

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ NUMERICAL METHODS OF STRUCTURES' ANALYSIS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379
UDC 539.3

RESEARCH PAPER / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements

Natalia A. Gureeva¹, Yuriy V. Klochkov², Anatoly P. Nikolaev², Vladislav N. Yushkin^{2*}

¹Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradskii Ave, Moscow, 125993, Russian Federation

²Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Ave, Volgograd, 400002, Russian Federation

*aup-volgau@yandex.ru

Article history

Received: July 30, 2020

Revised: September 15, 2020

Accepted: September 24, 2020

Acknowledgements

The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as a part of research project No. 19-41-340004 p_a.

For citation

Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):361–379. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>

Abstract

The aim of the work is to perform a comparative analysis of the results of analyzing arbitrarily loaded shells of revolution using finite element method in various formulations, namely, in the formulation of the displacement method and in the mixed formulation. *Methods*. To obtain the stiffness matrix of a finite element a functional based on the equality of the actual work of external and internal forces was applied. To obtain the deformation matrix in the mixed formulation the functional obtained from the previous one by replacing the actual work of internal forces in it with the difference of the total and additional work was used. *Results*. In the formulation of the displacement method for an eight-node hexahedral solid finite element, displacements and their first derivatives are taken as the nodal unknowns. Approximation of the displacements of the inner point of the finite element was carried out through the nodal unknowns on the basis of the Hermite polynomials of the third degree. For a finite element in the mixed formulation, displacements and stresses were taken as nodal unknowns. Approximation of the target finite element values through their nodal values in the mixed formulation was carried out on the basis of trilinear functions. It is shown on a test example that a finite element in the mixed formulation improves the accuracy of the strength parameters of the shell of revolution stress-strain state.

Keywords: solid finite element, mixed functional, finite element method implementation, deformation matrix, stiffness matrix


Natalia A. Gureeva, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics; ORCID iD: 0000-0003-3496-2008, eLIBRARY SPIN-code: 8393-5900.

Yuriy V. Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics of the Electric Power and Energy Faculty; eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.

Anatoly P. Nikolaev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department of the Ecology and Melioration Faculty; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484.

Vladislav N. Yushkin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department of the Ecology and Melioration Faculty; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3965-4397>, eLIBRARY SPIN-code: 4833-4701.

© Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Yushkin V.N., 2020

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов

Н.А. Гуреева¹, Ю.В. Клочков², А.П. Николаев², В.Н. Юшкин^{2*}

¹Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Российская Федерация, 125993, Москва, Ленинградский пр-кт, 49

²Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, 26

*aup-volgau@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 30 июля 2020 г.

Доработана: 15 сентября 2020 г.

Принята к публикации: 24 сентября 2020 г.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и Администрации Волгоградской области № 19-41-340004 p_a.

Для цитирования

Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 361–379. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>

Аннотация

Цель исследования – выполнить сравнительный анализ результатов расчета произвольно нагруженных оболочек вращения при использовании метода конечных элементов в различных формулировках, а именно в формулировке метода перемещений и в смешанной формулировке. Методы. Для получения матрицы жесткости конечного элемента применен функционал, основанный на равенстве действительных работ внешних и внутренних сил, а для получения матрицы деформирования в смешанной формулировке – функционал, полученный из предыдущего путем замены в нем действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работы. Результаты. В формулировке метода перемещений для объемного конечного элемента в виде восьмиузлового шестигранника в качестве узловых неизвестных приняты перемещения и их первые производные. Аппроксимация перемещений внутренней точки конечного элемента осуществлялась через узловые неизвестные на основе полиномов Эрмита третьей степени. Для конечного элемента в смешанной формулировке в качестве узловых неизвестных принимались перемещения и напряжения. Аппроксимация искомых величин конечного элемента через их узловые значения в смешанной формулировке выполнялась на основе трилинейных функций. На тестовом примере показано, что конечный элемент в смешанной формулировке позволяет повысить точность прочностных параметров напряженно-деформированного состояния оболочки вращения.

Ключевые слова: объемный конечный элемент, смешанный функционал, реализация метода конечных элементов, матрица деформирования, матрица жесткости

1. Introduction

The theory of deformation of solids has been developed in sufficient detail to date [1–2]. However, analytical obtaining of specific results is possible only in some cases, far from the practice of engineering calculations. Therefore, the development of approximate and numerical methods for calculating structural elements of engineering structures is an actual task. Among the modern methods of studying the stress-strain state of building structures, the numerical finite element method (FEM) based on the displacement method has become widespread recently [3–15]. It can be stated that the main disadvantages of this FEM formulation are the lack of continuity of the displacement derivatives on the edges and side surfaces of finite elements. The development of finite elements in the mixed formulation [16–25] allows to reduce the degree of approximating functions for expressing the desired quantities through nodal unknowns, makes it possible to fulfill the conditions for the continuity of stresses and displacements not only at the nodal points, but also on the edges and lateral surfaces of the discretization elements.

The subject of the study is the stress-strain state of the shell of rotation under arbitrary loading. The purpose of the study is a comparative analysis of finite element algorithms for determining the strength parameters of the shell of rotation.

Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент департамента математики; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, eLIBRARY SPIN-код: 8393-5900.

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики электроэнергетического факультета; eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.

Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования эколого-мелиоративного факультета; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484.

Юшкин Владислав Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования эколого-мелиоративного факультета; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3965-4397>, eLIBRARY SPIN-код: 4833-4701.

To perform a comparative analysis of variants, finite element algorithms of the hexahedral finite element are developed in two formulations: in the formulation of the displacement method and in the mixed formulation. When obtaining the hexahedron stiffness matrix in the formulation of the displacement method, displacements and their first derivatives are used as nodal unknowns. When forming the matrix of the stress-strain state of a hexagon in a mixed formulation, displacements and stresses are taken as nodal unknowns.

2. Research methods

To obtain the stiffness matrix of a hexagonal finite element, the displacement method formulation uses a functional based on the equality of the actual work of external loads on displacements and the actual work of internal stresses on deformations over the volume of the finite element. To approximate the desired values of the internal point of a finite element through nodal unknowns, third-degree Hermite polynomials were used.

To obtain the stress-strain state matrix in a mixed formulation, we used a functional obtained by replacing the actual work of internal forces of the displacement method functional with the difference between the total work of internal forces and their additional work. Trilinear relations are used to approximate displacements and stresses through nodal unknowns.

2.1. Shell of revolution geometric parameters

Position of an arbitrary point M^0 in the shell of revolution middle surface is defined by radius vector

$$\vec{R} = x\vec{i} + r(x)\sin\theta\vec{j} + r(x)\cos\theta\vec{k}, \quad (1)$$

where $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – unit vectors of the Cartesian coordinate system; $r(x)$ – radius of revolution for the considered point of the middle surface; θ – angle measured counterclockwise from the vertical diameter.

Basis vectors of an arbitrary point on the middle surface are determined by expressions

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i} + r_{,x}\sin\theta\vec{j} + r_{,x}\cos\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^0 = r\cos\theta\vec{j} - r\sin\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_3^0 &= \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|} = \frac{r_{,x}}{\sqrt{u}}\vec{i} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{u}}\vec{j} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{u}}\vec{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $u = 1 + r_{,x}^2$.

