and also for some external expansions of higher order without any reference to the internal boundary solution. Attempts at obtaining the corresponding boundary conditions for displacements were unsuccessful.

Gregory and Wan [5] applied a general method developed by them for obtaining the proper boundary condition series for arbitrarily defined allowed boundary conditions (without an explicit solution of internal or boundary layer) for a number of special cases of general interest, including cases with defined boundary displacements. Their overall results demonstrate that in order to be strictly correct, the Saint-Venant's principle can be used only to the leading terms of the external solution, i.e. classical plate theory.

Horgan et al. [6–10] investigated various aspects of applying the Saint-Venant's principle to the boundary layer and obtained a number of insightful practical results. The practical conclusions for composites are: effect of the end constraints of samples in mechanical tests, effect of support elements, connections, cuts, etc., in composite structures and limitations of strength of materials formulas when applied to composites. It was established that neglecting the elasticity of the end constraints, generally rationalized by the Saint-Venant's principle, cannot be applied to problems involving composite materials. Particularly, in fiber reinforced composite material the characteristic attenuation length of the end effects is significant, generally several times greater than in isotropic materials. Even though the answers on many of the questions in Saint-Venant's principle discussion in its classical interpretation were obtained, the full analysis of extended physical and mathematical issues emerging with the asymptotic solution in composites' elasticity needs to be carried out.

Semi-inverse Saint-Venant's method in its classical interpretation in the publications is used for obtaining solutions of non-linear problems of elasticity theory, linear problems of porous and graded materials, etc. [10–14]. The wide applicability range of the Saint-Venant's principle and the semi-inverse method may be also explained by that they make it possible to construct insightful analytical solutions, which may serve as a guide for calculation automation by means of numerical methods.

In [15–19] the Saint-Venant's method acquires an extended iteration-based interpretation, allowing to obtain asymptotic analytical solutions without any hypotheses and to satisfy all the boundary conditions. The solution converges satisfying the Banach fixed-point theorem [20].

Saint-Venant's principle is qualitative and, being applied to an end-loaded bar problem for the first time, it states that a statically equivalent to zero system of forces, distributed over a small area, creates only local disturbances. The disturbances decay rapidly with increasing distance from that area and become negligible at sufficiently large distances compared to its dimensions. The stress state in a long prismatic bar, loaded only at the end sections, practically does not depend on the way of surface forces distribution and is determined at some distance from the ends by their resulting vector and resulting moment. However, for example, this formulation is insufficient for the extended theories of thin-walled systems from isotropic and composite material, which include bars, plates, shells and thin-walled bars. Stresses in corners, caused by the changing lateral dimension of the long elastic strip, rise a question about the formulation of attenuation conditions stated for displacements [19] given on a small area on frontal and side surfaces of a thin-walled body. Iteration-based interpretation of the semi-inverse method expands its application range to composite materials [20].

## 2. Generalized formulation of Saint-Venant's principle for stresses and displacements

Let us consider a problem of establishing stress-strain state localization conditions, analogous to the Saint-Venant's conditions, in a long prismatic bar, given the end displacements rather than stresses. Let a strip, modelling the state of the bar, be defined by $0 \le x \le l$, $-1 \le z \le 1$. Long edges of the strip $z \pm 1$ are free from any loading and constraints. On the short edges $x = 0,\ l$ the displacements are defined as

$$u(l,z) = f_1(z);\ w(l,z) = f_2(z);\ u(0,\ z) = f_3(z);\ w(0,z) = f_4(z). \tag{1}$$

On edges $z \pm 1$

$$\sigma_z(x,\ \pm 1) = \tau(x,\ \pm 1) = 0. \tag{2}$$

The solution comes down to finding Airy's stress function $\varphi(x,z)$, which satisfies biharmonic equation

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Stresses in terms of $\varphi(x,z)$ function are calculated as follows:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \qquad \sigma_z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}; \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Deformations are evaluated with the help of elasticity relations

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z); \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x); \qquad \gamma_{xz} = \frac{t_{xz}}{G}.$$

Deformation-displacement formulas allow to determine the displacements

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z.$$

Let us rewrite the equation (3) as follows:

$$-\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4}\right).$$

Integrating it twice over $x$ and twice over $z$, we get

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} dx dx\right) + a(z)x + b(z);$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} dz dz\right) + c(x)z + d(x), \tag{4}$$

where $a, b, c, d$ are arbitrary functions of integration.

Elasticity relationships and deformation-displacement formulas, taking into account (4), yield

$$E\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\iint\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}dzdz\right)+\nu\left[c(x)y+d(x)\right];$$

$$E\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\iint\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}dxdx\right)+\nu\left[a(z)x+b(z)\right]. \tag{5}$$

Let us define in the equation (5)

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)Z_k(z), \tag{6}$$

where the functions $Z_k(z)$ satisfy the equation $Z_k''''=\kappa_k^4Z_k$ and the conditions on the ends $Z_k(\pm1)=Z_k'(\pm1)=0.$ Prime mark designates differentiation with respect to $z$ coordinate. In this case the conditions (2) are satisfied and the solution to equation (2) is sought by the Bubnov – Galerkin method. Functions $X_k(x)$ contain exponential multipliers, which provide the decay of the end effect.

Substituting expression (6) into formula (5) and integrating accordingly, the following is obtained:

$$Eu=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k{}^*\kappa_k{}^2+\frac{\nu}{2}X_k{}'''\frac{1}{\kappa_k{}^2}\right]Z_{k2}+\nu\left[c^*(x)z+d^*(x)\right]+n(z);$$

$$Ew=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k{}''\frac{1}{\kappa_k}+\frac{\nu}{2}X_k{}^{**}\kappa_k{}^3\right]Z_{k3}+\nu\left[a^*(z)x+b^*(z)\right]+m(x). \tag{7}$$

Here $m$ and $n$ are arbitrary functions of integration, the asterisk indicates that integration is carried out with respect to the corresponding coordinate, i.e. $Q^*(t)=\int Q(t)dt$ . $Z_k$ are the eigenfunctions for the problem of free vibration of a bar fixed at both ends and are fairly well examined. For a symmetrical about $z$ axis case they become:

$$Z_k=\cos\kappa_k\cosh\kappa_kz-\cosh\kappa_k\cos\kappa_kz;$$

$$Z_k{}'=\kappa_kZ_{k1}=\kappa_k\left(\cos\kappa_k\sinh\kappa_kz-\cosh\kappa_k\sin\kappa_kz\right);$$

$$Z_k{}''=\kappa_k{}^2Z_{k2}=\kappa_k{}^2\left(\cos\kappa_k\cosh\kappa_kz-\cosh\kappa_k\cos\kappa_kz\right);$$

$$Z_k{}'''=\kappa_k{}^3Z_{k3}=\kappa_k{}^3\left(\cos\kappa_k\sinh\kappa_kz-\cosh\kappa_k\sin\kappa_kz\right), \tag{8}$$

where $\kappa_k$ satisfies the transcendental equation

$$\tan\kappa_k+\tanh\kappa_k=0. \tag{9}$$

For asymmetrical about $z$ axis case

$$Z_k=\cos\kappa_k\sinh\kappa_kz-\cosh\kappa_k\sin\kappa_kz;$$

$$Z_k{}'=\kappa_kZ_{k1}=\kappa_k\left(\cos\kappa_k\cosh\kappa_kz-\cosh\kappa_k\cos\kappa_kz\right);$$

$$Z_k{}''=\kappa_k{}^2Z_{k2}=\kappa_k{}^2\left(\cos\kappa_k\sinh\kappa_kz+\cosh\kappa_k\sin\kappa_kz\right);$$

$$Z_k{}'''=\kappa_k{}^3Z_{k3}=\kappa_k{}^3\left(\cos\kappa_k\cosh\kappa_kz+\cosh\kappa_k\cos\kappa_kz\right), \tag{10}$$

where $\kappa_k$ satisfies the transcendental equation $\tan\kappa_k-\tanh\kappa_k=0$ .

