

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389
УДК 69.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС

В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{2*}¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 1129337, Москва, Ярославское шоссе, 26²Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

*markovich-as@rudn.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 1 июня 2020 г.

Доработана: 24 сентября 2020 г.

Принята к публикации: 9 октября 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Вопросы устойчивости играют важную роль при проектировании конструкций и сооружений. Расчеты на устойчивость реализованы во многих конечно-элементных программах, таких как NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADINA, DIANA и др. Ввиду большой ответственности расчеты на устойчивость необходимо вести как минимум с использованием двух разных программ, однако из-за высокой стоимости программных продуктов не все проектные организации в состоянии себе это позволить. Альтернативой может стать разработка программ, в которых задачи устойчивости решались бы несколькими методами, что повысило бы надежность и достоверность результатов расчета. Такая возможность реализована в вычислительном комплексе ПРИНС, в котором расчет устойчивости ведется двумя методами – статическим и динамическим. **Цели** данной работы – описать теоретические аспекты и практическую реализацию динамического принципа расчета конструкций и сооружений на устойчивость методом конечных элементов, привести алгоритм, реализованный в программе ПРИНС, а также результаты верификационных расчетов, подтверждающие его достоверность. **Результаты.** Алгоритм, приведенный в настоящей статье и реализованный в вычислительном комплексе ПРИНС, позволяет определять критические нагрузки с использованием динамического критерия устойчивости. На основании многочисленных верификационных расчетов установлено, что реализованный алгоритм обладает эффективностью определения критических нагрузок для стержневых, тонкостенных и подкрепленных конструкций. Использование вычислительного комплекса ПРИНС позволяет в дополнении к классическому (статическому) методу использовать альтернативный метод определения критических нагрузок для широкого класса инженерных задач.

Ключевые слова: устойчивость конструкций, метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, критические нагрузки, вынужденные колебания, механика деформируемых тел

Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С. Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 380–389. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1749-5797>, eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104.

Маркович Алексей Семенович, кандидат технических наук, доцент департамента строительства Инженерной академии РУДН; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3967-2114>, eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434.

© Агапов В.П., Маркович А.С., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{2*}

¹National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 1129337, Russian Federation

²Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

*markovich-as@rudn.ru

Article history

Received: June 1, 2020

Revised: September 24, 2020

Accepted: October 9, 2020

Abstract

Relevance. Buckling analysis is important in the design of buildings and structures. It is used in various fields of engineering – mechanical engineering, aircraft and shipbuilding, civil engineering, etc. Until the second half of the twentieth century, mainly analytical methods of buckling were applied in practice. With the appearance of computers, numerical methods, in particular, the finite element analysis, began to prevail. Buckling analysis was implemented in programs of finite element analysis, such as NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADAMS, DIANA, and others. In view of great responsibility, buckling analysis of structure should be carried out using at least two different programs. However, due to the high cost of software products, not all project organizations are able to have a number of programs. An alternative is to develop programs that can complete buckling analysis using several methods. This would increase the reliability and quality of calculation results. The PRINS computer program has opportunity for buckling analysis using two methods – static and dynamic. *The aims of the work* – to show the theoretical aspects and practical implementation of the dynamic principle of buckling analysis in buildings and structures using finite element method, as well as to give the algorithm implemented in the PRINS program and the results of verification calculations confirming its reliability. *Results.* The algorithm presented in this article and implemented in the PRINS computer program allows to determine critical loads using a dynamic buckling criterion. On the basis of numerous verification calculations, it was established that the implemented algorithm was effective for determining critical loads in frame, thin-walled and ribbed plate structures. The use of the PRINS computer program enables to use an alternative method for determining critical loads for a wide class of engineering problems in addition to the classical (static) method.