Position of an arbitrary point M^{0t} of the shell located at a distance t from the middle surface is defined by radius vector

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}_3^0. \quad (3)$$

Base vectors of the point M^{0t} are defined by differentiation (3):

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0t} = \vec{R}_{,x}^0 + t\vec{a}_{3,x}^0 = \vec{a}_1^0 + t\vec{a}_{3,x}^0; \\ \vec{g}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^{0t} = \vec{R}_{,\theta}^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0 = \vec{a}_2^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0; \\ \vec{g}_3^0 &= \vec{R}_{,t}^{0t} = \vec{a}_3^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Using (2) based on (4) the following matrix relations can be formed:

$$\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad (5)$$

where $\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_1^0 \quad \vec{g}_2^0 \quad \vec{g}_3^0 \right\}$; $\left\{ \vec{i} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$.

Differentiating (4) taking into account (5), derivatives of the basis vectors of point M^{0t} can be defined by the components in the same basis:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_1] \left\{ \bar{\mathbf{i}} \right\}_{3 \times 1} = [N_1][S]^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1} = [m] \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_2] \left\{ \bar{\mathbf{i}} \right\}_{3 \times 1} = [N_2][S]^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1} = [n] \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,t}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_3] \left\{ \bar{\mathbf{i}} \right\}_{3 \times 1} = [N_3][S]^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1} = [l] \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1}, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,x}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{1,x}^0, \bar{\mathbf{g}}_{2,x}^0, \bar{\mathbf{g}}_{3,x}^0 \right\}$; $\left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,\theta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{1,\theta}^0, \bar{\mathbf{g}}_{2,\theta}^0, \bar{\mathbf{g}}_{3,\theta}^0 \right\}$; $\left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,t}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{1,t}^0, \bar{\mathbf{g}}_{2,t}^0, \bar{\mathbf{g}}_{3,t}^0 \right\}$.

2.2. Displacements and deformations

Displacement vector of point M^{0t} from load action is represented by components in the basis of point M^{0t} :

$$\bar{\mathbf{V}} = v^m \bar{\mathbf{g}}_m^0 = \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ v \right\}_{3 \times 1}; \quad m = 1, 2, 3, \quad (7)$$

where $\left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ v^1 \ v^2 \ v^3 \right\}$.

Derivatives of displacement vector (7) with respect to curvilinear coordinates x, θ, t are determined by expressions

$$\bar{\mathbf{V}}_{,m} = v_{,m}^1 \bar{\mathbf{g}}_1^0 + v^1 \bar{\mathbf{g}}_{1,m}^0 + v_{,m}^2 \bar{\mathbf{g}}_2^0 + v^2 \bar{\mathbf{g}}_{2,m}^0 + v_{,m}^3 \bar{\mathbf{g}}_3^0 + v^3 \bar{\mathbf{g}}_{3,m}^0. \quad (8)$$

Based on (6) relations (8) can be represented in the form

$$\bar{\mathbf{V}}_{,m} = f_m^k \bar{\mathbf{g}}_k^0, \quad (9)$$

where f_m^k – functions of components of the displacement vector and its derivatives, defined by the expressions

$$\begin{aligned} f_1^1 &= v_{,x}^1 + v^1 m_{11} + v^2 m_{21} + v^3 m_{31}; \\ &\dots \\ f_3^3 &= v_{,t}^3 + v^1 l_{13} + v^2 l_{23} + v^3 l_{33}. \end{aligned} \quad (10)$$

Deformations are determined by the relationships of continuum mechanics:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{g}}_i^0 \bar{\mathbf{v}}_{,j} + \bar{\mathbf{g}}_j^0 \bar{\mathbf{v}}_{,i} \right). \quad (11)$$

Taking into account (4) and (9), we can form the matrix relationship

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [L] \left\{ v \right\}_{3 \times 1}, \quad (12)$$

where $\left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23} \right\}$; $[L]$ – matrix of algebraic and differential operators.

2.3. Relationships between deformations and stresses

Hooke's law is represented in curvilinear coordinate system by expressions

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij}; \\ \sigma^{ij} &= \lambda I_1(\varepsilon) g^{0ij} + 2\mu g^{0ik} g^{0jl} \varepsilon_{kl}; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} g_{im}^0 g_{jn}^0 \sigma^{mn} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0,\end{aligned}\quad (13)$$

where $I_1(\varepsilon) = g_{mn}^0 \varepsilon^{mn} = g^{0mn} \varepsilon_{mn}$ is the first invariant of strain tensor; $I_1(\sigma) = g_{mn}^0 \sigma^{mn} = g^{0mn} \sigma_{mn}$ is the first invariant of stress tensor; g_{mn}^0, g^{0mn} are covariant and contravariant components of metric tensor; $\varepsilon_{mn}, \varepsilon^{mn}$ are covariant and contravariant components of strain tensor; σ_{mn}, σ^{mn} are covariant and contravariant components of stress tensor; λ, μ are Lamé parameters; E is modulus of elasticity; ν is Poisson's ratio.

On the basis of relations (13) the following matrix expression is formed:

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [C]_{6 \times 6} \left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1}, \quad (14)$$

where $\left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1}^T = \left\{ \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23} \right\}$.

2.4. Shell of revolution finite element in displacements method formulation

The finite element is taken in the form of a hexahedron with nodes i, j, k, l, m, n, p, h . For performing numerical integration, hexahedron is mapped onto a cube with local coordinates changing within the limits $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$. Displacements and their derivatives in local coordinates are taken as nodal unknowns.

Approximation of displacement for the inner points of the finite element was performed on the basis of Hermite polynomials of the third degree by the matrix expression below:

$$\left\{ v \right\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 96} \left\{ v_y^n \right\}_{96 \times 1}, \quad (15)$$

where $\left\{ v_y^n \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,\xi}^{1i}, \dots, v_{,\xi}^{1h}, v_{,\eta}^{1i}, \dots, v_{,\eta}^{1h}, v_{,\zeta}^{1i}, \dots, v_{,\zeta}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,\xi}^{3i}, \dots, v_{,\xi}^{3h}, v_{,\eta}^{3i}, \dots, v_{,\eta}^{3h}, v_{,\zeta}^{3i}, \dots, v_{,\zeta}^{3h} \right\}$.

Vectors of the nodal unknowns in local and global coordinate systems are related by the following matrix ratio:

$$\left\{ v_y^n \right\}_{96 \times 1} = [T]_{96 \times 96} \left\{ v_y^r \right\}_{96 \times 1}, \quad (16)$$

where $\left\{ v_y^r \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,x}^{1i}, \dots, v_{,x}^{1h}, v_{,\theta}^{1i}, \dots, v_{,\theta}^{1h}, v_{,t}^{1i}, \dots, v_{,t}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,x}^{3i}, \dots, v_{,x}^{3h}, v_{,\theta}^{3i}, \dots, v_{,\theta}^{3h}, v_{,t}^{3i}, \dots, v_{,t}^{3h} \right\}$.