Let us now consider the possibility of satisfying the conditions (1) by representing displacements in the form of the expressions (7). On the end at $x = l$ there must be

$$Ef_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k^{*}\kappa_k^{2} + \frac{\nu}{2}X_k''' \frac{1}{\kappa_k^{2}}\right]Z_{k2} + \nu\left[c^{*}(l)z + d^{*}(l)\right] + n(z);$$

$$Ef_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k'' \frac{1}{\kappa_k} + \frac{\nu}{2}X_k^{**}\kappa_k^{3}\right]Z_{k3} + \nu\left[a^{*}(z)x + b^{*}(z)\right] + m(l). \tag{11}$$

Let us determine the conditions, which must be imposed on the functions $f_1$ and $f_2$, for the expansions (11) to be valid. If the systems of functions $\{Z_{k2}\}$ and $\{Z_{k3}\}$ are full, the arbitrary functions $a^*$, $b^*$, $c^*$, $d^*$, $m$, $n$ must be zero. Let us check the fullness of these systems. May a certain symmetrical with respect to $\alpha$ function $\xi_1(\alpha)$ on the interval $(-1,1)$ be expanded in a series by functions $Z_{k2}(\kappa_k\alpha)$ and antisymmetric function $\xi_2(\alpha)$ in a series by functions $Z_{k3}(\kappa_k\alpha)$. Thus,

$$\xi_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_{k2}(\kappa_k\alpha); \qquad \xi_2(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Z_{k3}(\kappa_k\alpha); \tag{12}$$

$$a_k = \frac{1}{N_k}\int_{-1}^{1}\xi_1(\beta)Z_{k2}(\kappa_k\beta)d\beta; \qquad b_k = \frac{1}{N_k}\int_{-1}^{1}\xi_2(\beta)Z_{k1}(\kappa_k\beta)d\beta, \tag{13}$$

where $N_k(\kappa_k) = \int_{-1}^{1} Z_{k2}^{2}(\kappa_k\beta)d\beta$.

Functions $Z_{k1}$, $Z_{k2}$, $Z_{k3}$ satisfy the following orthogonality conditions:

$$\int_{-1}^{1} Z_{k2}(\kappa_k\beta)Z_{k2}(\kappa_n\beta)d\beta = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ N_k & (n = k) \end{cases};$$

$$\int_{-1}^{1} Z_{k3}(\kappa_k\beta)Z_{k1}(\kappa_n\beta)d\beta = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ -N_k & (n = k) \end{cases}.$$

For symmetric functions $Z_{k2}$ it will be $N_k = \cosh^2\kappa_k + \cos^2\kappa_k$.

Let us compose expressions for partial sums of the series (12) substituting coefficients (13) into them:

$$S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{N_k}Z_{k2}(\kappa_k\alpha)\int_{-1}^{1}\xi_1(\beta)Z_{k2}(\kappa_k\beta)d\beta;$$

$$S_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = -\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{N_k}Z_{k3}(\kappa_k\alpha)\int_{-1}^{1}\xi_1(\beta)Z_{k1}(\kappa_k\beta)d\beta. \tag{14}$$

Therefore, the problem of correspondence of left and right parts in the formulas (12) results in evaluating the limits of the respective sums $S_K(Z_{k2}, Z_{k2})$, $S_K(Z_{k3}, Z_{k1})$ when $K \to \infty$. Changing the order of summation and integration in (14), the expressions for partial sums can be written as follows:

$$S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \int_{-1}^{1}\xi_1(\beta)\sum_{k=1}^{K}\frac{Z_{k2}(\kappa_k\alpha)Z_{k2}(\kappa_k\beta)}{N_k}d\beta = \int_{-1}^{1}\xi_1(\beta)Q_K(Z_{k2}, Z_{k2})d\beta;$$

$$S_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\int_{-1}^{1}\xi_2\left(\beta\right)\sum_{k=1}^{K}\frac{Z_{k3}\left(\kappa_k\alpha\right)Z_{k1}\left(\kappa_k\beta\right)}{N_k}d\beta=-\int_{-1}^{1}\xi_2\left(\beta\right)Q_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)d\beta. \tag{15}$$

Let us also consider the same way as in [21] the contour integrals corresponding to the relationships (15):

$$I_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{R_K}\frac{Z_{k2}\left(\zeta\alpha\right)Z_{k2}\left(\zeta\beta\right)}{\cosh^2\zeta\cos^2\zeta\psi\left(\zeta\right)}d\zeta;$$

$$I_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{R_K}\frac{Z_{k3}\left(\zeta\alpha\right)Z_{k1}\left(\zeta\beta\right)}{\cosh^2\zeta\cos^2\zeta\psi\left(\zeta\right)}d\zeta, \tag{16}$$

which are evaluated by going in positive direction around a circle of radius $R_K$, circumscribed from the origin in the complex plane $\zeta$. Radius $R_K$ is chosen such that radiuses $2K$ of real and $2K$ imaginary roots of the equation (9) get inside the circle. The contour also does not pass the points $\zeta_k^{(0)}=\pi\left(2k+1\right)/2$ and $\zeta_k^{(1)}=\pi i\left(2k+1\right)/2$, which are the roots of the equation $\cos\zeta_k^{(0)}=0$ and $\cosh\zeta_k^{(1)}=0$. Then, every integral in the formulas (16) is equal to the sum of subtractions by all special points inside the circle $R_K$.

With respect to the stated for the formulas (16) above and taking into account that $N_K=\cosh\zeta\cos\zeta\psi\left(\zeta\right)$, we obtain

$$I_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=4Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)-2\sum_{k=-K}^{K}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta-2;$$

$$I_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=-4Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)+2\sum_{k=-K}^{K}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta. \tag{17}$$

The last term in the first expression (17) is subtraction for the integrand of the first integral from (16). Subtraction in zero for the second integral is equal to zero. The expressions (17) lead to

$$\lim_{K\to 0}Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta-\frac{1}{2};$$

$$\lim_{K\to 0}Q_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta. \tag{18}$$

Substituting the expressions (18) into the formulas (15), we obtain

$$\lim_{K\to\infty}S_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta d\beta-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)d\beta=\xi_1\left(\alpha\right)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)d\beta;$$

$$\lim_{K\to\infty}S_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_2\left(\beta\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sin\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\sin\frac{2k+1}{2}\pi\beta d\beta=\xi_2\left(\alpha\right). \tag{19}$$

Thus, the first series in the expression (12) converges to the original function $\xi_1$, if

$$\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)d\beta=0. \tag{20}$$

The second series converges to the function $\xi_2$ unconditionally.

Let us now consider the case of expanding the asymmetric with respect to $\alpha$ function $\xi_3(\alpha)$ on the interval $(-1,1)$ in a series by antisymmetric functions $Z_{k2}(\kappa_k\alpha)$ and symmetric function $\xi_4(\alpha)$ in a series by antisymmetric functions $Z_{k2}(\kappa_k\alpha)$ from the definitions (10). Operating the same way, we obtain the following expressions for the corresponding contour integrals:

$$I_K(Z_{k2},Z_{k2}) = -4Q_K(Z_{k2},Z_{k2}) + 2\sum_{k=-K}^{K} \sin\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \sin\frac{2k+1}{2}\pi\beta - 6\alpha\beta;$$

$$I_K(Z_{k3},Z_{k1}) = -4Q_K(Z_{k3},Z_{k1}) + 2\sum_{k=-K}^{K} \cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta - 3\left(1-\beta^2\right). \qquad (21)$$

In both cases the last terms are subtractions at the point $\zeta = 0$. Proceeding to the limit when $K \to \infty$ we obtain the following for the partial sums:

$$\lim_{K\to\infty} S_K(Z_{k2},Z_{k2}) = \xi_3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha\int_{-1}^{1}\xi_3(\beta)\beta d\beta;$$

$$\lim_{K\to\infty} S_K(Z_{k3},Z_{k1}) = \xi_4(\alpha) - \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\xi_4(\beta)\left(1-\beta^2\right)d\beta. \qquad (22)$$

The first series converges to the original function $\xi_3$, and the second series to the function $\xi_4$, if

$$\int_{-1}^{1}\xi_3(\beta)\beta d\beta = 0; \qquad \int_{-1}^{1}\xi_4(\beta)\left(1-\beta^2\right)d\beta = 0. \qquad (23)$$

Let us elaborate the meaning of the expressions (20) and (23). Let us consider a problem of a cantilever bar of unit thickness, length $l$ and height equal to two. Then $f_3 = f_4 = 0$ in the expressions (1) as for a fixed end. At $x = l$ the non-zero first two displacements (1) are defined. By removing the constraints defining these displacements and substituting them by normal force $N$, shear force and bending moment $M$, statically equivalent to stresses, which do not decay away from $x = l$ edge, we obtain

$$\sigma_x = \frac{1}{2}N + \frac{3}{2}Mz + \frac{3}{2}Q(l-x); \qquad \sigma_z = 0; \qquad \tau_{xz} = \frac{3}{4}\left(1-z^2\right).$$

Let us calculate the work done by the non-decaying stresses on the displacements (1) at the $x = l$ end:

$$U = \int_{-1}^{1}\left[\sigma_x f_1(z) + \tau_{xz} f_2(z)\right]dz = \int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{N}{2} + \frac{3}{2}Mz\right)f_1(z) + \frac{3}{4}Q\left(1-z^2\right)f_2(z)\right]dz. \qquad (24)$$

Imposing a requirement that the emerging in the strip non-decaying stresses do not perform any work on the defined displacements of the bar end, the following expressions are obtained, owing to the independence of the values $N, M, Q$:

$$\int_{-1}^{1} f_1(z)dz = 0; \qquad \int_{-1}^{1} f_1(z)zdz = 0; \qquad \int_{-1}^{1} f_2(z)\left(1-z^2\right)dz = 0,$$

which correspond to the conditions (20), (23), where the functions $\xi_1 + \xi_2$ and $\xi_4$ match in meaning with $f_1$ and $f_2$ respectively.