Keywords: buckling analysis, finite element method, PRINS computer program, forced vibration, mechanics of deformable solids

For citation

Agapov V.P., Markovich A.S. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):380–389. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>

1. Введение

Расчеты на устойчивость играют важную роль при проектировании конструкций и сооружений, используемых в различных областях техники – машиностроении, авиа- и судостроении, промышленном и гражданском строительстве и др. Теоретические аспекты проблемы устойчивости описаны в многочисленных журнальных статьях и монографиях [1–10]. На практике до второй половины XX века применялись, главным образом, аналитические методы расчета на устойчивость [1–5]. С появлением вычислительных машин стали преобладать численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ) [6–9]. В последнее время вопросу устойчивости стержней, пластин и оболочек посвящено большое количество исследований [11–15]. Расчеты на устойчивость реализованы во многих конечно-элементных программах, например, NASTRAN [16], ANSYS [17], ABAQUS [18], ADINA [19], DIANA [20] и др. В силу большой ответственности требуется проводить расчеты на устойчивость по крайней мере с использованием нескольких программ, что не всегда выполнимо по причине высокой стоимости программных продуктов. Разработка программ, в которых задачи устойчивости решались бы несколькими методами, повысит надежность и достоверность результатов расчета на устойчивость.

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1749-5797>, eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104.

Alexey S. Markovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering of the Engineering Academy; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3967-2114>, eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434.

Образцом подобной программы является вычислительном комплексе ПРИНС [21]. Расчет на устойчивость ведется в нем двумя методами – статическим и динамическим. При этом статический метод разработан в форме, не требующей решения проблемы собственных значений. Это стало возможным благодаря использованию критерия потери устойчивости в виде равенства нулю реакции единственной нагруженной на заданную систему связи при смещении этой связи на малое расстояние в направлении ожидаемой потери устойчивости. Теоретические основы этого метода и его практическая реализация описаны в работе [22].

В данной статье описываются теоретические аспекты и практическая реализация динамического метода расчета на устойчивость, а также приводятся результаты верификационных расчетов, подтверждающие его достоверность.

2. Методы

Уравнение для определения методом конечных элементов минимальных критических нагрузок, соответствующих потере устойчивости нелинейно деформируемых систем при наличии начальных напряжений и перемещений, представляется в виде [21]

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{nl1} + \mathbf{K}_{nl2})\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$ – матрица жесткости нулевого порядка; $\mathbf{K}_u = \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}) dV$ – матрица начальных перемещений; $\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} dV$ – матрица начальных напряжений; \mathbf{K}_{nl1} и \mathbf{K}_{nl2} – нелинейные матрицы, получение которых рассмотрено в [21]; \mathbf{u} – вектор перемещений.

Как правило, решение уравнения (1) находится методом последовательных приближений при задании нагрузки в виде $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_0$, где \mathbf{P}_0 – нормированная нагрузка.

В том случае, когда рассматриваемые системы линейно деформируемы, а начальные перемещения отсутствуют ($\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_{nl1} = \mathbf{K}_{nl2} = 0$), расчет на устойчивость сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений:

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma)\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где $\lambda = \mathbf{P}_{cr} / \mathbf{P}$ – параметр критической нагрузки.

В большинстве отечественных и зарубежных программных комплексах алгоритм расчета устойчивости конструкций сводится к решению проблемы собственных значений (2). Обычно он остается единственным методом, доступным пользователю конкретной программы. Таким образом, при расчете сложных систем с большим количеством неизвестных, для которых не существует точного решения, верифицировать полученные на основании (2) результаты без использования альтернативных методов определения критических сил становится весьма затруднительно.

При разработке вычислительного комплекса ПРИНС (автор – доктор технических наук, профессор В.П. Агапов) был учтен этот недостаток. В комплексе реализован алгоритм использования динамического критерия для определения критических нагрузок.

Как известно, при достижении нагрузками критических значений деформированная система теряет способность совершать колебательные движения [2]. Следовательно, критерием потери устойчивости является равенство нулю частоты собственных колебаний системы. Уравнение для определения частот собственных колебаний системы под нагрузкой при наличии начальных перемещений и напряжений представляется следующим образом:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma)\mathbf{q} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{M} – матрица масс, ω и \mathbf{q} – собственные частота и вектор.

Метод определения собственных частот нагруженной конструкции реализован шагово-итерационным методом. Для расчета вводятся начальное и конечное значения параметра нагрузки, приращение этого параметра, количество исследуемых форм колебаний, требуемое число шагов итерации и точность схо-

димости. На каждом шаге нагружения вычисляются матрицы K_u , K_σ и из уравнения (3) определяются частоты и векторы форм собственных колебаний. По мере приращения параметра нагрузки на каждом шаге собственные частоты уменьшаются и расчет продолжается до тех пор, пока значение собственной частоты не обратится в ноль. Таким образом, параметр нагрузки, при котором собственная частота обращается в ноль, является критическим.