Matrix $[T]$ is formed on the basis of differential relations

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial \xi} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \zeta}, \tag{17}$$

where q indicates components of the displacement vector v^1, v^2, v^3 .

Using (15), deformations (12) are defined in matrix form

$$\{\varepsilon\} = [L]\{v\} = [L][A]\{v_y^r\} = [B]\{v_y^r\}. \tag{18}$$

In order to construct the stiffness matrix for the finite element, a functional based on the equality of work done by internal and external forces is used:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \frac{1}{2} \int_S \{v\}^T \{q\} dS, \tag{19}$$

where V is element volume; S – specified load application surface; $\{q\}^T = \{q_1, q_2, q_3\}$ – components of external load vector.

Taking into account (14), (15), (16) and (18), functional (19) is given by expression

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \{v_y^r\}^T [T]^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T] \{v_y^r\} - \frac{1}{2} \{v_y^r\}^T [T]^T \int_S [A]^T \{q\} dS. \tag{20}$$

After performing minimization of functional (20) the following is obtained:

$$[K]\{v_y^r\} = \{f\}, \tag{21}$$

where $[K] = [T]^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T]$ is finite element stiffness matrix; $\{f\} = [T]^T \int_S [A]^T \{q\} dS$ – nodal forces vector.

2.5. Shell of revolution finite element in mixed formulation

Displacements and stresses of the hexahedral finite element are taken as nodal unknowns:

$$\begin{aligned} \{v_y\}^T_{1 \times 24} &= \{v^{1i}, \dots, v^{1h}, v^{2i}, \dots, v^{2h}, v^{3i}, \dots, v^{3h}\}; \\ \{\sigma_y\}^T_{1 \times 48} &= \{\sigma^{11i}, \dots, \sigma^{11h}, \sigma^{22i}, \dots, \sigma^{22h}, \sigma^{33i}, \dots, \sigma^{33h}, \sigma^{12i}, \dots, \sigma^{12h}, \sigma^{13i}, \dots, \sigma^{13h}, \sigma^{23i}, \dots, \sigma^{23h}\}. \end{aligned} \tag{22}$$

For approximating target quantities through nodal values, bilinear functions are adopted:

$$\lambda = \{\varphi(\xi, \eta, \zeta)\}^T_{1 \times 8} \{\lambda_y\}_{8 \times 1}, \tag{23}$$

where λ refers to values $v^1, v^2, v^3, \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23}$.

Based on (22) and (23) the following matrix relations are formed:

$$\{v\} = [A_c]\{v_y\}; \{\sigma^{ij}\} = [S]\{\sigma_y\}. \tag{24}$$

Deformations (12) based on (24) can be written in matrix form:

$$\{\varepsilon\} = [L][A_c]\{v_y\} = [B_c]\{v_y\}. \quad (25)$$

6×1 6×3 3×24 24×1 6×24 24×1

For obtaining the finite element deformation matrix a functional, obtained from (19) by replacing the actual work of internal forces by the difference between total and additional work of internal forces, is used:

$$\Phi_c = \int_V \left[\{\sigma\}^T [L]\{v\} - \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \right] dV - \frac{1}{2} \int_S \{v\}^T \{q\} dS. \quad (26)$$

1×6 6×3 3×1 1×6 6×1 1×3 3×1

Based on (24) and (25), functional (26) for the finite element is written as

$$\Phi_c = \left\{ \sigma_y \right\}^T \int_V [S]^T [B_c] dV \left\{ v_y \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_y \right\}^T \int_V [S]^T [C][S] dV \left\{ \sigma_y \right\} - \frac{1}{2} \left\{ v_y \right\}^T \int_S [A_c]^T \{q\} dS. \quad (27)$$

1×48 1×48×6 6×24 24×1 1×48 1×48×6 6×6 6×48 48×1 1×24 1×24×3 3×1

After variation of functional (27) by nodal unknowns $\{\sigma_y\}^T$ and $\{v_y\}^T$ the following systems of equations are obtained:

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial \{\sigma_y\}^T} \equiv -[H]\{\sigma_y\} + [Q]\{v_y\} = 0;$$

48×48 48×1 48×24 24×1

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial \{v_y\}^T} \equiv [Q]^T \{\sigma_y\} - \{f_y\} = 0, \quad (28)$$

24×48 48×1 24×1

where $[Q] = \int_V [S]^T [B_c] dV$; $[H] = \int_V [S]^T [C][S] dV$; $\{f_y\} = \int_S [A]^T \{q\} dS$.

48×24 1×48×6 6×24 48×48 1×48×6 6×6 6×48 24×1 1×24×3 3×1

Systems (28) are represented in traditional FEM formulation

$$[K]\{Z_y\} = \{F\}, \quad (29)$$

72×72 72×1 72×1

where $[K] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$ is finite element deformation matrix; $\{Z_y\}^T = \left\{ \left\{ \sigma_y \right\}^T, \left\{ v_y \right\}^T \right\}$ – nodal unknowns row;

$\{F\}^T = \left\{ \left\{ 0 \right\}^T, \left\{ f_y \right\}^T \right\}$ – finite element nodal loads row

1×72 1×48 1×24

3. Results and their analysis

The stress state of cylindrical shell fixed at the ends and loaded by internal pressure of intensity q was determined. The following initial data were specified: radius of middle surface $R = 1.0$ m; generatrix length $L = 0.5$ m; wall thickness $h = 0.02$ m; $q = 5$ MPa; modulus of elasticity $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; Poisson's ratio $\nu = 0.3$.

The results of the analysis are presented in Tables 1 and 2. The values of stresses in the direction of cylinder axis are given at the points: 1 – located in the fixed end; 2 – located at a distance $L/32 = \frac{25}{32}h$ from the fixed end; 3 – in the midspan.

Analytical model is represented by a single strip of hexahedral elements along the cylinder axis.

The first column in Table 1 shows the number of rows of finite elements along the thickness of the cylinder, the second column shows the number of nodal points in the axial direction and in the direction of shell thickness. The remaining columns show numerical results of the stresses in the direction of the cylinder axis in inner σ^B and outer σ^H fibers, respectively, at points 1, 2, 3.

Analysis of numerical results in Table 1 shows convergence of the computing process when using FEM in formulation of the displacement method.

Differences in the results of calculations for point 1 are explained by the difference in boundary conditions for finite elements in the specified formulations, namely, in the displacement method, boundary conditions are assigned for the derivatives of displacements, and in the mixed formulation, boundary conditions for displacements are assigned.

At point 2, which is at a distance $\frac{25}{32}h$ from the fixed support, the results stabilized by the mixed method already with one finite element in thickness, and in the displacement method, it monotonically tends to the same numerical values with an increase in the number of finite elements in thickness.

