



ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-298-310
УДК 624.04+699.841

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Влияние жесткости основания на динамические характеристики здания как многомассового консольного стержня

В.А. Пшеничкина, В.В. Дроздов*, С.И. Строк

Волгоградский государственный технический университет, Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-кт имени В.И. Ленина, 28
*drozdov_jm@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 14 апреля 2020 г.

Доработана: 30 июня 2020 г.

Принята к публикации: 12 июля 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Исследование особенностей взаимодействия зданий и сооружений с основанием при землетрясении является одной из наиболее важных задач теории сейсмостойкости. Реакция сооружения на сейсмическое воздействие в значительной степени зависит от соотношения жесткостных характеристик грунта, фундамента и надфундаментного строения. При этом, учитывая достаточно высокую степень статистической изменчивости характеристик грунтового основания, обеспечить необходимый уровень безопасности сооружения можно только на основе применения вероятностных моделей и количественной оценки надежности системы «сооружение – основание» в целом. В настоящее время для расчета системы «сооружение – основание» на сейсмические нагрузки преимущественно применяются детерминированные дискретные модели метода конечных элементов. Но эти модели плохо приспособлены для вероятностных расчетов и требуют обширных статистических данных, которых сегодня недостаточно. Поэтому в задачах оценки надежности целесообразно применение упрощенных аналитических моделей, позволяющих при сравнительно небольшой исходной информации о системе получить величину статистической изменчивости ее реакции. **Цель статьи** – на основе известного решения для одномассовой модели представить аналитическое решение в матричной форме задачи свободных горизонтальных колебаний многомассового консольного стержня на основании, заданном моделью упругого полупространства. **Методы.** Проведено исследование влияния податливости грунтового основания на частоты и формы горизонтальных колебаний сооружения. Дано сравнение результатов с расчетом, выполненным методом конечных элементов. **Результаты.** Полученное решение предназначено для проведения вероятностного расчета системы «сооружение – основание» при сейсмических нагрузках и оценки ее надежности.

Ключевые слова: система «сооружение – основание», жесткость основания, динамические характеристики, горизонтальные колебания, частоты колебаний, формы колебаний, многомассовый консольный стержень

Для цитирования

Пшеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И. Влияние жесткости основания на динамические характеристики здания как многомассового консольного стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 298–310. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-298-310>

Введение

Одной из актуальных задач теории сейсмостойкости является учет взаимодействия зданий и

сооружений с грунтом основания при землетрясении. Реакция сооружения на сейсмическое движение грунта неоднозначна и зависит от соотношения масс и жесткостных характеристик грунта, фундамента и надфундаментного строения [1; 2].

Для расчета системы «сооружение – основание» на сейсмические нагрузки преимущественно применяются дискретные модели грунтового основания и сооружения на основе метода конечных элементов [1; 3–5]. При этом используются стандартные вычислительные комплексы, позволяющие на данном этапе развития техники производить рас-

Пшеничкина Валерия Александровна, заведующая кафедрой строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, доктор технических наук, профессор, eLIBRARY SPIN-код: 3399-0668.

Дроздов Вячеслав Вячеславович, доцент кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, кандидат технических наук, eLIBRARY SPIN-код: 3403-5982.

Строк Сергей Иванович, аспирант кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, eLIBRARY SPIN-код: 6209-1218.

© Пшеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

четы любой сложности, в том числе и нелинейные. Вместе с тем дискретные модели приводят к необходимости обоснования размеров зоны основания, которую следует включать в анализ. Число степеней свободы для моделирования грунта может существенно превышать число степеней свободы для сооружения, что снижает эффективность модели системы в целом.

С другой стороны, существует проблема оценки надежности сейсмостойких зданий. Действующие нормативные документы [6] учитывают их надежность с помощью полувероятностных методов, содержащих условные детерминированные коэффициенты для расчетных характеристик системы «сооружение – основание». Однако грунты основания представляют собой случайные поля с изменяющимися в пространстве и времени физико-механическими характеристиками. Сейсмическое движение грунта также является ярко выраженным случайным процессом. Детерминированный подход к оценке надежности сейсмостойких зданий не обеспечивает их необходимую безопасность [7; 8], так как риск повреждения или разрушения здания при реализации проектного землетрясения остается неопределенным. Следовательно, расчет сейсмостойких зданий должен проводиться на основе вероятностной концепции с использованием методов теории надежности.