Блок-схема алгоритма определения критических нагрузок с использованием динамического критерия приведена на рис. 1.

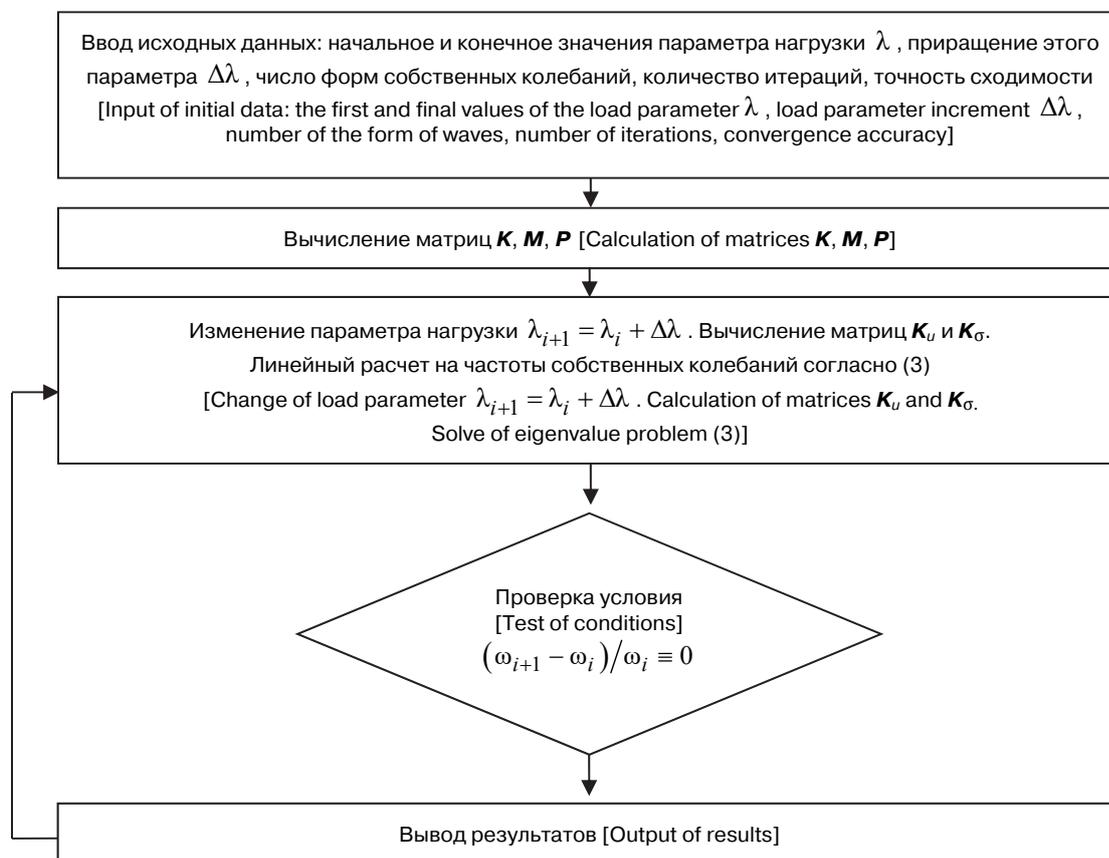


Рис. 1. Блок-схема алгоритма для определения критических нагрузок
[Figure 1. Scheme of the algorithm for determining critical loads]

3. Результаты и обсуждение

Для иллюстрации возможностей описанного выше алгоритма мы приводим ряд численных расчетов, выполненных в вычислительном комплексе ПРИНС.

3.1. Прямоугольная свободно опертая по контуру пластинка

Рассматривается пластинка, нагруженная распределенной нагрузкой (рис. 2) при следующих исходных данных: длина $a = 0,522$ м, ширина $b = 0,6$ м, толщина $h = 1$ см, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, удельный вес $\gamma = 78,5$ кН/м³.

Расчеты выполнялись с использованием трех- и четырехугольных оболочечных конечных элементов (КЭ) типа EL36 в отсутствии начальных перемещений ($K_u = 0$) при разбиении пластинки на КЭ-сетку следующих размеров: 10×10 , 20×20 и 30×30 (рис. 3).