Apparently, analogous to the famous Saint-Venant's principle formulated for the cases of stresses on a small area, it is possible to formulate the locality of stress-strain state in elastic body, specified by displacements on a small area.

Displacements specified on a small area of elastic body produce only local stress-strain state, which decays faster with increasing distance from that area and becomes negligibly small at sufficiently large distances compared to the area dimensions, if the resulting vector and resulting moment, statically equivalent to the stresses on that area, do not produce work on the specified displacements.

### 3. Generalized iteration-based formulation of semi-inverse Saint-Venant's method

Let us consider a problem of generalizing the semi-inverse Saint-Venant's method to iteration-based form without resolving the equations in forces and moments by constructing an asymptotic analytical solution. The issues associated with existence and uniqueness of the solutions are formulated in functional analysis as a question about existence and uniqueness of a fixed point when a certain metric space is mapped onto itself. Among the various criteria of existence and uniqueness of a fixed point the most general one is the contraction mapping principle [21], which rationalises the convergence of simple iterations.

May a long rectangular strip be located in orthogonal coordinate system $x^*, z^*$ such that $0 \le x^* \le l$, $-h \le z^* \le h$. The long edges of the strip carry some arbitrary load, the short edges may be loaded or constrained. The plane elasticity equations describing the stress-strain state of such strip are taken as

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0;$$

$$\sigma_x^* = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z\right); \quad \tau^* = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma; \quad \sigma_z^* = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x\right);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}; \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}; \; \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Let us introduce the dimensionless coordinates $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, dimensionless displacements $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ along the axes $x^*, z^*$ respectively, and dimensionless stresses $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$, $\tau = \tau^*/E$ (dimensional displacements, stresses and loads are marked by an asterisk). Dimensionless equations with these variables become

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z\right); \quad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma; \quad \sigma_z = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x\right);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \varepsilon_x = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}.$$

May the above equations be modified such that it is possible to successively calculate the remaining unknown variables by choosing some arbitrary $w_0$ и $\gamma_0$ as initial approximation values

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma; \qquad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma; \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \tau}{\partial x};$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \sigma_x = \varepsilon_x + \nu\sigma_z; \qquad \varepsilon_z = \left(1-\nu^2\right)\sigma_z - \nu\varepsilon_x; \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z;$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \qquad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; \qquad \gamma = 2(1+\nu)\tau$$

by the method of successive approximations with increasing index $(n)$ with respect to the following iteration scheme:

$$\frac{\partial u_{(n)}}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial w_{(n)}}{\partial x}+\gamma_{(n)};\quad \tau_{(n)}=\frac{1}{2(1+\nu)}\gamma_{(n)};$$

$$\frac{\partial\sigma_{z(n)}}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial\tau_{(n)}}{\partial x};\quad \varepsilon_{x(n)}=\varepsilon\frac{\partial u_{(n)}}{\partial x};\quad \sigma_{x(n)}=\varepsilon_{x(n)}+\nu\sigma_{z(n)};$$

$$\varepsilon_{z(n)}=\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(n)}-\nu\varepsilon_{x(n)};\quad \frac{\partial w_{(n)}}{\partial z}=\varepsilon_{z(n)};$$

$$\frac{\partial\tau_{(n+1)}}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{x(n)}}{\partial x};\quad \frac{\partial\sigma_{z(n+1)}}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial\tau_{(n+1)}}{\partial x};\quad \gamma_{(n+1)}=2(1+\nu)\tau_{(n+1)}\cdots$$

From this point on the lower index in parenthesis indicates the number of approximation.

We will be interested in the equations of zero and first approximations when choosing values in accordance with the semi-inverse Saint-Venant method in the form of initial approximation

$$w_0=w_0(x);\qquad \gamma_{(0)}=\gamma_0(x).$$

Due to the initial approximation values being independent from $z$, all the other remaining unknowns are calculated as a result of the quadratures by $z$:

$$w_{(0)}=w_0(x);\qquad \gamma_{(0)}=\gamma_0(x);\qquad u_{(0)}=-\varepsilon\int w_0'dz+\int\gamma_0 dz+u_0(x);$$

$$\tau_0=\gamma_0/2(1+\nu);\qquad \sigma_{z(0)}=-\varepsilon\int\tau_0'dz+\sigma_{z0}(x);\qquad \varepsilon_{x(0)}=\varepsilon u_{(0)}';$$

$$\sigma_{x(0)}=\varepsilon_{x(0)}+\nu\sigma_{z(0)};\qquad \tau_{(1)}=-\varepsilon\int\sigma_{x(0)}'dz+\tau_0(x);\qquad \gamma_{(1)}=2(1+\nu)\tau_{(1)};$$

$$\varepsilon_{z(0)}=\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(0)}-\nu\varepsilon_{x(0)};\qquad w_{(1)}=\int\varepsilon_{z(0)}dz+w_0(x).$$

Lower index 0 indicates the arbitrary functions of integration. Calculation of the next values by the previous ones is accompanied by multiplying by a small parameter $\varepsilon$ in order to write the unknowns in the form of asymptotic series based on the power of $\varepsilon$. It is clear that on this stage of iterations four arbitrary functions $w_0=w_0(x)$, $\gamma_0=\gamma_0(x)$, $u_0=u_0(x)$, $\sigma_{z0}=\sigma_{z0}(x)$ are obtained, which allow to satisfy four boundary conditions on the long edges of the strip. From this point on dashes indicate differentiation over $x$; zero without parenthesis specifies the arbitrary functions of integration that depend only on $x$.

Now it is possible to write the expressions for all the unknowns in the problem, assuming that they describe the produced displacements, deformations and stresses sufficiently accurate:

$$w\approx w_0+\left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0}-\varepsilon\nu u_0'\right]z+\left[\varepsilon^2\nu w_0''-\varepsilon(1+\nu)^2\tau_0'\right]\frac{z^2}{2};$$

$$u\approx u_0+\left[-\varepsilon w_0'+2(1+\nu)\tau_0\right]z;$$

$$\varepsilon_x\approx\varepsilon u_0'+\left[-\varepsilon^2 w_0''+\varepsilon(2+\nu)\tau_0'\right]z;$$

$$\sigma_x\approx\varepsilon u_0'+\nu\sigma_{z0}+\left[-\varepsilon^2 w_0''+(2+\nu)\varepsilon\tau_0'\right]z;$$

$$\varepsilon_z\approx\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0}-\varepsilon\nu u_0'+\left[\varepsilon^2\nu w_0''-\varepsilon(1+\nu)^2\tau_0'\right]z;$$

$$\tau \approx \tau_0 - \left(\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon\nu\sigma_{z0}'\right)z + \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''\right]\frac{z^2}{2};$$

$$\sigma_z \approx \sigma_{z0} - \varepsilon\tau_0' z + \left(\varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2\nu\sigma_{z0}''\right)\frac{z^2}{2} + \left[-\varepsilon^4 w_0'''' + (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'''\right]\frac{z^3}{6}. \quad (25)$$

Values $\tau$ and $\sigma_z$ are given in the first approximation, the rest are in the zeroth approximation. Boundary conditions that correspond to the loading conditions must be satisfied on the long edges of the strip $z^* = \pm h$. In dimensionless form these conditions are written as

$$\sigma_z = Z_+(x),\ \tau = X_+(x) \text{ при } z = 1;$$

$$\sigma_z = Z_-(x),\ \tau = X_-(x) \text{ при } z = -1. \quad (26)$$

Dimensionless loads are obtained by dividing the dimensional ones by stiffness $E$. Let us assume that – the loads are slowly changing functions of coordinate $x$. Let the conditions (26) be satisfied by the first approximation values from the relationships (25). As a result the equations with respect to the unknowns $w_0, \tau_0$, defining the bending problem:

$$\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2\tau_0 = X_+ + X_-;$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' + (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' - 6\varepsilon\tau_0' = 3(Z_+ - Z_-), \quad (27)$$

and with respect to $u_0, \sigma_{z0}$, defining the axial load problem:

$$-\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon\nu\sigma_{z0}' = (X_+ - X_-)/2;$$

$$\varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2\nu\sigma_{z0}'' + 2\sigma_{z0} = Z_+ + Z_-, \quad (28)$$

are obtained.