Переход на вероятностные методы расчета сейсмостойких зданий с использованием дискретных моделей требует обширной статистической информации, которой в настоящее время недостаточно. В этом случае целесообразно применение упрощенных аналитических моделей, позволяющих при сравнительно небольшой исходной информации о системе получить качественные закономерности взаимодействия сооружений с основанием, оценить влияние физико-механических свойств оснований на реакцию сооружения.

Если грунт основания однороден, а фундамент сооружения может рассматриваться как жесткая плита, то для расчета системы «сооружение – основание» применима модель грунта в виде упругого полупространства. Во время землетрясения плита фундамента перемещается по шести степеням свободы, включающим по три компоненты поступательного движения и вращения [9–12]. Данная модель используется для расчета специальных инженерных сооружений (атомных станций, плотин и др.), представляющих собой массивные объекты. Тем не менее характер взаимодействия с грунтом в процессе землетрясения различен для массивных сооружений и сравнительно гибких зданий массовой застройки [13; 14]. Так, в работе [15] уста-

новлено, что при изменении соотношения жесткостей сооружения и основания происходит не только изменение частот свободных колебаний системы, но и возможна перемена мест между формами.

В настоящей работе представлено аналитическое решение задачи свободных горизонтальных колебаний многомассового консольного стержня на основании, заданном моделью упругого полупространства, и проведен анализ влияния жесткости основания на динамические характеристики сооружения.

Задача свободных колебаний консольного многомассового стержня на упругом основании

Рассмотрим свободные горизонтальные колебания с учетом демпфирования невесомой консольной стойки на упругом основании в предположении, что на ее уровнях $k = 1, 2, \dots, n$ расположены сосредоточенные массы m_1, m_2, \dots, m_n (рис. 1). Данные колебания в форме метода перемещений будут описываться системой n дифференциальных уравнений [16; 17]:

$$m_k \ddot{y}_k(t) + 2\varepsilon m_k \dot{y}_k(t) + \sum_{j=1}^n k_{k,j} y_j(t) = 0; \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n);$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

Где $\ddot{y}_k(t), \dot{y}_k(t), y_j(t)$ – функции ускорений, скоростей и перемещений в уровнях масс k и j соответственно; ε – коэффициент демпфирования (затухания); $k_{k,j}$ – реакция в связи номер k при смещении связи j на единицу.

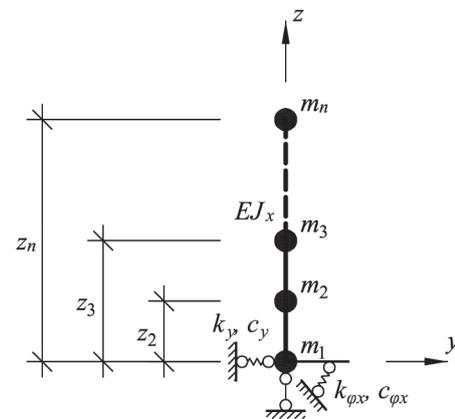


Рис. 1. Расчетная схема многомассового консольного стержня с учетом податливости основания
 [Figure 1. Design model of a multi-mass cantilever bar with due account for foundation bed ductility]

Поделив левую и правую части уравнения на m_k , получим

$$\ddot{y}_k(t) + 2\varepsilon\dot{y}_k(t) + \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^n k_{k,j} y_j(t) = 0. \quad (2)$$

Решением (2) будет система уравнений вида

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n y_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^n X_{k,i} \Phi_i(t), \quad (3)$$

где $X_{k,i}$ – величина, не зависящая от времени t , определяющаяся местоположением k и номером члена i суммы ($i=1, 2, \dots, n$).