Для определения критических нагрузок задавалось начальное значение нагрузки $q = 1$ кН/м. На каждом шаге приращение нагрузки принималось равным $\Delta q = 10q$ и из уравнения (3) определялись частоты и векторы форм собственных колебаний. Итерационный процесс останавливался при выполнении условия $(\omega_{i+1} - \omega_i) / \omega_i \cong 0$.

Результаты расчета прямоугольной пластинки представлены в табл. 1 (значения в скобках относятся к результатам, полученным с использованием треугольного КЭ EL36).

На рис. 4, а приведена первая форма собственных колебаний пластинки под нагрузкой. Зависимость частоты колебаний от параметра λ показана на рис. 4, б.

Как известно, аналитическое уравнение для поверхности выпучивания пластинки представляется в виде

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

которое допускает частное решение

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi z}{b}. \quad (5)$$

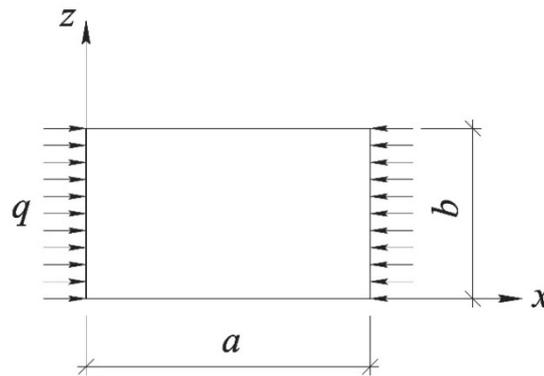


Рис. 2. Прямоугольная пластинка, всем периметром опертая на контур
[Figure 2. Rectangular plate supported on the contour]

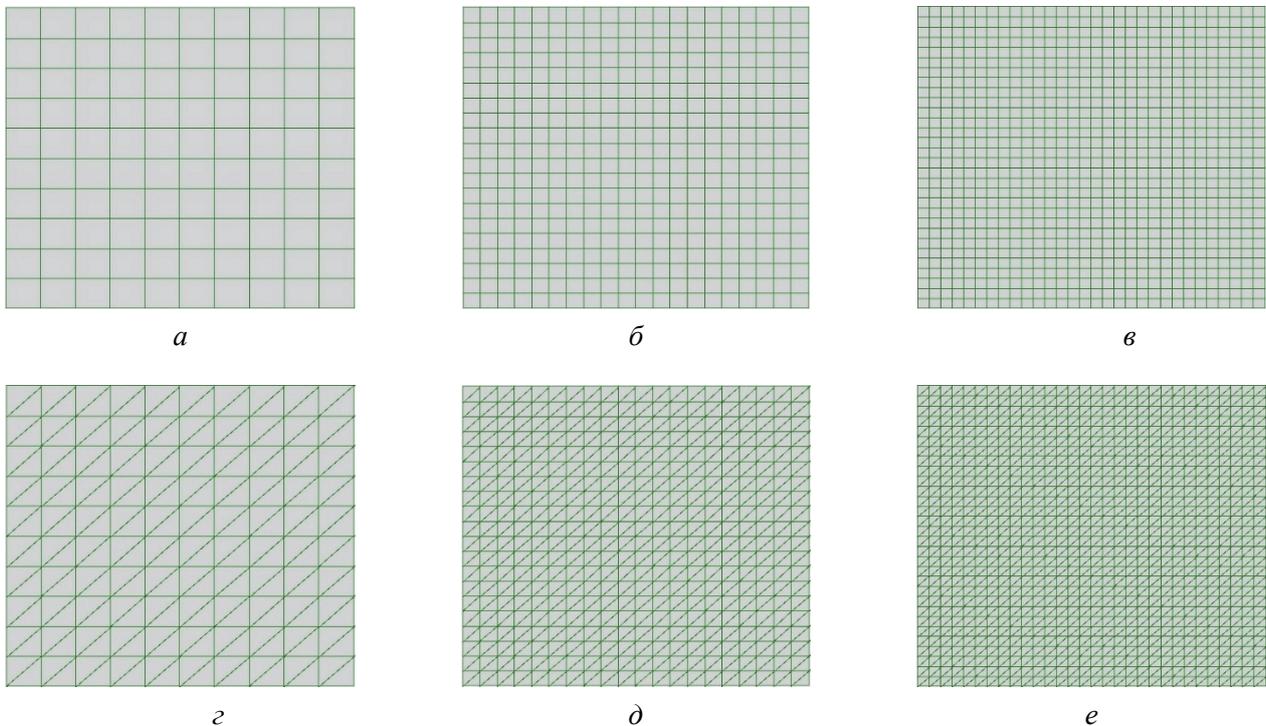
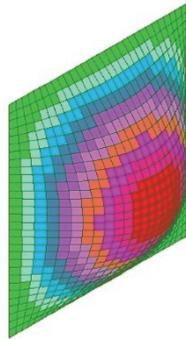