Table 1

**Numerical values of parameters for stress-strain state of cylindrical shell
when using elements in displacement method formulation**

Number of rows of elements through cylinder's thickness	Mesh discretization	Cross section					
		Point 1		Point 2		Point 3	
		Stress, MPa					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	381.14	-308.97	298.26	-221.91	-57.04	141.07
	33 × 2	396.74	-298.97	303.02	-211.51	-56.83	140.99
	65 × 2	430.50	-269.26	302.17	-212.05	-56.61	140.88
	97 × 2	467.52	-236.44	301.87	-211.73	-56.46	140.81
	129 × 2	505.40	-202.51	301.66	-211.46	-56.33	140.74
2	17 × 3	444.24	-329.74	331.64	-253.09	-73.52	157.34
	33 × 3	464.29	-323.12	342.49	-260.16	-73.83	157.77
	65 × 3	489.77	-326.93	342.70	-261.20	-73.78	157.80
	97 × 3	516.03	-328.81	342.71	-260.89	-73.69	157.76
	129 × 3	540.37	-326.81	342.64	-260.69	-73.62	157.72
3	17 × 4	472.09	-347.74	334.54	-262.45	-75.68	159.53
	33 × 4	499.49	-349.06	345.85	-267.92	-76.03	160.00
	65 × 4	527.69	-352.34	347.01	-267.10	-76.03	160.07
	97 × 4	552.45	-352.12	346.93	-266.94	-75.95	160.03
	129 × 4	578.18	-351.27	346.82	-266.77	-75.88	160.00
4	17 × 5	491.13	-354.73	338.14	-265.33	-76.91	160.78
	33 × 5	526.89	-355.26	348.14	-270.49	-77.43	161.42
	65 × 5	561.89	-355.87	350.38	-270.86	-77.50	161.56
	97 × 5	586.72	-355.73	350.32	-270.78	-77.45	161.54
	129 × 5	611.58	-355.93	350.22	-270.64	-77.39	161.51
7	17 × 8	523.33	-362.29	348.61	-268.24	-78.25	162.14
	33 × 8	584.38	-363.68	350.40	-274.48	-79.00	163.04
	65 × 8	642.43	-365.46	354.14	-275.20	-79.19	163.29
	97 × 8	677.46	-365.73	354.56	-275.23	-79.19	163.32
	129 × 8	704.12	-365.73	354.53	-275.16	-79.16	163.31

Table 2

Numerical values of parameters for stress-strain state of cylindrical shell when using elements in mixed formulation

Number of rows of elements through cylinder's thickness	Mesh discretization	Cross section					
		Point 1		Point 2		Point 3	
		Stress, MPa					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	472.47	-381.34	373.02	-288.59	-72.05	159.57
	33 × 2	479.93	-390.65	365.74	-277.22	-79.57	165.13
	65 × 2	480.76	-392.41	366.43	-278.84	-81.44	166.05
	97 × 2	480.60	-392.55	366.27	-278.98	-81.76	166.07
	129 × 2	480.43	-392.54	366.11	-278.98	-81.87	166.03
2	17 × 3	532.16	-335.43	364.93	-292.25	-74.68	160.75
	33 × 3	543.99	-334.06	370.30	-278.72	-81.31	165.52
	65 × 3	544.53	-332.87	369.31	-279.13	-82.49	166.10
	97 × 3	543.17	-333.25	368.38	-279.17	-82.55	166.05
	129 × 3	542.10	-333.71	367.80	-279.22	-82.51	166.00
3	17 × 4	516.60	-365.22	365.88	-293.70	-75.69	160.87
	33 × 4	541.69	-384.38	363.23	-275.69	-81.81	165.84
	65 × 4	556.19	-394.50	364.47	-278.87	-82.82	166.42
	97 × 4	559.89	-397.72	364.49	-279.98	-82.84	166.34
	129 × 4	561.38	-399.15	364.43	-280.50	-82.80	166.26
4	17 × 5	519.91	-350.43	363.74	-296.82	-76.28	161.07
	33 × 5	553.90	-367.90	361.51	-274.04	-82.07	165.86
	65 × 5	583.84	-381.24	363.74	-277.62	-82.99	166.41
	97 × 5	592.53	-385.93	364.13	-278.75	-82.99	166.33
	129 × 5	595.59	-388.04	364.09	-279.27	-82.92	166.24
7	17 × 8	517.45	-354.04	364.49	-298.62	-76.85	161.26
	33 × 8	558.47	-382.77	358.64	-271.14	-82.31	165.97
	65 × 8	616.05	-413.21	361.39	-275.66	-83.07	166.43
	97 × 8	645.52	-425.87	363.43	-277.76	-83.06	166.35
	129 × 8	659.74	-431.69	364.19	-278.77	-83.01	166.28

Analysis of numerical results in Table 2 shows more rapid convergence of computational process when using finite element method in the mixed formulation.

It is explained by the fact that in the mixed finite element the stresses are consistent not only at the nodes of finite elements, but also on their faces. In the finite elements of the displacement method, there is no deformation compatibility along the faces.

4. Conclusion

The accuracy of determining the strength parameters of the shell of revolution and the convergence of computational process are higher when using finite elements in the mixed formulation. This is due to the fact that when obtaining the deformation matrix of this finite element, the degree of approximating functions for approximating the desired values of the inner point of the finite element through the nodal unknowns in the mixed formulation is lower than in the displacement method formulation. The compatibility condition of the target quantities in the displacement method formulation is satisfied only at nodal points. The aforementioned compatibility conditions are absent on the edges and faces of hexahedral finite elements. When using finite elements in the mixed formulation, the compatibility conditions for displacements and stresses are satisfied not only at nodal points, but also on the edges and faces of the hexahedral element.

1. Введение

Теория деформирования твердых тел в настоящее время развита достаточно подробно [1–2]. Однако аналитическое получение конкретных результатов возможно только в некоторых случаях, далеких от практики инженерных расчетов. Поэтому разработка приближенных и численных методов расчета конструктивных элементов инженерных структур является актуальной задачей. Среди современных методов исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) строительных конструкций в последнее время практически повсеместно получил распространение численный метод конечных элементов (МКЭ) на основе метода перемещений [3–15]. Основными недостатками данной формулировки МКЭ можно назвать отсутствие непрерывности производных от перемещений на ребрах и боковых поверхностях конечных элементов. Разработка конечных элементов в смешанной формулировке [16–25] позволяет понизить степень аппроксимирующих функций для выражения искомых величин через узловые неизвестные, дает возможность выполнить условия непрерывности напряжений и перемещений не только в узловых точках, но и на ребрах и боковых поверхностях элементов дискретизации.

Предметом исследования является напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при произвольном нагружении, целью – сравнительный анализ конечно-элементных алгоритмов определения параметров прочности оболочки вращения.

Для выполнения сравнительного анализа вариантов разработаны конечно-элементные алгоритмы шестигранного конечного элемента в двух формулировках: в формулировке метода перемещений и в смешанной формулировке. При получении матрицы жесткости шестигранника в формулировке метода перемещений в качестве узловых неизвестных использованы перемещения и их первые производные, а при формировании матрицы напряженно-деформированного состояния шестигранника в смешанной формулировке в качестве узловых неизвестных приняты перемещения и напряжения.