Equations (27) and (28), assuming small variability of the functions $\tau_0$ and $\sigma_{z0}$ after removing the values with small multipliers, are brought to the classic form

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} + 2\tau_0^s = X_+ + X_-;$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''} - 6\varepsilon\tau_0^{s'} = 3(Z_+ - Z_-); \quad (29)$$

$$-\varepsilon^2 u_0^{s''} - \varepsilon\nu\sigma_{z0}^{s}{}' = (X_+ - X_-)/2;$$

$$\varepsilon^3 u_0^{s'''} + 2\sigma_0^s = Z_+ + Z_-, \quad (30)$$

confirming that equations (27) and (28) generalize the classic representations of the semi-inverse Saint-Venant's method and their solutions depend on $x$. The upper index $s$ indicates the association with slowly varying components of the stress-strain state.

Subtracting by pair the equations (29) from (27) and equations (30) from (28) and taking into account assumptions $w_0^{s'} \sim \varepsilon^0 w_0^s(x)$, $\tau_0^{s'} \sim \varepsilon^0\tau_0^s(x)$, $\tau_0^{q'} \sim \varepsilon^{-1}\tau_0^q(x/\varepsilon)$, it is possible to obtain singularly perturbed equations indicated by index $q$:

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0; \quad (31)$$

$$(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0^{q'''} - 6\varepsilon\tau_0^{q'} = 0. \quad (32)$$

Their solutions differ by a constant that must be removed as a non-conforming to the condition of large variability. Therefore, both solutions of the equations (31) and (32) match:

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp\left(-k\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \\ C_2 \exp\left(-k\dfrac{(1-x)}{\varepsilon}\right) \end{cases}.$$

As they depend from the argument $x/\varepsilon$, they can be used for satisfying lost boundary conditions and smoothing out discontinuities in slowly varying classical solutions. The upper solution is true when $x \geq 0$, and the lower is true when $x \leq 1$. If taking $C_1 = -\dfrac{k}{2\varepsilon}$, then $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{k}{\varepsilon}\exp\left(-k\dfrac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$. That means that the equation (31) allows to establish a relationship between the ordinary numerical function $\tau_0^q$ and the generalized Dirac $\delta$ function.

## 4. Conclusion

Two Saint-Venant's methods are analysed and modernized. The first method involves evaluation of stress-strain state components for the purpose of simplifying the problem statement of seeking the solution by apriori removal of rapidly varying and decaying solution components. It was introduced because Saint-Venant took into account the complexity of finding general solutions. Hence, by developing the method of solving the problem he came to inventing the principle that rationalizes the components lost in the process of constructing the solution, in particular due to the transition from stresses to forces and moments (stress resultants). An addition to his classical principle for the case of displacements specified on a small area was formulated on an example of a long elastic strip, which is absent in the literature. However, both the Saint-Venant's principle and the generalized principle cannot give any recommendations to its constructive use, but are practical for mechanical interpretation of the partial approximate solutions obtained by any method.

The second method was named semi-inverse, because Saint-Venant suggested to specify a part of the unknown variables and to resolve the rest. With that Saint-Venant moved from stresses to forces and moments, rationalizing the transition by the principle. It can be stated that all the thin-walled body theories are based on forces and moments, assuming the rationalization of transition to them by the Saint-Venant's principle. It is shown in this paper that if taking the idea of specifying a part of the unknowns, but not transitioning to forces and moments, the semi-inverse method may be expanded into a constructive one and will be converging independently of the choice of the initial approximation. This possibility is based on the Poincare small parameter method, Picard – Lindelöf iteration method and Banach's fixed point method. With that a transformation of a complex operator in the problem to a series of simple integratable operators and a methodology of separating rapidly varying and slowly varying components of the general solution, provided the satisfaction of all the boundary conditions of the original problem, are proposed. The calculation process may be interpreted as splitting the complex operator into four consecutive Picard's operators with respect to lateral coordinate and three – with respect to longitudinal coordinate. The accuracy of the obtained solution is evaluated by the order of the first removed term by $\varepsilon$ for slowly varying values. Then the semi-inverse method becomes independent from the Saint-Venant's principle.

**RUS**

## 1. Введение

Основным фактором для отказа исследователю в признании его работ становятся вполне здравое и обоснованное недоверие к чересчур нестандартному и вызывающему. Если вернуться к образу сферы изученного, то любые попытки сильно выйти за ее границы с большой вероятностью окажутся в конечном счете провальными. Таковы, например, многочисленные попытки создать «теорию всего» или, наоборот, ниспровергнуть какую-нибудь краеугольную теорию – относительности или эволюции. Подобные «теории всего» и «ниспровержения основ» выглядят слишком подозрительно, чтобы вызвать желание в них всерьез разбираться. В данном случае априорное недоверие к излишне странному и претенциозному выполняет в науке функцию «санитара леса» – экономного способа избавиться от потенциально деструктивных явлений.

Механике сплошных сред и близкой к ней области математики уравнений в частных производных свойственно поэтапное развитие основных, выдвинутых «отцами науки» идей. Постепенное развитие взглядов на принципы, лежащие в основе механики деформируемого тела, рост той ветви математического анализа, которая применяется при вычислениях, и накопление практических правил, получаемых путем истолкования математических результатов, приводят к тому, что одни принципы заменяются другими, более общими, число их уменьшается и данная область приводится во все более тесную связь с иными отделами физики, причем одинаковые физические принципы служат в последнем счете основой их всех.

Считается, что теория упругости основывается на двух основных идеях Сен-Венана: принцип и полуобратный метод. Принцип Сен-Венана, названный в честь Адемара Жан-Клода де Сен-Венана, может быть выражен следующим образом: «...разница между эффектами двух разных, но статически эквивалентных нагрузок становится очень малой при достаточно больших расстояниях от нагрузки». Это заявление было опубликовано Сен-Венаном в 1855 г. [1]. Позднее Мизес выдвинул предположение, что принцип неприменим к телам конечных размеров [2]. В нашей статье это утверждение опровергается.

Решение в усилиях и моментах (stress resultants) задач для тонкостенных систем долгое время определяло направление исканий исследователей. После построения основных теорий, пластин, оболочек и тонкостенных систем были отмечены противоречия в них: невозможность выполнения всех граничных условий и определения всех напряжений и перемещений. Далее большие трудности встретились при решении задач для анизотропных композиционных материалов. В связи с этим было обращено внимание на решение задач в напряжениях, хотя бы в области закреплений. На первый план вышла проблема применения полуобратного метода Сен-Венана к механике композиционных материалов. Такие задачи требуют переосмысления накопленного опыта и его обобщения с целью получения на основе расширенных и обобщенных формулировок новых возможностей применения классических идей к новым задачам и материалам.

Фридрихс и Дресслер [3] и Гольденвейзер и Колос [4] независимо друг от друга показали, что классическая теория пластины Кирхгофа является главным членом асимптотического разложения (по малому параметру толщины) для линейной теории тонкостенных изотропных тел. При их подходе внутреннее решение, имеющее значение лишь вблизи края, определяется последовательностью краевых задач, которые очень трудно решить, почти так же трудно, как решить исходную задачу. В случае напряжений на краю принцип Сен-Венана может быть использован для создания граничных условий в классической теории пластин, а также для некоторых внешних разложений более высокого порядка без какой-либо ссылки на внутреннее краевое решение. Попытки получить соответствующие граничные условия для перемещений не привели к успеху.

Грегори и Ван [5] применили разработанный ими метод получения правильной последовательности граничных условий для произвольно заданных допустимых краевых условий (без явного решения внутреннего или пограничного слоя решения) в ряде специальных случаев, представляющих общий интерес, в том числе случаев с заданными краевыми перемещениями. Их результаты показывают, что принцип Сен-Венана следует применять только к ведущим членам внешнего решения, то есть к классической теории пластины.

Horgan с соавторами [6–10] исследовали разные аспекты применения принципа Сен-Венана в пограничном слое и получили много интересных практических результатов. Для композитов было определено влияние закреплений концов образцов в механических испытаниях, влияние крепежных элементов, соединений, вырезов и тому подобного в композитных структурах, выявлена ограниченность формул сопротивления материалов при применении к композитам. Установлено, что пренебрежение упругостью концевых закреплений, как правило, оправдывающихся принципом Сен-Венана, не применимо в задачах, связанных с композитными материалами. В частности, для армированного волокнами композиционного материала характерная длина затухания концевых эффектов является значительной, в общем случае в несколько раз длиннее, чем в случае изотропных материалов. Хотя на многие из обсуждаемых вопросов принципа Сен-Венана в его классической интерпретации ответы были получены, должен быть выполнен полный анализ более широких физических и математических вопросов, возникающих в связи с асимптотикой решений в упругости композитов.