Функция $\Phi_i(t)$ зависит от времени t . Соответственно

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_k(t) &= \sum_{i=1}^n \dot{y}_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^n X_{k,i} \dot{\Phi}_i(t); \\ \ddot{y}_k(t) &= \sum_{i=1}^n \ddot{y}_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^n X_{k,i} \ddot{\Phi}_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

С учетом (3) и (3*) система уравнений (2) примет вид

$$\sum_{i=1}^n X_{k,i} \ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n X_{k,i} \dot{\Phi}_i(t) + \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^n \left(k_{k,j} \sum_{i=1}^n X_{j,i} \Phi_i(t) \right) = 0. \quad (4)$$

Введем обозначение

$$-\varphi_i^2 = \frac{\ddot{\Phi}_i(t)}{\Phi_i(t)}, \quad (5)$$

тогда система уравнений (4) после некоторых преобразований будет выглядеть

$$\ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon\dot{\Phi}_i(t) + \varphi_i^2\Phi_i(t) = 0. \quad (6)$$

Если принять, что $2\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,i} \varphi_{\varepsilon,i}$, то данное уравнение будет аналогично уравнению модели упруго-вязкого сопротивления А.И. Цейтлина [18], учитывающей различную степень демпфирования при различных формах собственных колебаний:

$$\ddot{\Phi}_i(t) + \gamma_{\varepsilon,i} \varphi_{\varepsilon,i} \dot{\Phi}_i(t) + \varphi_{\varepsilon,i}^2 \Phi_i(t) = 0, \quad (7)$$

где $\gamma_{\varepsilon,i}$ – коэффициент потерь или неупругого сопротивления при i -й форме колебаний; $\varphi_{\varepsilon,i}$ – угловая частота i -й формы колебаний с учетом демпфирования.

$$\gamma_{\varepsilon,i} = \frac{\delta_{\varepsilon,i}}{\pi} = \frac{\varepsilon T_{\varepsilon,i}}{\pi}; \quad T_{\varepsilon,i} = \frac{2\pi}{\varphi_{\varepsilon,i}}; \quad \varphi_{\varepsilon,i} = \varphi_i \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varphi_i} \right)^2}. \quad (8)$$

Величина $\delta_{\varepsilon,i}$ является логарифмическим декрементом i -й формы колебаний. Из формул (8) следует, что коэффициент демпфирования постоянен ($\varepsilon = \text{const}$), а логарифмический декремент колебаний $\delta_{\varepsilon,i}$ зависит от частоты $\varphi_{\varepsilon,i}$ (согласно гипотезе Фойгта). Однако эксперименты показывают, что такой зависимости нет [16] и в качестве константы правильной принять величину δ_{ε} . Тогда $T_{\varepsilon,i} \approx T_i$ и из (8) следует:

$$\gamma_{\varepsilon} = \frac{\delta_{\varepsilon}}{\pi} = \text{const}; \quad \varepsilon_i = \frac{\delta_{\varepsilon}}{T_{\varepsilon,i}} \approx \frac{\delta_{\varepsilon}}{T_i}; \quad \varphi_{\varepsilon,i} = \varphi_i \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_i}{\varphi_i} \right)^2}. \quad (9)$$

С учетом (9) уравнения (7) примут вид

$$\ddot{\Phi}_i(t) + \gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i} \dot{\Phi}_i(t) + \varphi_{\varepsilon,i}^2 \Phi_i(t) = 0. \quad (10)$$

Решением системы дифференциальных уравнений (10) будут функции

$$\Phi_i(t) = A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}). \quad (11)$$

Соответственно

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_i(t) &= A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i} \cos(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}); \\ \ddot{\Phi}_i(t) &= -A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i}^2 \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}). \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

Запишем выражения для полных перемещений $y_k(t)$, скоростей $v_k(t)$ и ускорений $a_k(t)$ масс в уровне k с учетом демпфирования:

$$\left. \begin{aligned} y_k(t) &= \sum_{i=1}^n X_{k,i} A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}); \\ v_k(t) &= \sum_{i=1}^n X_{k,i} A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i} \cos(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}); \\ a_k(t) &= -\sum_{i=1}^n X_{k,i} A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i}^2 \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Постоянные $A_{\varepsilon,i}$ и $v_{\varepsilon,i}$ определяются из граничных условий при $t=0$ (начальных перемещений $y_k(0)$ и скоростей $v_k(0)$ в уровне k -й массы):

оси x ; z_k – ордината рассматриваемой точки k (за $z = 0$ принят уровень фундамента); z_j – ордината точки приложения единичной силы j .