Рис. 3. Конечно-элементные схемы для расчета прямоугольной пластинки при сетке КЭ размером 10×10 , 20×20 , 30×30 :
а, б, в – с использованием четырехугольных элементов; г, д, е – с использованием треугольных элементов

[Figure 3. Finite element schemes for the rectangular plate calculating with a FE mesh dimension of 10×10 , 20×20 , 30×30 :
а, б, в – using quadrangular elements; г, д, е – using triangular elements]

Результаты расчета прямоугольной пластинки
[Table 1. The results of rectangular plate calculation]

Размерность КЭ сетки [Dimension of FE mesh]	Частота собственных колебаний ненагруженной конструкции ω_0 , рад/с [Structural frequency without load ω_0 , rad/s]	Критический параметр нагрузки λ [Critical parameter of load λ]		
		Решение по МКЭ [FEM solution]	Аналитическое решение [Analytical solution]	Погрешность Δ , % [Approximation error Δ , %]
10×10	974,534 (975,534)	2080 (2070)		1,249 (0,763)
20×20	972,535 (972,535)	2060 (2060)	2054,335	0,276 (0,276)
30×30	972,535 (972,535)	2060 (2060)		0,276 (0,276)



а



б

Рис. 4. Расчет прямоугольной пластинки:
а – форма колебаний; б – график зависимости $\omega(\lambda)$
[Figure 4. The calculation of a rectangular plate:
а – the form of waves; б – the schedule $\omega(\lambda)$]

Подставляя (5) в уравнение (4), с учетом граничных условий (при $x=0$ и $x=l$, $w=0$) получается выражение для определения критической нагрузки:

$$q_{cr} = \frac{UE}{12(1-\nu^2)} \frac{h^3}{b^2}, \quad (6)$$

где U – коэффициент, принимаемый по табл. А из [3].

Применительно к рассматриваемому примеру $q_{cr} = 2054,335$ кН/м. Следовательно, параметр $\lambda = q_{cr}/q = 2054,335$.

3.2. Шарнирно опертая по краям пластинка с прежними размерами сторон, но подкрепленная четырьмя равноудаленными продольными ребрами жесткости

Геометрические характеристики сечения ребер: $F = 8$ см², $J_z = 10,667$ см⁴ (рис. 5).

Расчеты выполнялись с использованием четырехугольных КЭ (тип EL36) в отсутствии начальных перемещений ($K_u = 0$) при разбиении конструкции на КЭ-сетку с размерами 10×10, 20×20 и 30×30 (рис. 3, а–в).

Результаты расчета подкрепленной пластинки представлены в табл. 2.

На рис. 6, а приведена первая форма собственных колебаний подкрепленной пластинки. Зависимость частоты колебаний от параметра нагрузки показана на рис. 6, б.

Уравнение для определения критической нагрузки в случае подкрепленной ребрами пластинки представляется так [3]:

$$q_{cr} = \frac{Ph \left[(1 + \beta)^2 + 2 \sum_{i=1}^4 \gamma_i \left(\sin \frac{\pi c_i}{b} \right)^2 \right]}{\beta^2 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^4 \delta_i \left(\sin \frac{\pi c_i}{b} \right)^2 \right]}, \quad (7)$$

где $P = \frac{D\pi^2}{b^2h}$, $\gamma_i = \frac{B_i}{bD}$, $\delta_i = \frac{F_i}{bh}$, $\beta = a/b$, $B_i = EJ_{z,i}$ – жесткость подкрепляющего ребра, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ –

цилиндрическая жесткость пластинки.