2. Методы исследования

Для получения матрицы жесткости шестигранного конечного элемента в формулировке метода перемещений использования функционал, основанный на равенстве действительных работ внешних нагрузок на перемещениях и действительных работ внутренних напряжений на деформациях по объему конечного элемента. Для аппроксимации искомых величин внутренней точки конечного элемента через узловые неизвестные применялись полиномы Эрмита третьей степени.

Для получения матрицы напряженно-деформированного состояния в смешанной формулировке использовался функционал, полученный путем замены действительной работы внутренних усилий функционала метода перемещений разностью полной работы внутренних усилий и их дополнительной работы, а для аппроксимации перемещений и напряжений через узловые неизвестные – трилинейные соотношения.

2.1. Геометрические параметры оболочки вращения

Положение произвольной точки M^0 срединной поверхности оболочки вращения определяется радиус-вектором

$$\vec{R} = x\vec{i} + r(x)\sin\theta\vec{j} + r(x)\cos\theta\vec{k}, \quad (1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат; $r(x)$ – радиус вращения рассматриваемой точки срединной поверхности; θ – угол, отсчитываемый от вертикального диаметра против хода часовой стрелки.

Базисные векторы произвольной точки срединной поверхности определяются выражениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i} + r_{,x}\sin\theta\vec{j} + r_{,x}\cos\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^0 = r\cos\theta\vec{j} - r\sin\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_3^0 &= \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|} = \frac{r_{,x}}{\sqrt{u}}\vec{i} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{u}}\vec{j} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{u}}\vec{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u = 1 + r_{,x}^2$.

Положение произвольной точки оболочки M^{0t} , отстоящей на расстоянии t от срединной поверхности, определяется радиусом-вектором

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}_3^0. \quad (3)$$

Базисные векторы точки M^{0t} определяются дифференцированием (3):

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0t} = \vec{R}_{,x}^0 + t\vec{a}_{3,x}^0 = \vec{a}_1^0 + t\vec{a}_{3,x}^0; \\ \vec{g}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^{0t} = \vec{R}_{,\theta}^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0 = \vec{a}_2^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0; \\ \vec{g}_3^0 &= \vec{R}_{,t}^{0t} = \vec{a}_3^0. \end{aligned} \quad (4)$$

При использовании (2) на основе (4) можно сформировать матричные соотношения

$$\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad (5)$$

где $\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_1^0 \ \vec{g}_2^0 \ \vec{g}_3^0 \right\}$; $\left\{ \vec{i} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$.

Дифференцированием (4) при учете (5) производные базисных векторов точки M^{0t} можно определить компонентами в этом же базисе:

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{g}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_1]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [N_1]_{3 \times 3} [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [m]_{3 \times 3} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \vec{g}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_2]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [N_2]_{3 \times 3} [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [n]_{3 \times 3} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \vec{g}_{,t}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_3]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [N_3]_{3 \times 3} [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [l]_{3 \times 3} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\left\{ \vec{g}_{,x}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_{1,x}^0, \vec{g}_{2,x}^0, \vec{g}_{3,x}^0 \right\}$; $\left\{ \vec{g}_{,\theta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_{1,\theta}^0, \vec{g}_{2,\theta}^0, \vec{g}_{3,\theta}^0 \right\}$; $\left\{ \vec{g}_{,t}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_{1,t}^0, \vec{g}_{2,t}^0, \vec{g}_{3,t}^0 \right\}$.

2.2. Перемещения и деформации

Вектор перемещения точки M^{0t} от действия нагрузки представляется компонентами в базисе точки M^{0t} :

$$\vec{V} = v^m \vec{g}_m^0 = \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}^T \left\{ v \right\}_{3 \times 1}; \quad m = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $\left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ v^1 \ v^2 \ v^3 \right\}$.

Производные вектора перемещения (7) по криволинейным координатам x, θ, t определяются выражениями

$$\vec{V}_{,m} = v_{,m}^1 \vec{g}_1^0 + v_{,m}^1 \vec{g}_{1,m}^0 + v_{,m}^2 \vec{g}_2^0 + v_{,m}^2 \vec{g}_{2,m}^0 + v_{,m}^3 \vec{g}_3^0 + v_{,m}^3 \vec{g}_{3,m}^0. \quad (8)$$

С учетом (6) соотношения (8) можно представить в виде

$$\vec{V}_{,m} = f_m^k \vec{g}_k^0, \quad (9)$$

где f_m^k – функции компонент вектора перемещения и их производных, определяемые выражениями

$$f_1^1 = v_{,x}^1 + v^1 m_{11} + v^2 m_{21} + v^3 m_{31};$$

$$\dots$$

$$f_3^3 = v_{,t}^3 + v^1 l_{13} + v^2 l_{23} + v^3 l_{33}. \quad (10)$$

Деформации определяются соотношениями механики сплошной среды:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}_i^0 \bar{v}_{,j} + \bar{g}_j \bar{v}_{,i}). \quad (11)$$

С учетом (4) и (9) можно сформировать матричное соотношение

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \left\{ v \right\}_{3 \times 1}, \quad (12)$$

где $\left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T = \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23} \}$; $[L]$ – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

2.3. Соотношения между деформациями и напряжениями

Закон Гука представляется в криволинейной системе координат выражениями

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij};$$

$$\sigma^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{0ij} + 2\mu g^{0ik} g^{0jl} \varepsilon_{kl};$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0;$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} g_{im}^0 g_{jn}^0 \sigma^{mn} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0, \quad (13)$$

где $I_1(\varepsilon) = g_{mn}^0 \varepsilon^{mn} = g^{0mn} \varepsilon_{mn}$ – первый инвариант тензора деформаций; $I_1(\sigma) = g_{mn}^0 \sigma^{mn} = g^{0mn} \sigma_{mn}$ – первый инвариант тензора напряжений; g_{mn}^0, g^{0mn} – ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора; $\varepsilon_{mn}, \varepsilon^{mn}$ – ковариантные и контравариантные компоненты тензора деформаций; σ_{mn}, σ^{mn} – ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений; λ, μ – параметры Ламе; E – модуль упругости материала; ν – коэффициент поперечной деформации.

На основании соотношений (13) формируется матричное выражение

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [C]_{6 \times 6} \left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1}, \quad (14)$$

где $\left\{ \sigma^{ij} \right\}_{1 \times 6}^T = \{ \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23} \}$.

2.4. Конечный элемент оболочки вращения в формулировке метода перемещений

Конечный элемент принят в виде шестигранника с узлами i, j, k, l, m, n, p, h . Для выполнения численного интегрирования шестигранник отображается на куб с локальными координатами, изменяющимися в пределах $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$. В качестве узловых неизвестных приняты перемещения и их производные по локальным координатам.