Полуобратный метод Сен-Венана в его классической интерпретации в статьях используется для получения решений нелинейных задач теории упругости, линейных задач для пористых и градиентных материалов и т. д. [10–14]. Широту применения полуобратного метода и принципа Сен-Венана можно объяснить еще и тем, что они дают возможности, если удастся, построить понимаемые аналитические решения, которые могут служить руководством для автоматизации расчетов численными методами.

В статьях [15–19] метод Сен-Венана приобретает расширенную итерационную трактовку, позволяя получить асимптотические аналитические решения без каких–либо гипотез и выполнить все граничные условия. Решение сходится, удовлетворяя теореме Банаха о неподвижной точке [20].

Принцип Сен-Венана имеет качественный характер и, будучи впервые сформулированным в применении к задаче о нагруженном по концам стержне, состоит в утверждении, что статически эквивалентная нулю система сил, распределенных по малому участку поверхности, создает лишь локальные возмущения, быстро затухающие по мере удаления от этого участка и становящиеся пренебрежимо малыми на расстояниях, достаточно больших по сравнению с его размерами. В длинном призматическом стержне, нагруженном только по концевым сечениям, напряженное состояние практически не зависит от способа распределения по нему поверхностных сил и определяется на некотором расстоянии от концов их главным вектором и главным моментом. Однако, например, для уточненных теорий тонкостенных систем из изотропного и композиционного материала, к которым относятся стержни, пластины, оболочки и тонкостенные стержни, такой формулировки принципа становится недостаточно. Вызванные изменением поперечного размера длинной упругой полосы напряжения в углах ставят вопрос о формулировке условий затухания, определенных для перемещений [19], заданных на малом участке лицевой и боковой поверхностей тонкостенного тела. Итерационная трактовка полуобратного метода расширяет возможности его применения к композиционным материалам [20].

## 2. Обобщенная формулировка принципа Сен-Венана для напряжений и перемещений

Рассмотрим задачу об установлении аналогичных условиям Сен-Венана условий локализации напряженно-деформированного состояния в длинном призматическом стержне, на концах которого заданы не напряжения, а перемещения. Пусть полоса, с помощью которой моделируется состояние стержня, задана неравенствами $0 \le x \le l$, $-1 \le z \le 1$. Длинные края полосы $z \pm 1$ свободны от каких-либо нагрузок и закреплений. На коротких сторонах $x = 0,\ l$ заданы перемещения

$$u(l,z) = f_1(z);\ w(l,z) = f_2(z);\ u(0,\ z) = f_3(z);\ w(0,z) = f_4(z). \tag{1}$$

На краях $z \pm 1$

$$\sigma_z(x,\ \pm 1) = \tau(x,\ \pm 1) = 0. \tag{2}$$

Решение сводится к нахождению функции Эри $\varphi(x,z)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Напряжения через функцию $\varphi(x,z)$ вычисляются по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \qquad \sigma_z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}; \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Деформации находятся с помощью соотношений упругости

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z); \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x); \qquad \gamma_{xz} = \frac{t_{xz}}{G}.$$

Формулы деформации – перемещения дают возможность определить перемещения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z.$$

Перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$-\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4}\right).$$

Интегрируя его дважды по $x$ и дважды по $z$, получим

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} dxdx\right) + a(z)x + b(z);$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} dzdz\right) + c(x)z + d(x), \tag{4}$$

где $a, b, c, d$ – произвольные функции интегрирования.

Соотношения упругости и формулы деформации – перемещения с учетом (4) дают

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} dzdz\right) + \nu\left[c(x)y + d(x)\right];$$

$$E\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} dxdx\right) + \nu\left[a(z)x + b(z)\right]. \tag{5}$$

Положим в уравнении (5)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Z_k(z), \tag{6}$$

где функции $Z_k(z)$ удовлетворяют уравнению $Z_k'''' = \kappa_k^4 Z_k$ и условиям на концах $Z_k(\pm 1) = Z_k'(\pm 1) = 0$. Штрихом обозначено дифференцирование по координате $z$. В этом случае условия (2) выполнены, а решение уравнения (2) разыскивается методом Бубнова – Галеркина. Функции $X_k(x)$ содержат экспоненциальные множители, обеспечивающие затухание концевого воздействия.

Подставив выражение (6) в формулы (5) и интегрируя соответствующим образом, получим выражения для перемещений

$$Eu = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k^{*}\kappa_k^{\,2} + \frac{\nu}{2}X_k'''\frac{1}{\kappa_k^{\,2}}\right]Z_{k2} + \nu\left[c^{*}(x)z + d^{*}(x)\right] + n(z);$$

$$Ew = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k''\frac{1}{\kappa_k} + \frac{\nu}{2}X_k^{**}\kappa_k^{\,3}\right]Z_{k3} + \nu\left[a^{*}(z)x + b^{*}(z)\right] + m(x). \tag{7}$$

Здесь $m$ и $n$ произвольные функции интегрирования, звездочка означает, что произведено интегрирование по соответствующей координате, то есть $Q^{*}(t) = \int Q(t)dt$. Функции $Z_k$ являются собственными для задачи о собственных колебаниях защемленной по концам балки и достаточно хорошо исследованы. Для симметричного по координате $z$ случая они имеют вид

$$Z_k = \cos\kappa_k \cosh\kappa_k z - \cosh\kappa_k \cos\kappa_k z;$$

$$Z_k' = \kappa_k Z_{k1} = \kappa_k\left(\cos\kappa_k \sinh\kappa_k z - \cosh\kappa_k \sin\kappa_k z\right);$$

$$Z_k'' = \kappa_k^{\,2} Z_{k2} = \kappa_k^{\,2}\left(\cos\kappa_k \cosh\kappa_k z - \cosh\kappa_k \cos\kappa_k z\right);$$

$$Z_k''' = \kappa_k^{\,3} Z_{k3} = \kappa_k^{\,3}\left(\cos\kappa_k \sinh\kappa_k z - \cosh\kappa_k \sin\kappa_k z\right), \tag{8}$$

где $\kappa_k$ удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\tan\kappa_k + \tanh\kappa_k = 0. \tag{9}$$

Для антисимметричного по $z$ случая

$$Z_k = \cos\kappa_k \sinh\kappa_k z - \cosh\kappa_k \sin\kappa_k z;$$

$$Z_k' = \kappa_k Z_{k1} = \kappa_k\left(\cos\kappa_k \cosh\kappa_k z - \cosh\kappa_k \cos\kappa_k z\right);$$

$$Z_k'' = \kappa_k^2 Z_{k2} = \kappa_k^2\left(\cos\kappa_k \sinh\kappa_k z + \cosh\kappa_k \sin\kappa_k z\right);$$

$$Z_k''' = \kappa_k^3 Z_{k3} = \kappa_k^3\left(\cos\kappa_k \cosh\kappa_k z + \cosh\kappa_k \cos\kappa_k z\right), \tag{10}$$

где $\kappa_k$ удовлетворяет трансцендентному уравнению $\tan\kappa_k - \tanh\kappa_k = 0.$

Рассмотрим теперь возможность выполнения условий (1) с помощью представления перемещений в виде выражений (7). На конце при $x = l$ должно быть

$$Ef_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k^{*}\kappa_k^2 + \frac{\nu}{2}X_k'''\frac{1}{\kappa_k^2}\right]Z_{k2} + \nu\left[c^*(l)z + d^*(l)\right] + n(z);$$

$$Ef_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\nu}{2}\right)X_k''\frac{1}{\kappa_k} + \frac{\nu}{2}X_k^{**}\kappa_k^3\right]Z_{k3} + \nu\left[a^*(z)x + b^*(z)\right] + m(l). \tag{11}$$

Определим условия, которые должны быть наложены на функции $f_1$ и $f_2$ для того, чтобы разложения (11) имели место. Если системы функций $\{Z_{k2}\}$ и $\{Z_{k3}\}$ полны, произволы интегрирования $a^*, b^*, c^*, d^*, m, n$ должны быть положены нулями. Проверим полноту этих систем. Разложим некоторую симметричную по $\alpha$ функцию $\xi_1(\alpha)$ на интервале $(-1,1)$ в ряд по функциям $Z_{k2}(\kappa_k\alpha)$ и антисимметричную функцию $\xi_2(\alpha)$ в ряд по функциям $Z_{k3}(\kappa_k\alpha)$. Таким образом,

$$\xi_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_{k2}(\kappa_k\alpha); \qquad \xi_2(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Z_{k3}(\kappa_k\alpha); \tag{12}$$

$$a_k = \frac{1}{N_k}\int_{-1}^{1}\xi_1(\beta)Z_{k2}(\kappa_k\beta)\,d\beta; \qquad b_k = \frac{1}{N_k}\int_{-1}^{1}\xi_2(\beta)Z_{k1}(\kappa_k\beta)\,d\beta, \tag{13}$$

где $N_k(\kappa_k) = \int_{-1}^{1} Z_{k2}^2(\kappa_k\beta)\,d\beta$.