Для рассматриваемой задачи $q_{cr} = 5092$ кН/м. Таким образом, критический параметр $\lambda = q_{cr}/q = 5092$.

Таблица 2

Результаты расчета подкрепленной пластинки
[Table 2. The results of the ribbed plate calculation]

Размерность КЭ сетки [Dimension of FE mesh]	Частота собственных колебаний ненагруженной конструкции ω_0 , рад/с [Structural frequency without load ω_0 , rad/s]	Критический параметр нагрузки λ [Critical parameter of load λ]		
		Решение по МКЭ [FEM solution]	Аналитическое решение [Analytical solution]	Погрешность Δ , % [Approximation error Δ , %]
10×10	1269,394	5371		5,479
20×20	1269,394	5246	5092	3,024
30×30	1269,394	5177		1,669

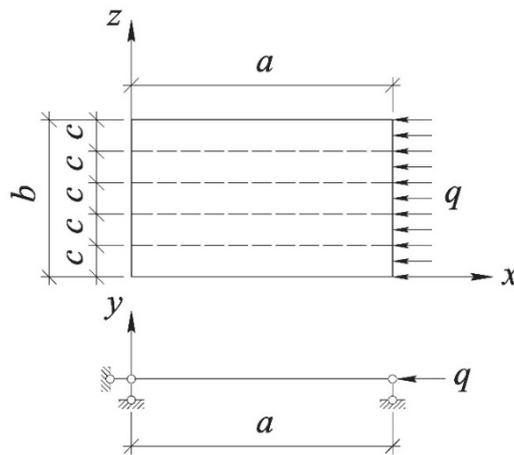


Рис. 5. Прямоугольная пластинка, подкрепленная продольными ребрами
[Figure 5. Rectangular plate supported by longitudinal ribs]

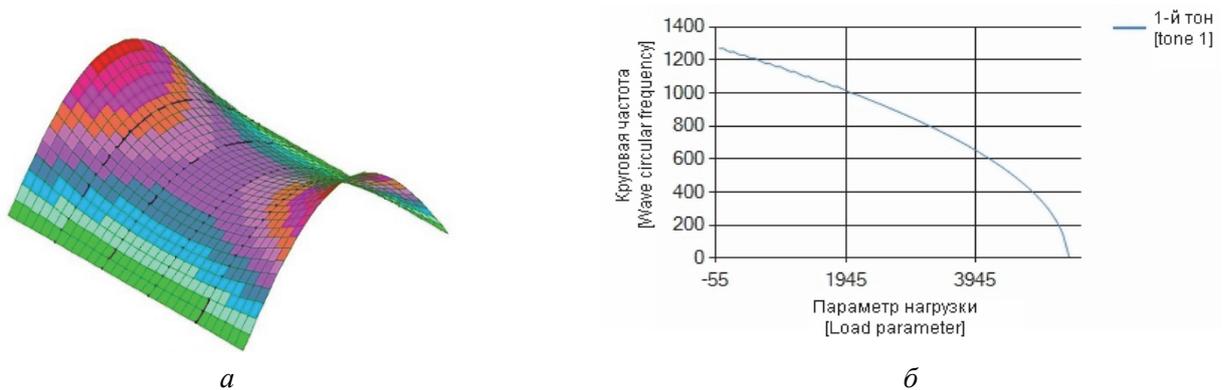


Рис. 6. Расчет подкрепленной пластинки:

a – форма колебаний; b – график зависимости $\omega(\lambda)$

[Figure 6. The calculation of the ribbed plate:

a – the form of waves; b – the schedule $\omega(\lambda)$]

3.3. Цилиндрическая оболочка с шарнирно закрепленными краями, испытывающая равномерное сжатие вдоль оси цилиндра

Определение критических нагрузок выполнялось в отсутствие начальных перемещений ($K_u = 0$) для КЭ-схем оболочки с размерами 12×24, 16×32 и 24×40 (рис. 7). Исходные данные: $l/R = 2$, $R/h = 25$, $h = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, $\nu = 0,3$, $\gamma = 78,5$ кН/м³. Нормированная нагрузка $q = 100$ кН/м.

Результаты определения критических нагрузок для оболочки представлены в табл. 3.