Аппроксимация перемещений внутренней точки конечного элемента выполнялась на основе полиномов Эрмита третьей степени матричным выражением

$$\left\{ \mathbf{v} \right\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1}, \quad (15)$$

$$\text{где } \left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,\xi}^{1i}, \dots, v_{,\xi}^{1h}, v_{,\eta}^{1i}, \dots, v_{,\eta}^{1h}, v_{,\zeta}^{1i}, \dots, v_{,\zeta}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,\xi}^{3i}, \dots, v_{,\xi}^{3h}, v_{,\eta}^{3i}, \dots, v_{,\eta}^{3h}, v_{,\zeta}^{3i}, \dots, v_{,\zeta}^{3h} \right\}.$$

Векторы узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат связаны матричным соотношением

$$\left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1} = [T]_{96 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{96 \times 1}, \quad (16)$$

$$\text{где } \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,x}^{1i}, \dots, v_{,x}^{1h}, v_{,0}^{1i}, \dots, v_{,0}^{1h}, v_{,t}^{1i}, \dots, v_{,t}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,x}^{3i}, \dots, v_{,x}^{3h}, v_{,0}^{3i}, \dots, v_{,0}^{3h}, v_{,t}^{3i}, \dots, v_{,t}^{3h} \right\}.$$

Матрица $[T]$ сформирована на основе дифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \xi} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial q}{\partial \zeta} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (17)$$

где под q принимаются компоненты вектора перемещения v^1, v^2, v^3 .

С использованием (15) деформации (12) определяются в матричном виде

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \left\{ \mathbf{v} \right\}_{3 \times 1} = [L]_{6 \times 3} [A]_{3 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1} = [B]_{6 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1}. \quad (18)$$

Для формирования матрицы жесткости конечного элемента используется функционал, основанный на равенстве работ внешних и внутренних сил:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\}_{6 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_S \left\{ \mathbf{v} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \mathbf{q} \right\}_{3 \times 1} dS, \quad (19)$$

где V – объем элемента; S – поверхность приложения заданной нагрузки; $\left\{ \mathbf{q} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ q_1, q_2, q_3 \right\}$ – компоненты вектора внешних нагрузок.

При учете (14), (15), (16) и (18) функционал (19) запишется выражением

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{1 \times 96}^T [T]_{96 \times 96}^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T] \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{96 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{1 \times 96}^T [T]_{96 \times 96}^T \int_S [A]^T \left\{ \mathbf{q} \right\}_{96 \times 3} dS. \quad (20)$$

После выполнения минимизации функционала (20) получается

$$[K]_{96 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{96 \times 1} = \left\{ \mathbf{f} \right\}_{96 \times 1}, \quad (21)$$

где $[K]_{96 \times 96} = [T]_{96 \times 96}^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T]_{96 \times 96}$ – матрица жесткости конечного элемента; $\left\{ \mathbf{f} \right\}_{96 \times 1} = [T]_{96 \times 96}^T \int_S [A]^T \left\{ \mathbf{q} \right\}_{96 \times 3} dS$ – вектор узловых усилий.

2.5. Конечный элемент оболочки вращения в смешанной формулировке

В качестве узловых неизвестных шестигранного конечного элемента принимаются перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} \left\{ v_y \right\}_{1 \times 24}^T &= \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v^{2i}, \dots, v^{2h}, v^{3i}, \dots, v^{3h} \right\}; \\ \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T &= \left\{ \sigma^{11i}, \dots, \sigma^{11h}, \sigma^{22i}, \dots, \sigma^{22h}, \sigma^{33i}, \dots, \sigma^{33h}, \sigma^{12i}, \dots, \sigma^{12h}, \sigma^{13i}, \dots, \sigma^{13h}, \sigma^{23i}, \dots, \sigma^{23h} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для аппроксимации искомых величин через узловые значения приняты билинейные функции

$$\lambda = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \lambda_y \right\}_{8 \times 1}, \quad (23)$$

где под λ понимаются величины $v^1, v^2, v^3, \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23}$.

На основе (22) и (23) формируются матричные соотношения

$$\left\{ v \right\}_{3 \times 1} = \left[A_c \right]_{3 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad \left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1} = \left[S \right]_{6 \times 48} \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (24)$$

Деформации (12) на основе (24) запишутся в матричном виде:

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = \left[L \right]_{6 \times 3} \left[A_c \right]_{3 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} = \left[B_c \right]_{6 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (25)$$

Для получения матрицы деформирования конечного элемента использован функционал, полученный из (19) путем замены действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работы внутренних усилий:

$$\Phi_c = \int_V \left[\left\{ \sigma \right\}_{1 \times 6}^T \left[L \right]_{6 \times 3} \left\{ v \right\}_{3 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} \right] dV - \frac{1}{2} \int_S \left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS. \quad (26)$$

С учетом (24) и (25) функционал (26) для конечного элемента запишется выражением

$$\Phi_c = \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[B_c \right]_{6 \times 24} dV \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[C \right]_{6 \times 6} \left[S \right]_{6 \times 48} dV \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ v_y \right\}_{1 \times 24}^T \int_S \left[A_c \right]_{24 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS. \quad (27)$$

После варьирования функционала (27) по узловым неизвестным $\left\{ \sigma_y \right\}^T$ и $\left\{ v_y \right\}^T$ получаются системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_c}{\partial \left\{ \sigma_y \right\}^T} &\equiv - \left[H \right]_{48 \times 48} \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1} + \left[Q \right]_{48 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} = 0; \\ \frac{\partial \Phi_c}{\partial \left\{ v_y \right\}^T} &\equiv \left[Q \right]_{24 \times 48}^T \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1} - \left\{ f_y \right\}_{24 \times 1} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\left[Q \right]_{48 \times 24} = \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[B_c \right]_{6 \times 24} dV$; $\left[H \right]_{48 \times 48} = \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[C \right]_{6 \times 6} \left[S \right]_{6 \times 48} dV$; $\left\{ f_y \right\}_{24 \times 1} = \int_S \left[A \right]_{24 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS$.

Системы (28) представляются в традиционной для МКЭ форме

$$\left[K \right]_{72 \times 72} \left\{ Z_y \right\}_{72 \times 1} = \left\{ F \right\}_{72 \times 1}, \quad (29)$$

где $[K] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$ – матрица деформирования конечного элемента; $\{Z_y\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\sigma_y\}^T \\ \{v_y\}^T \end{matrix} \right\}$ – строка узловых неизвестных; $\{F\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{0\}^T \\ \{f_y\}^T \end{matrix} \right\}$ – строка узловых нагрузок конечного элемента.

3. Результаты исследований и их анализ

Было определено напряженное состояние жестко заземленной по торцам цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением интенсивности q . Приняты следующие исходные данные: радиус средней поверхности $R = 1,0$ м; длина образующей $L = 0,5$ м; толщина стенки $h = 0,02$ м; $q = 5$ МПа; модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент поперечной деформации $\nu = 0,3$.