Есть множество теорий по определению коэффициентов квазистатической жесткости грунта основания [9; 19]. Так, согласно [10] данные коэффициенты для сооружений с фундаментом прямоугольной формы в плане определяются по формулам

$$k_y = \frac{31,1(1-\mu)G_d\sqrt{L_xL_y}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)}; k_{\text{фк}} = \frac{8,52G_d}{\sqrt{\pi}(1-\mu)} \frac{J_{A,x}}{\sqrt{A}}, \quad (21)$$

где μ – коэффициент Пуассона грунта основания; G_d – динамический модуль сдвига грунта основания; L_x и L_y – размеры фундаментной плиты по осям x и y соответственно; $J_{A,x}$ – момент инерции подошвы фундаментной плиты относительно оси x ; A – площадь подошвы фундаментной плиты.

Между модулями сдвига G_d и деформаций E_d грунта основания имеется взаимосвязь:

$$G_d = \frac{E_d}{2(1+\mu)}. \quad (22)$$

Из уравнения (17) в матричной форме определяются частоты собственных колебаний без учета демпфирования стойки и основания $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$:

$$\det(\varphi_i^2 \mathbf{DM} - \mathbf{E}) = 0, \quad (23)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица.

Далее из уравнений (16) определяются амплитудные коэффициенты $X_{k,i}$ для i -й формы колебаний:

$$(\varphi_i^2 \mathbf{DM} - \mathbf{E}) \vec{X}_i = 0, \quad (24)$$

где \vec{X}_i – вектор амплитудных коэффициентов для i -й формы ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$\vec{X}_i = \begin{pmatrix} X_{1,i} \\ X_{2,i} \\ \vdots \\ X_{n,i} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, результатом последовательного решения (23) и (24) будет получение вектора частот собственных колебаний $\vec{\Phi}$ и матрицы амплитудных коэффициентов \mathbf{X} :

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & X_{n,2} & \dots & X_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Далее при известных частотах собственных колебаний предварительно определяем коэффициенты затухания ε_i с учетом демпфирования стойки и грунта основания:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{1}{\varepsilon_{II}} + \frac{1}{\varepsilon_{III}}}, \quad (26)$$

где $\varepsilon_{1,i}$ – коэффициент затухания, обусловленный демпфированием самой стойки и определяемый по формуле (9) в зависимости от i -й частоты собственных колебаний; ε_{II} и ε_{III} – коэффициенты затухания, обусловленные демпфированием грунта при смещении и повороте фундамента соответственно.

$$\varepsilon_{1,i} = \frac{\delta_\varepsilon \varphi_i}{2\pi}; \varepsilon_{II} = \sum_{k=1}^n \frac{c_y}{2m_k}; \varepsilon_{III} = \sum_{k=1}^n \frac{c_{\text{фк}}}{m_k z_k^2}, \quad (27)$$

где c_y – мгновенная жесткость основания при горизонтальном поступательном движении по оси y ; $c_{\text{фк}}$ – мгновенная жесткость основания при повороте относительно горизонтальной оси x .

Согласно [10] коэффициенты мгновенной жесткости основания для прямоугольного в плане фундамента определяются по формулам

$$c_y = \frac{18,24(1-\mu)G_d A}{\pi(7-8\mu)} \sqrt{\frac{\rho}{G_d}}; c_{\text{фк}} = \frac{2,86G_d J_{A,x}}{\pi(1-\mu)} \sqrt{\frac{\rho}{G_d}}, \quad (28)$$

где ρ – плотность грунта основания.

В матричной форме формулы (27):

$$\vec{\varepsilon}_I = \frac{\delta_\varepsilon}{2\pi} \vec{\Phi}; \vec{\varepsilon}_{II} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{c_y}{2} \vec{\mathbf{M}}_k^{-1} \right] \vec{\mathbf{E}}; \vec{\varepsilon}_{III} = \sum_{k=1}^n \left[c_{\text{фк}} \mathbf{M}_k^{-1} (\mathbf{z}_k^{-1})^2 \right] \vec{\mathbf{E}}, \quad (29)$$

где $\vec{\mathbf{M}}$ – вектор масс; $\vec{\mathbf{E}}$ – единичный вектор размерности n ; $\vec{\mathbf{z}}$ – вектор ординат масс.