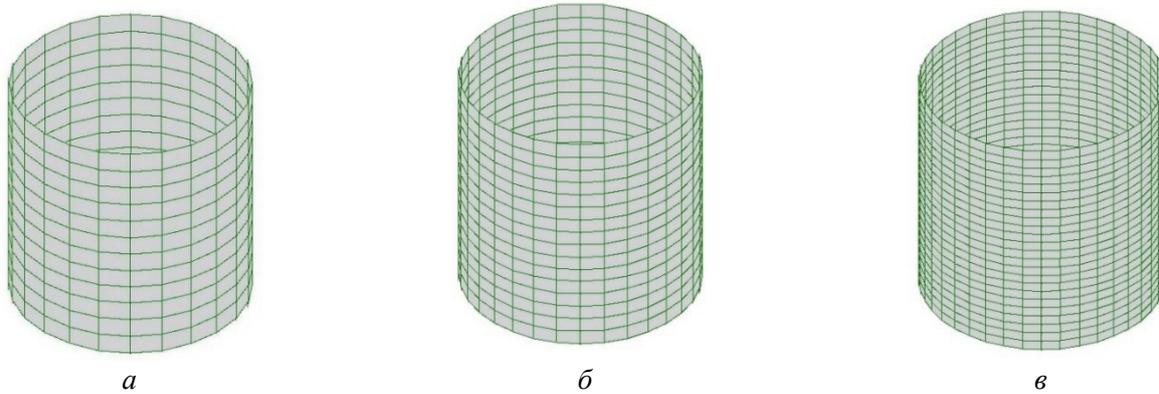


Рис. 7. Конечно-элементные схемы цилиндрической оболочки:
 а – с размером 12×24; б – 16×32; в – 24×40
 [Figure 7. Finite-element meshes of a cylindrical shell:
 a – with a size of 12×24; б – 16×32; в – 24×40]

Таблица 3

Результаты расчета цилиндрической оболочки
 [Table 3. The results of the cylindrical shell calculation]

Размерность КЭ сетки [Dimension of FE mesh]	Частота собственных колебаний ненагруженной конструкции ω_0 , рад/с [Structural frequency without load ω_0 , rad/s]	Критический параметр нагрузки λ [Critical parameter of load λ]		
		Решение по МКЭ [FEM solution]	Аналитическое решение [Analytical solution]	Погрешность Δ , % [Approximation error Δ , %]
12×24	5447,398	482		0,454
16×32	5367,436	476	484,20	1,694
24×40	5337,450	474		2,106

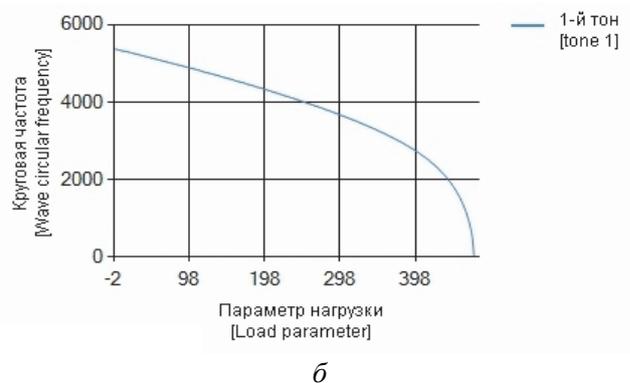
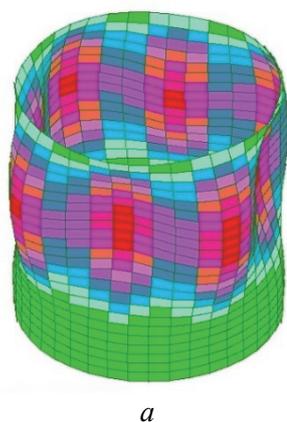


Рис. 8. Расчет цилиндрической оболочки:
 а – форма колебаний; б – график зависимости $\omega(\lambda)$
 [Figure 8. The calculation of a cylindrical shell:
 a – the form of waves; б – the schedule $\omega(\lambda)$]

На рис. 8, а приведена первая форма колебаний оболочки под нагрузкой. Зависимость частоты колебаний от параметра нагрузки для рассматриваемой оболочки показана на рис. 8, б.