Функции $Z_{k1}$, $Z_{k2}$, $Z_{k3}$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} Z_{k2}(\kappa_k\beta)Z_{k2}(\kappa_n\beta)\,d\beta = \begin{cases} 0 & (n \ne k) \\ N_k & (n = k) \end{cases};$$

$$\int_{-1}^{1} Z_{k3}(\kappa_k\beta)Z_{k1}(\kappa_n\beta)\,d\beta = \begin{cases} 0 & (n \ne k) \\ -N_k & (n = k) \end{cases}.$$

Для симметричных функций $Z_{k2}$ будет $N_k = \cosh^2\kappa_k + \cos^2\kappa_k$.

Составим выражения для частичных сумм рядов (12), подставив в них коэффициенты (13):

$$S_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{N_k}Z_{k2}\left(\kappa_k\alpha\right)\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)Z_{k2}\left(\kappa_k\beta\right)d\beta;$$

$$S_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=-\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{N_k}Z_{k3}\left(\kappa_k\alpha\right)\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)Z_{k1}\left(\kappa_k\beta\right)d\beta. \qquad (14)$$

Следовательно задача о соответствии левых и правых частей в формулах (12) сводится к нахождению пределов соответствующих сумм $S_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)$, $S_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)$ при $K\to\infty$. Изменив порядок суммирования и интегрирования в (14), запишем выражения для частичных сумм в следующем виде:

$$S_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)\sum_{k=1}^{K}\frac{Z_{k2}\left(\kappa_k\alpha\right)Z_{k2}\left(\kappa_k\beta\right)}{N_k}d\beta=\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)d\beta;$$

$$S_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\int_{-1}^{1}\xi_2\left(\beta\right)\sum_{k=1}^{K}\frac{Z_{k3}\left(\kappa_k\alpha\right)Z_{k1}\left(\kappa_k\beta\right)}{N_k}d\beta=-\int_{-1}^{1}\xi_2\left(\beta\right)Q_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)d\beta. \qquad (15)$$

Рассмотрим, так же как и в [21], соответствующие соотношениям (15) контурные интегралы

$$I_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{R_K}\frac{Z_{k2}\left(\zeta\alpha\right)Z_{k2}\left(\zeta\beta\right)}{\cosh^2\zeta\cos^2\zeta\psi\left(\zeta\right)}d\zeta;$$

$$I_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{R_K}\frac{Z_{k3}\left(\zeta\alpha\right)Z_{k1}\left(\zeta\beta\right)}{\cosh^2\zeta\cos^2\zeta\psi\left(\zeta\right)}d\zeta, \qquad (16)$$

вычисленные при обходе в положительном направлении по кругу радиуса $R_K$, описанному из начала координат в комплексной плоскости $\zeta$. Радиус $R_K$ выбираем таким образом, чтобы внутрь окружности попали радиусы $2K$ вещественных и $2K$ мнимых корней уравнения (9). Контур также не проходит через точки $\zeta_k^{(0)}=\pi\left(2k+1\right)/2$ и $\zeta_k^{(1)}=\pi i\left(2k+1\right)/2$, являющиеся корнями уравнения $\cos\zeta_k^{(0)}=0$ и $\cosh\zeta_k^{(1)}=0$. Тогда каждый интеграл в формулах (16) равен сумме вычетов по всем особым точкам внутри круга $R_K$.

В соответствии со сказанным для формул (16) и учитывая, что $N_K=\cosh\zeta\cos\zeta\psi\left(\zeta\right)$, получаем

$$I_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=4Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)-2\sum_{k=-K}^{K}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta-2;$$

$$I_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=-4Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)+2\sum_{k=-K}^{K}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta. \qquad (17)$$

Последний член в первом выражении (17) есть вычет для подынтегрального выражения первого интеграла из (16). Вычет в нуле для второго интеграла равен нулю. Из выражений (17) следует, что

$$\lim_{K\to 0}Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta-\frac{1}{2};$$

$$\lim_{K\to 0}Q_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta. \qquad (18)$$

Подставив выражения (18) в формулы (15), получим

$$\lim_{K\to\infty} S_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta d\beta-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)d\beta=\xi_1\left(\alpha\right)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)d\beta;$$

$$\lim_{K\to\infty} S_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\xi_2\left(\beta\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sin\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\sin\frac{2k+1}{2}\pi\beta d\beta=\xi_2\left(\alpha\right). \qquad (19)$$

Следовательно, первый ряд в выражении (12) сходится к исходной функции $\xi_1$, если

$$\int_{-1}^{1}\xi_1\left(\beta\right)d\beta=0. \qquad (20)$$

Второй ряд сходится к функции $\xi_2$ безусловно.

Рассмотрим теперь случай разложения антисимметричной по $\alpha$ функции $\xi_3\left(\alpha\right)$ на интервале $\left(-1,1\right)$ в ряд по антисимметричным функциям $Z_{k2}\left(\kappa_k\alpha\right)$ и симметричную функцию $\xi_4\left(\alpha\right)$ в ряд по антисимметричным функциям $Z_{k2}\left(\kappa_k\alpha\right)$ из определений (10). Поступая аналогичным образом, получим для соответствующих контурных интегралов выражения

$$I_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=-4Q_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)+2\sum_{k=-K}^{K}\sin\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\sin\frac{2k+1}{2}\pi\beta-6\alpha\beta;$$

$$I_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=-4Q_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)+2\sum_{k=-K}^{K}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha\cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta-3\left(1-\beta^2\right). \qquad (21)$$

В обоих выражениях последние члены являются вычетами в точке $\zeta=0$. Перейдя к пределу при $K\to\infty$, получим для частичных сумм

$$\lim_{K\to\infty} S_K\left(Z_{k2},Z_{k2}\right)=\xi_3\left(\alpha\right)-\frac{3}{2}\alpha\int_{-1}^{1}\xi_3\left(\beta\right)\beta d\beta;$$

$$\lim_{K\to\infty} S_K\left(Z_{k3},Z_{k1}\right)=\xi_4\left(\alpha\right)-\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\xi_4\left(\beta\right)\left(1-\beta^2\right)d\beta. \qquad (22)$$

Первый ряд сходится к исходной функции $\xi_3$, а второй ряд к функции $\xi_4$, если

$$\int_{-1}^{1}\xi_3\left(\beta\right)\beta d\beta=0; \qquad \int_{-1}^{1}\xi_4\left(\beta\right)\left(1-\beta^2\right)d\beta=0. \qquad (23)$$

Поясним смысл полученных выражений (20) и (23). Рассмотрим задачу для консоли единичной толщины, длиной $l$ и высотой, равной двум. В этом случае в выражениях (1) для заделки надо положить $f_3=f_4=0$. При $x=l$ заданы ненулевые первые два перемещения (1). Отбросим задающие эти перемещения связи и заменим их нормальной силой $N$, поперечной силой и изгибающим моментом $M$, статически эквивалентным незатухающим по мере удаления от края $x=l$ напряжениям.

$$\sigma_x=\frac{1}{2}N+\frac{3}{2}Mz+\frac{3}{2}Q\left(l-x\right); \qquad \sigma_z=0; \qquad \tau_{xz}=\frac{3}{4}\left(1-z^2\right).$$

Подсчитаем работу, совершаемую незатухающими напряжениями на перемещениях (1) конца $x=l$:

$$U=\int_{-1}^{1}\left[\sigma_x f_1(z)+\tau_{xz} f_2(z)\right]dz=\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{N}{2}+\frac{3}{2}Mz\right)f_1(z)+\frac{3}{4}Q\left(1-z^2\right)f_2(z)\right]dz. \tag{24}$$

Потребовав, чтобы возникающие в полосе незатухающие напряжения не совершали работу на заданных перемещениях конца стержня, получим в силу независимости величин $N, M$, $Q$ следующие выражения:

$$\int_{-1}^{1} f_1(z)dz=0; \qquad \int_{-1}^{1} f_1(z)zdz=0; \qquad \int_{-1}^{1} f_2(z)\left(1-z^2\right)dz=0,$$

совпадающие с условиями (20), (23), где функции $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_4$ совпадают по смыслу с $f_1$ и $f_2$ соответственно.

По-видимому, по аналогии с известным принципом Сен-Венана, сформулированным для случая заданных на малом участке напряжений, можно дать формулировку локальности напряженно-деформированного состояния, вызванного в упругом теле заданными на малом участке его поверхности перемещениями.