Таблица 1

Численные значения параметров напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при использовании элементов в формулировке метода перемещений

Число рядов элементов по толщине цилиндра	Сетка дискретизации	Сечение					
		Точка 1		Точка 2		Точка 3	
		Напряжения, МПа					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	381,14	-308,97	298,26	-221,91	-57,04	141,07
	33 × 2	396,74	-298,97	303,02	-211,51	-56,83	140,99
	65 × 2	430,50	-269,26	302,17	-212,05	-56,61	140,88
	97 × 2	467,52	-236,44	301,87	-211,73	-56,46	140,81
	129 × 2	505,40	-202,51	301,66	-211,46	-56,33	140,74
2	17 × 3	444,24	-329,74	331,64	-253,09	-73,52	157,34
	33 × 3	464,29	-323,12	342,49	-260,16	-73,83	157,77
	65 × 3	489,77	-326,93	342,70	-261,20	-73,78	157,80
	97 × 3	516,03	-328,81	342,71	-260,89	-73,69	157,76
	129 × 3	540,37	-326,81	342,64	-260,69	-73,62	157,72
3	17 × 4	472,09	-347,74	334,54	-262,45	-75,68	159,53
	33 × 4	499,49	-349,06	345,85	-267,92	-76,03	160,00
	65 × 4	527,69	-352,34	347,01	-267,10	-76,03	160,07
	97 × 4	552,45	-352,12	346,93	-266,94	-75,95	160,03
	129 × 4	578,18	-351,27	346,82	-266,77	-75,88	160,00
4	17 × 5	491,13	-354,73	338,14	-265,33	-76,91	160,78
	33 × 5	526,89	-355,26	348,14	-270,49	-77,43	161,42
	65 × 5	561,89	-355,87	350,38	-270,86	-77,50	161,56
	97 × 5	586,72	-355,73	350,32	-270,78	-77,45	161,54
	129 × 5	611,58	-355,93	350,22	-270,64	-77,39	161,51
7	17 × 8	523,33	-362,29	348,61	-268,24	-78,25	162,14
	33 × 8	584,38	-363,68	350,40	-274,48	-79,00	163,04
	65 × 8	642,43	-365,46	354,14	-275,20	-79,19	163,29
	97 × 8	677,46	-365,73	354,56	-275,23	-79,19	163,32
	129 × 8	704,12	-365,73	354,53	-275,16	-79,16	163,31

Таблица 2

Численные значения параметров напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при использовании элементов в смешанной формулировке

Число рядов элементов по толщине цилиндра	Сетка дискретизации	Сечение					
		Точка 1		Точка 2		Точка 3	
		Напряжения, МПа					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	472,47	-381,34	373,02	-288,59	-72,05	159,57
	33 × 2	479,93	-390,65	365,74	-277,22	-79,57	165,13
	65 × 2	480,76	-392,41	366,43	-278,84	-81,44	166,05
	97 × 2	480,60	-392,55	366,27	-278,98	-81,76	166,07
	129 × 2	480,43	-392,54	366,11	-278,98	-81,87	166,03
2	17 × 3	532,16	-335,43	364,93	-292,25	-74,68	160,75
	33 × 3	543,99	-334,06	370,30	-278,72	-81,31	165,52
	65 × 3	544,53	-332,87	369,31	-279,13	-82,49	166,10
	97 × 3	543,17	-333,25	368,38	-279,17	-82,55	166,05
	129 × 3	542,10	-333,71	367,80	-279,22	-82,51	166,00
3	17 × 4	516,60	-365,22	365,88	-293,70	-75,69	160,87
	33 × 4	541,69	-384,38	363,23	-275,69	-81,81	165,84
	65 × 4	556,19	-394,50	364,47	-278,87	-82,82	166,42
	97 × 4	559,89	-397,72	364,49	-279,98	-82,84	166,34
	129 × 4	561,38	-399,15	364,43	-280,50	-82,80	166,26
4	17 × 5	519,91	-350,43	363,74	-296,82	-76,28	161,07
	33 × 5	553,90	-367,90	361,51	-274,04	-82,07	165,86
	65 × 5	583,84	-381,24	363,74	-277,62	-82,99	166,41
	97 × 5	592,53	-385,93	364,13	-278,75	-82,99	166,33
	129 × 5	595,59	-388,04	364,09	-279,27	-82,92	166,24
7	17 × 8	517,45	-354,04	364,49	-298,62	-76,85	161,26
	33 × 8	558,47	-382,77	358,64	-271,14	-82,31	165,97
	65 × 8	616,05	-413,21	361,39	-275,66	-83,07	166,43
	97 × 8	645,52	-425,87	363,43	-277,76	-83,06	166,35
	129 × 8	659,74	-431,69	364,19	-278,77	-83,01	166,28

Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2. Приведены значения напряжений по направлению оси цилиндра в точках, расположенных следующим образом: 1 – в заделке; 2 – на расстоянии $L/32 = \frac{25}{32}h$ от заделки; 3 – в середине пролета.

Расчетная схема представлена одной полоской шестигранных элементов вдоль оси цилиндра.

В табл. 1 в первой колонке показано число рядов конечных элементов по толщине цилиндра, во второй колонке – число узловых точек в осевом направлении и в направлении толщины оболочки. В последующих колонках приведены численные результаты напряжений по направлению оси цилиндра во внутренних σ^B и наружных σ^H волокнах соответственно в точках 1, 2, 3.

Анализ численных результатов табл. 1 показывает сходимость вычислительного процесса при использовании МКЭ в формулировке метода перемещений.

Различия в результатах расчетов для точки 1 объясняются отличием граничных условий для конечных элементов в принятых формулировках, а именно: в методе перемещений назначаются граничные условия по производным перемещений, а в смешанной формулировке назначаются граничные условия по перемещениям.

В точке 2, отстоящей от заделки на расстоянии $\frac{25}{32}h$, результаты стабилизировались при смешанном методе уже при одном конечном элементе по толщине, а в методе перемещений монотонно стремятся к таким же числовым значениям при увеличении количества конечных элементов по толщине.

Анализ численных результатов табл. 2 показывает более быструю сходимость вычислительного процесса при использовании метода конечных элементов в смешанной формулировке.

Это объясняется тем, что в смешанном конечном элементе выполняется совместность по напряжениям не только в узлах конечных элементов, но и по их граням. В конечных элементах метода перемещений совместность деформаций по граням отсутствует.

4. Заключение

Точность определения параметров прочности оболочки вращения и сходимость вычислительного процесса выше при использовании конечных элементов в смешанной формулировке. Это объясняется тем, что при получении матрицы деформирования этого конечного элемента степень аппроксимирующих функций для аппроксимирования искомых величин внутренней точки конечного элемента через узловые неизвестные в смешанной формулировке ниже, чем в формулировке метода перемещений. Условие совместности искомых величин в формулировке метода перемещений выполняются только в узловых точках. На ребрах и гранях шестигранных конечных элементов вышеупомянутые условия совместности отсутствуют. При использовании конечных элементов в смешанной формулировке условия совместности по перемещениям и напряжениям выполняются не только в узловых точках, но и на ребрах и гранях шестигранного элемента.