Известно, что для осесимметричной формы потери устойчивости сжатой цилиндрической оболочки справедливо уравнение [2]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

При шарнирном опирании краев оболочки ($w=0$ и $d^2 w/dx^2 = 0$) решение этого уравнения ищется в виде

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (9)$$

где m – число полуволн.

Подстановка (9) в уравнение срединной поверхности оболочки (8) позволяет получить выражение для нахождения минимальной критической нагрузки:

$$q_{cr} = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (10)$$

Для рассматриваемого примера $q_{cr} = 48420$ кН/м, а критический параметр $\lambda = q_{cr}/q = 484,20$.

4. Заключение

Алгоритм, приведенный в данной статье и реализованный в вычислительном комплексе ПРИНС, позволяет определять критические нагрузки с использованием динамического критерия устойчивости.

На основании многочисленных верификационных расчетов установлено, что описанный алгоритм обладает эффективностью определения критических нагрузок для стержневых, тонкостенных и подкрепленных конструкций.

Использование вычислительного комплекса ПРИНС дает возможность в дополнение к классическому (статическому) методу использовать альтернативный (динамический) метод определения критических нагрузок для широкого класса инженерных задач. Таким образом, вычислительный комплекс ПРИНС успешно может быть использован инженерами проектных и научных организаций для расчета устойчивости конструкций и сооружений, требующих большой ответственности.

Список литературы / References

1. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudentes. *Opera Omnia: Series I.* 1744;24.
2. Timoshenko S., Gere J.M. *Theory of Elastic Stability.* 2nd ed. McGraw-Hill; 1961.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 284 с.
Volmir A.S. *Ustojchivost' deformiruemyyh system [Stability of deformable systems]*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)
4. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustojchivost' obolochek [Shell stability]*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. (In Russ.)
5. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. М.: Стройиздат, 1949. 376 с.
Kornouhov N.V. *Prochnost' i ustojchivost' stержnevyyh system [Strength and stability of frame systems]*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1949. 376 p. (In Russ.)
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element for Solid and Structural Mechanics.* 6th ed. McGraw-Hill; 2005.
7. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis.* New Jersey: Prentice-Hall; 2005.
8. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures.* John Wiley & Sons Ltd.; 1977.
9. Oden J.T. *Finite elements in nonlinear continua.* New York: McGraw-Hill Book Company; 1972.
10. Reza Eslami N.M. *Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells. Structural Integrity. Vol. 1.* Springer International Publishing AG; 2018.
11. Gowda R.S., Sunagar P., Nruthya K., Manish S. Dharek, Sreekeshava K.S., Abhishek Kumar Chaurasiya and Priyanka. Analytical and Finite Element Buckling and Post Buckling Analysis of Laminated Plates. *International Journal of Civil Engineering and Technology.* 2020;11(5):84–92.

12. Iwasa T., Nishizawa Sh., Sakai M. Buckling severity measurement of axially compressed cylindrical structures with periodic buckling pattern. *Engineering Structures*. 2020;213:110568. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110568.
13. Li D.M., Featherston C.A., Wu Z. An element-free study of variable stiffness composite plates with cutouts for enhanced buckling and post-buckling performance. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020;371:113314. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113314>
14. Buoso D., Parin E. The buckling eigenvalue problem in the annulus. *Communications in Contemporary Mathematics*. 2020. <https://doi.org/10.1142/S0219199720500443>
15. Heo J., Yang Z., Xia W., Oterkus S., Oterkus E. Buckling analysis of cracked plates using peridynamics. *Ocean Engineering*. 2020;214:107817. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107817.
16. *MSC NASTRAN 2016. Nonlinear User's Guide SOL 400*. MSC Software; 2016.
17. *ANSYS Theory Reference. Release 5.6*. Canonsburg, PA: ANSYS Inc.; 1999.
18. *ABAQUS 6.12. Theoretical manual*. DS Simulia; 2012.
19. *ADINA Theory and Modeling Guide*. ADINA R&D, Inc.; 2005.
20. *DIANA FEA User's Manual. Release 10*. DIANA FEA BV; 2017.
21. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: АСВ, 2005. 245 с.
Agapov V.P. *Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustojchivosti konstrukcij* [*Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*]. Moscow: ASV Publ., 2005. (In Russ.)
22. Agapov V.P. Buckling Analysis of the Structures by Single Imposed Constraint Method. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2017;12(16):5990–5994.