Заданные на малом участке поверхности упругого тела перемещения создают лишь локальное напряженно-деформированное состояние, быстро затухающее по мере удаления от этого участка и становящееся пренебрежимо малым на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размерами участка, если главный вектор и главный момент, статически эквивалентные возникающим на этом участке напряжениям, не совершают работу на заданных перемещениях.

### 3. Обобщенная итерационная формулировка полуобратного метода Сен-Венана

Рассмотрим вопрос об обобщении полуобратного метода Сен-Венана к итерационному виду без сведения уравнений к усилиям и моментам путем построения асимптотического аналитического решения. Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений, формулируются в функциональном анализе в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений [21], обосновывающий сходимость простых итераций.

Длинную прямоугольную полосу отнесем к прямоугольной системе координат $x^*$, $z^*$, так что $0\le x^*\le l$, $-h\le z^*\le h$. Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагружены. Уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в следующем виде:

$$\frac{\partial\sigma_z^*}{\partial z^*}+\frac{\partial\tau^*}{\partial x^*}=0; \quad \frac{\partial\sigma_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\tau^*}{\partial z^*}=0;$$

$$\sigma_x^*=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z\right); \quad \tau^*=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma; \quad \sigma_z^*=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x\right);$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w^*}{\partial z^*}; \quad \varepsilon_x=\frac{\partial u^*}{\partial x^*}; \ \gamma=\frac{\partial u^*}{\partial z^*}+\frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Введем безразмерные координаты $x=x^*/l$, $z=z^*/h$, безразмерные перемещения $u=u^*/h$, $w=w^*/h$ вдоль осей $x^*, z^*$ соответственно и безразмерные напряжения $\sigma_x=\sigma_x^*/E$, $\sigma_z=\sigma_z^*/E$, $\tau=\tau^*/E$ (размерные перемещения, напряжения и нагрузки отмечаются звездочкой). Безразмерные уравнения в этих переменных принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial\tau}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=0;$$

$$\sigma_x=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z\right); \quad \tau=\frac{1}{2(1+\nu)}\gamma; \quad \sigma_z=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x\right);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Преобразуем их так, чтобы, выбрав в качестве величин начального приближения некоторые $w_0$ и $\gamma_0$, можно было последовательно вычислить все остальные искомые неизвестные

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma; \qquad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma; \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x};$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \sigma_x = \varepsilon_x + \nu \sigma_z; \qquad \varepsilon_z = \left(1-\nu^2\right)\sigma_z - \nu \varepsilon_x; \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z;$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \qquad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; \qquad \gamma = 2(1+\nu)\tau$$

методом последовательных приближений по мере увеличения номера $(n)$ в соответствии со следующей итерационной схемой:

$$\frac{\partial u_{(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w_{(n)}}{\partial x} + \gamma_{(n)}; \quad \tau_{(n)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma_{(n)};$$

$$\frac{\partial \sigma_{z(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n)}}{\partial x}; \quad \varepsilon_{x(n)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x}; \quad \sigma_{x(n)} = \varepsilon_{x(n)} + \nu \sigma_{z(n)};$$

$$\varepsilon_{z(n)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(n)} - \nu \varepsilon_{x(n)}; \quad \frac{\partial w_{(n)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(n)};$$

$$\frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(n)}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \sigma_{z(n+1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial x}; \quad \gamma_{(n+1)} = 2(1+\nu)\tau_{(n+1)} \cdots$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения.

Нас будут интересовать уравнения нулевого и первого приближений при выборе величин в соответствии с полуобратным методом Сен-Венана в виде начального приближения

$$w_0 = w_0(x); \qquad \gamma_{(0)} = \gamma_0(x).$$

В силу независимости величин начального приближения от $z$ все остальные неизвестные вычисляются в результате квадратур по $z$ :

$$w_{(0)} = w_0(x); \qquad \gamma_{(0)} = \gamma_0(x); \qquad u_{(0)} = -\varepsilon \int w_0' dz + \int \gamma_0 dz + u_0(x);$$

$$\tau_0 = \gamma_0 / 2(1+\nu); \qquad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \int \tau_0' dz + \sigma_{z0}(x); \qquad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}';$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}; \qquad \tau_{(1)} = -\varepsilon \int \sigma_{x(0)}' dz + \tau_0(x); \qquad \gamma_{(1)} = 2(1+\nu)\tau_{(1)};$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)}; \qquad w_{(1)} = \int \varepsilon_{z(0)} dz + w_0(x).$$

Нижним индексом 0 обозначены произволы интегрирования. Вычисление последующих величин по предыдущим сопровождается умножением на малый параметр $\varepsilon$ с целью формирования записи неизвестных в виде асимптотической последовательности по степеням $\varepsilon$. Видно, что на данном этапе итерационных вычислений мы получили четыре произвольных функции $w_0 = w_0(x)$, $\gamma_0 = \gamma_0(x)$, $u_0 = u_0(x)$,

$\sigma_{z0}=\sigma_{z0}\left(x\right)$, позволяющие выполнить четыре граничных условия на длинных сторонах полосы. Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по $x$, в индексе нулем без скобок обозначены произвольные функции интегрирования, зависящие только от $x$.

Теперь можно записать выражения для всех неизвестных задачи, предполагая, что они достаточно точно описывают возникающие перемещения, деформации и напряжения:

$$w\approx w_0+\left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0}-\varepsilon\nu u_0'\right]z+\left[\varepsilon^2\nu w_0''-\varepsilon\left(1+\nu\right)^2\tau_0'\right]\frac{z^2}{2};$$

$$u\approx u_0+\left[-\varepsilon w_0'+2\left(1+\nu\right)\tau_0\right]z;$$

$$\varepsilon_x\approx\varepsilon u_0'+\left[-\varepsilon^2 w_0''+\varepsilon\left(2+\nu\right)\tau_0'\right]z;$$

$$\sigma_x\approx\varepsilon u_0'+\nu\sigma_{z0}+\left[-\varepsilon^2 w_0''+\left(2+\nu\right)\varepsilon\tau_0'\right]z;$$

$$\varepsilon_z\approx\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0}-\varepsilon\nu u_0'+\left[\varepsilon^2\nu w_0''-\varepsilon\left(1+\nu\right)^2\tau_0'\right]z;$$

$$\tau\approx\tau_0-\left(\varepsilon^2 u_0''+\varepsilon\nu\sigma_{z0}'\right)z+\left[\varepsilon^3 w_0'''-\left(2+\nu\right)\varepsilon^2\tau_0''\right]\frac{z^2}{2};$$

$$\sigma_z\approx\sigma_{z0}-\varepsilon\tau_0'z+\left(\varepsilon^3 u_0'''+\varepsilon^2\nu\sigma_{z0}''\right)\frac{z^2}{2}+\left[-\varepsilon^4 w_0''''+\left(2+\nu\right)\varepsilon^3\tau_0'''\right]\frac{z^3}{6}. \qquad (25)$$

Величины $\tau$ и $\sigma_z$ записаны в первом приближении, остальные – в нулевом. На длинных сторонах полосы $z^*=\pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются как

$$\sigma_z=Z_+\left(x\right),\ \ \tau=X_+\left(x\right)\ \text{при}\ z=1;$$

$$\sigma_z=Z_-\left(x\right),\ \ \tau=X_-\left(x\right)\ \text{при}\ z=-1. \qquad (26)$$

Безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость $E$. Будем считать нагрузки медленно изменяющимися функциями координаты $x$. Пусть условия (26) удовлетворяются величинами первого приближения из соотношений (25). В результате получим уравнения относительно неизвестных $w_0$, $\tau_0$, определяющих задачу изгиба:

$$\varepsilon^3 w_0'''-\left(2+\nu\right)\varepsilon^2\tau_0''+2\tau_0=X_++X_-;$$

$$-\varepsilon^4 w_0''''+\left(2+\nu\right)\varepsilon^3\tau_0'''-6\varepsilon\tau_0'=3\left(Z_+-Z_-\right), \qquad (27)$$

и относительно $u_0$, $\sigma_{z0}$, определяющих задачу растяжения – сжатия:

$$-\varepsilon^2 u_0''-\varepsilon\nu\sigma_{z0}'=\left(X_+-X_-\right)/2;$$

$$\varepsilon^3 u_0'''+\varepsilon^2\nu\sigma_{z0}''+2\sigma_{z0}=Z_++Z_-. \qquad (28)$$

Уравнения (27) и (28) в предположении малой изменяемости функций $\tau_0$ и $\sigma_{z0}$ после отбрасывания величин с малыми множителями сводятся к классическому виду

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} + 2\tau_0^s = X_+ + X_-;$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''} - 6\varepsilon\tau_0^{s'} = 3\left(Z_+ - Z_-\right); \tag{29}$$

$$-\varepsilon^2 u_0^{s''} - \varepsilon\nu\sigma_{z0}^{s}{}' = \left(X_+ - X_-\right)/2;$$

$$\varepsilon^3 u_0^{s'''} + 2\sigma_0^s = Z_+ + Z_-, \tag{30}$$

подтверждая, что уравнения (27) и (28) обобщают классические представления полуобратного метода Сен-Венана и их решения зависят от аргумента $x$. Верхний индекс $s$ указывает на принадлежность отмеченных им величин к медленно меняющимся компонентам напряженно-деформированного состояния.