References

- Galimov K.Z., Paimushin V.N. *Teoriya obolochek slozhnoj geometrii* [Theory of shells of complex geometry]. Kazan: Kazan University Publ.; 1985. (In Russ.)
- Petrov V.V. *Nelinejnaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear incremental structural mechanics]. Volgda: Infra-Inzheneriya Publ.; 2014. (In Russ.)
- Bate K.-U. *Metody konechnyh elementov* [Finite Element Methods]. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.)
- Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. Stress-strain state of a cylindrical shell of a tunnel using construction stage analysis. *Komunikacie*. 2019;21(3):72–76.
- Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. The definition of the critical buckling load beam model and two-dimensional model of the round cylindrical shell that interact with the soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2019;15(4):291–298. (In Russ.)
- Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. Numerical analysis of the account of the stages in the calculation of the shell together with the soil massif. *International journal for computational civil and structural engineering*. 2019;15(3):84–95. (In Russ.)
- Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnyh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstrukcij* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)
- Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z. Raschet mnogoslojnoj obolochki s ispol'zovaniem ob'emnogo konechnogo elementa [Calculation of a multilayer shell using a volumetric finite element]. *Izvestia VSTU* [Bulletin of the Volgograd State Technical University]. 2010;4(4):125–128. (In Russ.)
- Kayumov R.A. K resheniyu zadach neodnorodnoj teorii uprugosti metodom konechnyh elementov [To the solution of problems of the heterogeneous theory of elasticity by the finite element method]. *Trudy Vtoroi Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii* [Proceedings of the Second All-Russian Scientific Conference] (June 1–3, 2005). Part 1. *Matematicheskie modeli mekhaniki, prochnost' i nadezhnost' konstruksii. Matematicheskoe modelirovanie i kraevedcheskie zadachi* [Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structures. Mathematical modeling and local history problems]. Samara: SamGTU Publ.; 2005. p. 143–145. (In Russ.)
- Kiselev A.P., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P. Account of the shift as rigid body of shell of revolution axially symmetric loaded on the base of FEM. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):59–64. (In Russ.)
- Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ischanov T.R. Finite element analysis of stress-strain state of shells of revolution with taking into account the strain of transversal shearing. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(5):48–56. (In Russ.)

12. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(6):459–466. (In Russ.)
13. Gureeva N.A., Arkov D.P. Flat problem of theory of jump in base method of final elements in mixed understanding in account physical nonlinearity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2010; (4):32–36. (In Russ.)
14. Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2015;(295):327–346.
15. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Stress-strain analysis of a thin-shell part of fuselage using a triangular finite element with Lagrange multipliers. *Russian Aeronautics*. 2016;59(3):316–323.
16. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45(1):51–58.
17. Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018;113(4):634–655.
18. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Analysis of a shell of revolution subjected to axisymmetric loading taking into account geometric nonlinearity on the basis of the mixed finite element method. *Russian Aeronautics*. 2014;57(3):232–239.
19. Gureeva N.A., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Comparative analysis of finite element formulations at plane loading of an elastic body. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):139–145. (In Russ.)
20. Ignatyev V.A., Ignatyev A.V. Plane problem solution of elasticity theory by the finite element method in the form of classical mixed method. *Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture*. 2013;31–2(50):337–343. (In Russ.)
21. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Gamzatova E.A. Analysis of bending plates with unilateral constraints through the finite element method in the form of the classical mixed method. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2018;8(716):5–14. (In Russ.)
22. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Gamzatova E.A. Analysis of bending problem of plates with rigid inclusions or holes by the FEM in the form of a classical mixed method. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2017;9(705):5–14. (In Russ.)
23. Leonetti D., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for non-linear analyses of elastic shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 2017:1–24.
24. Chi H., Beirão da Veiga L., Paulino G.H. Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations. *Comput. Methods Appl. Engng*. 2017;318:148–192. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.12.020>
25. Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruno L. A stress/displacement virtual element method for plane elasticity problems. *Comput. Methods Appl. Engng*. 2017;325:155–174. DOI: 10.1016/j.cma.2017.06.036.

Список литературы

1. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань: Изд-во Казанского университета, 1985. 164 с.
2. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. Вологда: Инфра-Инженерия, 2014. 479 с.
3. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов / под ред. Л.И. Турчака. М.: Физматлит, 2010. 1024 с.
4. Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. Stress-strain state of a cylindrical shell of a tunnel using construction stage analysis // *Komunikacie*. 2019. Vol. 21. No. 3. Pp. 72–76.
5. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Определение критической нагрузки потери устойчивости стержневой и плоской моделей круговой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 4. С. 291–298.
6. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ учета стадийности в расчетах оболочки совместно с массивом грунта // *Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*. 2019. Т. 15. № 3. С. 84–95.
7. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
8. Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента // *Известия ВолгГТУ*. 2010. Т. 4. № 4. С. 125–128.
9. Каюмов Р.А. К решению задач неоднородной теории упругости методом конечных элементов // *Труды Второй Всероссийской научной конференции (1–3 июня 2005 г.)*. Ч. 1. Математические модели механики, проч-

ность и надежность конструкций. Математическое моделирование и краеведческие задачи. Самара: СамГТУ, 2005. С. 143–145.

10. Киселев А.П., Киселева Р.З., Николаев А.П. Учет смещения как жесткого целого осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 59–64.

11. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р. Конечно-элементный анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 5. С. 48–56.

12. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 459–466.

13. Гуреева Н.А., Арьков Д.П. Решение плоской задачи теории пластичности на основе МКЭ в смешанной формулировке // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 4. С. 32–36.

14. *Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D.* A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2015. Vol. 295. Pp. 327–346.

15. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A.* Stress-strain analysis of a thin-shell part of fuselage using a triangular finite element with Lagrange multipliers // *Russian Aeronautics*. 2016. Vol. 59. No. 3. Pp. 316–323.

16. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V.* Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 45. No. 1. Pp. 51–58.

17. *Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M.* An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2018. Vol. 113. Issue 4. Pp. 634–655.

18. Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П. Расчет осесимметрично нагруженной оболочки вращения с учетом геометрической нелинейности на основе смешанного МКЭ // Известия вузов. Авиационная техника. 2014. № 4. С. 14–19.

19. Гуреева Н.А., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Сравнительный анализ конечно-элементных формулировок при плоском нагружении упругого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 139–145.

20. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Решение плоской задачи теории упругости по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2013. Вып. 31–2 (50). С. 337–343.

21. Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Гамзатова Е.А. Анализ изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 8 (716). С. 5–14.

22. Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Гамзатова Е.А. Анализ изгибаемых пластинок, имеющих жесткие включения или отверстия, по МКЭ в форме классического смешанного метода // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2017. № 9 (705). С. 5–14.

23. *Leonetti D., Ruess M.* An efficient mixed variational reduced order model formulation for non-linear analyses of elastic shells // *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 2017. Pp. 1–24.

24. *Chi H., Beirão da Veiga L., Paulino G.H.* Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations // *Comput. Methods Appl. Engng*. 2017. Vol. 318. Pp. 148–192. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.12.020>

25. *Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruño L.* A Stress/Displacement Virtual Element Method for Plane Elasticity Problems // *Comput. Methods Appl. Engng*. 2017. Vol. 25. Pp. 155–174. DOI: 10.1016/j.cma.2017.06.036.