Вычитая из уравнений (27) попарно уравнения (29) и из уравнений (28) уравнения (30), с учетом предположений $w_0^{s'} \sim \varepsilon^0 w_0^s\left(x\right)$, $\tau_0^{s'} \sim \varepsilon^0\tau_0^s\left(x\right)$, $\tau_0^{q'} \sim \varepsilon^{-1}\tau_0^q\left(x/\varepsilon\right)$ получим сингулярно возмущенные уравнения, отмеченные индексом $q$:

$$-\left(2+\nu\right)\varepsilon^2\tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0; \tag{31}$$

$$\left(2+\nu\right)\varepsilon^3\tau_0^{q'''} - 6\varepsilon\tau_0^{q'} = 0. \tag{32}$$

Их решения отличаются на константу, которая должна быть отброшена как неудовлетворяющая условию большой изменяемости, поэтому оба решения уравнений (31) и (32) совпадают:

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp\left(-k\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \\ C_2 \exp\left(-k\dfrac{(1-x)}{\varepsilon}\right) \end{cases}.$$

Поскольку они зависят от аргумента $x/\varepsilon$, их можно использовать для удовлетворения потерянных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся классических решениях. Верхнее решение справедливо при $x \ge 0$, а нижнее – при $x \le 1$. Если принять $C_1 = -\dfrac{k}{2\varepsilon}$, можно показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{k}{\varepsilon}\exp\left(-k\dfrac{x}{\varepsilon}\right) = \delta\left(x\right)$, то есть уравнение (31) позволяет установить связь между обычной числовой функцией $\tau_0^q$ и обобщенной $\delta$ – функцией Дирака.

## 4. Заключение

Два метода Сен-Венана рассмотрены и модернизированы. Первый метод состоит в оценке компонент напряженно-деформированного состояния с целью упростить постановку задачи нахождения решения путем априорного отбрасывания быстро меняющихся и затухающих компонент решения. Он был предложен, поскольку Сен-Венан учитывал трудность нахождения общих решений. Поэтому, разрабатывая метод построения решения, он пришел к изобретению принципа, позволяющего оправдывать потерянные при построении решения компоненты решения, в частности из-за перехода от напряжений к усилиям и моментам (stress resultants). На примере длинной упругой полосы сформулировано дополнение к его классическому принципу для случая заданных на малом участке перемещений, отсутствующее в литературе. Однако и принцип Сен-Венана, и обобщенный принцип не могут дать никаких рекомендаций к своему конструктивному использованию, но пригодны для механического толкования полученных каким-либо способом неполных приближенных решений.

Второй метод получил название полуобратного, поскольку Сен-Венан предложил часть искомых неизвестных в уравнениях задать, а остальные вычислить. При этом Сен-Венан перешел от напряжений к усилиям и моментам, оправдывая переход принципом. Можно сказать, что все теории тонкостенных тел построены в усилиях и моментах, предполагая справедливость перехода к ним, обоснованную принципом Сен-Венана. В статье показано, что, если взять идею задания части неизвестных, но не переходить к усилиям и моментам, полуобратный метод может быть расширен до конструктивного и будет сходящимся независимо от выбора начального приближения. Такая возможность основана на идее метода малого параметра Пуанкаре, метода простых итераций Линделефа – Пикара и теореме о неподвижной точке Банаха. При этом предложены преобразование сложного оператора задачи в последовательность простых интегрируемых операторов и методика разделения быстро меняющихся и медленно меняющихся компонент общего решения при выполнении всех граничных условий исходной задачи. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора на четыре последовательных оператора Пикара относительно поперечной координаты и три – относительно продольной. Близость полученного решения оценивается порядком первого отброшенного члена по $\varepsilon$ для медленно меняющихся величин. Тогда полуобратный метод становится независимым от принципа Сен-Венана.

**References / Список литературы**

1. Saint-Venant A.J.C.B. Memoire sur la Torsion des Prismes. *Mem. Divers Savants.* 1855;14:233–560.

2. Mises R. On Saint-Venant's Principle. *Bull. AMS.* 1945;51:555–562.

3. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary layer theory for elastic bending of plates. *Comm. Pure Appl. Math*. 1961;14:1–33. https://doi.org/10.1002/cpa.3160140102

4. Goldenveiser A.L., Kolos A.V. K postroeniyu dvumernykh uravnenii teorii uprugikh tonkikh plastinok [On the derivation of two-dimensional equations in the theory of thin elastic plates]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1965;29(1):141–155.

*Гольденвейзер А.Л., Колос А.В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. № 1. С. 152–162.

5. Gregory R.D., Wan F.Y.M. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity*. 1984;14:27–64. https://doi.org/10.1007/BF00041081

6. Horgan C.O., Knowles J.K. Recent developments concerning Saint-Venant's principle. *Advances in Applied Mechanics*. 1983;23:179–269. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70244-8.

7. Horgan C.O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: an update. *Applied Mech. Reviews*. 1989;42:295–303.

8. Horgan C.O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: a second update. *Applied Mech. Reviews*. 1996;49:101–111.

9. Horgan C.O., Simmonds J.G. Saint-Venant end effects in composite structures. *Composites Engineering*. 1994;4(3):279–286. https://doi.org/10.1016/0961-9526(94)90078-7

10. De Pascalis R., Destrade M., Saccomandi G. The stress field in a pulled cork and some subtle points in the semi-inverse method of nonlinear elasticity. *Proc. R. Soc. Ser. A. Math., Phys., Engng. Sci.,* 2007; 463: 2945–2959. URL: https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0010

11. De Pascalis R., Rajagopal K.R., Saccomandi G. Remarks on the use and misuse of the semi-inverse method in the nonlinear theory of elasticity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 2009;62(4):451–464. https://doi.org/10.1093/qjmam/hbp019

12. Bulgariu E. On the Saint-Venant’s problem in microstretch elasticity. *Libertas Mathematica*. 2011;31:147–162.

13. Chirieta S. Saint-Venant’s problem and semi-inverse solutions in linear viscoelasticity. *Acta Mechanica*. 1992;94:221–232. https://doi.org/10.1007/BF01176651

14. Placidi L. Semi-inverse method a la Saint-Venant for two-dimensional linear isotropic homogeneous second-gradient elasticity. *Math. Mech. Solids.* 2015;22(5):919–937. https://doi.org/10.1177/1081286515616043

15. Zveryaev E.M. Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. In: Pietraszkiewicz W., Szymczak C. (eds.) *Shell Structures: Theory and Application.* London: Taylor & Francis Group; 2006. p. 191–198.

16. Zveryayev Ye.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beam and plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2003;67(3):425–434.

*Зверяев Е.М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.

17. Zveryayev Ye.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2008;72(2):197–207. Available from: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=10332626 (accessed: 10.07.2020).

*Зверяев Е.М., Макаров Г.И.* Общий метод построения теорий типа Тимошенко // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=10332626 (дата обращения: 10.07.2020).

18. Zveryayev E.M., Olekhova L.V. Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle. *KIAM Preprint No. 95.* Moscow; 2014. (In Russ.) Available from: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-95 (accessed: 10.07.2020).

*Зверяев Е.М., Олехова Л.В.* Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2014. № 95. 29 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-95 (дата обращения: 10.07.2020).

19. Zveryaev E.M. Saint-Venant – Picard – Banach Method for Integrating Thin-Walled System Equations of the Theory of Elasticity. *Mechanics of Solids.* 2020;55(7):124–132. (In Russ.) DOI: 10.1134/S0032823519050126.

*Зверяев Е.М.* Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833. DOI: 10.1134/S0032823 519050126.

20. Granas A. *Fixed point theory.* New York: Springer-Verlag; 2003.

21. Greenberg G.A. O metode, predlozhennom P.F. Papkovichem dlya resheniya ploskoi zadachi teorii uprugosti dlya pryamougol'noi oblasti i zadachi izgiba pryamougol'noi tonkoi plity s dvumya zakreplennymi kromkami, i o nekotorykh ego obobshcheniyakh [On the method proposed P.F. Papkovich for solutions theory of elasticity plan problem for the rectangular area, and the bending problem for rectangular thin plate with two fixed edges, and some of its generalizations]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanic*. 1953;17(2):211–228. (In Russ.)

*Гринберг Г.А.* О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211–228.