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{z}} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix}.$$

Полученные из (29) векторы подставляем в (26) в матричной форме и получаем вектор коэффициентов затухания с учетом демпфирования стойки и грунта основания:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_I^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^{-1} \right]^{-1}. \quad (30)$$

Далее по формуле (9) уточняем частоты с учетом демпфирования:

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi} \sqrt{1 - (\boldsymbol{\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1})^2}, \quad (31)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – диагональные матрицы, образованные из элементов векторов $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ соответственно.

По формулам (29) и (30) можно уточнить коэффициенты демпфирования, подставляя $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon$ вместо $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$.

Из граничных условий (13) определяем постоянные $A_{\varepsilon,i}$ и $v_{\varepsilon,i}$ для функций $\Phi_i(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \sin \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon &= \bar{\mathbf{y}}_0; \\ \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \cos \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon &= \bar{\mathbf{v}}_0, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где \mathbf{A}_ε и $\bar{\mathbf{v}}_\varepsilon$ – диагональная матрица и вектор из постоянных коэффициентов $A_{\varepsilon,i}$ и $v_{\varepsilon,i}$ соответственно; $\bar{\mathbf{y}}_0$ и $\bar{\mathbf{v}}_0$ – векторы начальных перемещений и скоростей (граничные условия) соответственно; $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ – диагональная матрица, образованная из элементов вектора угловых частот с учетом демпфирования $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon$.

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} A_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\varepsilon,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\varepsilon,n} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} v_{\varepsilon,1} \\ v_{\varepsilon,2} \\ \vdots \\ v_{\varepsilon,n} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{y}}_0 = \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{Bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{v}}_0 = \begin{Bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varphi_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{\varepsilon,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{\varepsilon,n} \end{Bmatrix}.$$

Теперь можно задать выражения для полных перемещений $y_k(t)$, скоростей $v_k(t)$ и ускорений $a_k(t)$ (12) в матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \exp\left(-\frac{\gamma_\varepsilon}{2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon t\right) \sin(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon t + \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon); \\ \bar{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \exp\left(-\frac{\gamma_\varepsilon}{2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon t\right) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \cos(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon t + \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon); \\ \bar{\mathbf{a}}(t) &= -\mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \exp\left(-\frac{\gamma_\varepsilon}{2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon t\right) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^2 \sin(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon t + \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Используя формулы (18)–(31), рассмотрены собственные колебания симметричного в плане условного пятиэтажного здания (рис. 2). Размер здания в плане составляет 6×6 м при шаге осей 2 м, высота этажа – 3 м. Фундамент условного сооружения представляет собой монолитную железобетонную плиту с подошвой 8×8 м и толщиной 60 см. Вертикальные конструкции представлены колоннами сечением 40×40 см, расположенными по углам здания, и ядром жесткости в центре из стен толщиной 20 см, образующими в плане коробчатое сечение размером в осях 2×2 м. Горизонтальные конструкции – плиты перекрытий толщиной 16 см. Материал всех конструкций – бетон класса В30 (модуль деформации E равен 32,5 ГПа). К плитам перекрытий приложена постоянная нагрузка от веса пола.

Условное сооружение приведено к пятиэлементному консольному стержню с шестью массами (рис. 3). Первая масса ($m_1 = 133,12$ т) приложена в уровне фундаментной плиты (в заделке стержня при $z_1 \approx 0$), остальные ($m_2 = m_3 = \dots = m_6 = 52,08$ т) – в уровне плит перекрытий. Задание массы фундаментной плиты в заделке обусловлено необходимостью более точного учета податливости основания при горизонтальных колебаниях. В заделке стержня приложены связи k_z с бесконечной жесткостью, запрещающая перемещения по вертикали, k_y , характеризующая квазистатическую жесткость основания при поступательном движении по оси y (по горизонтали) и $k_{\varphi x}$, характеризующая квазистатическую жесткость основания при повороте относительно оси x . Момент инерции сечения стержня J_x составляет 6,85 м⁴, а изгибная жесткость $EJ_x = 222,49 \times 10^9$ Н·м². Логарифмический декремент колебаний δ_ε принят равным 0,30 – как для железобетонных сооружений.

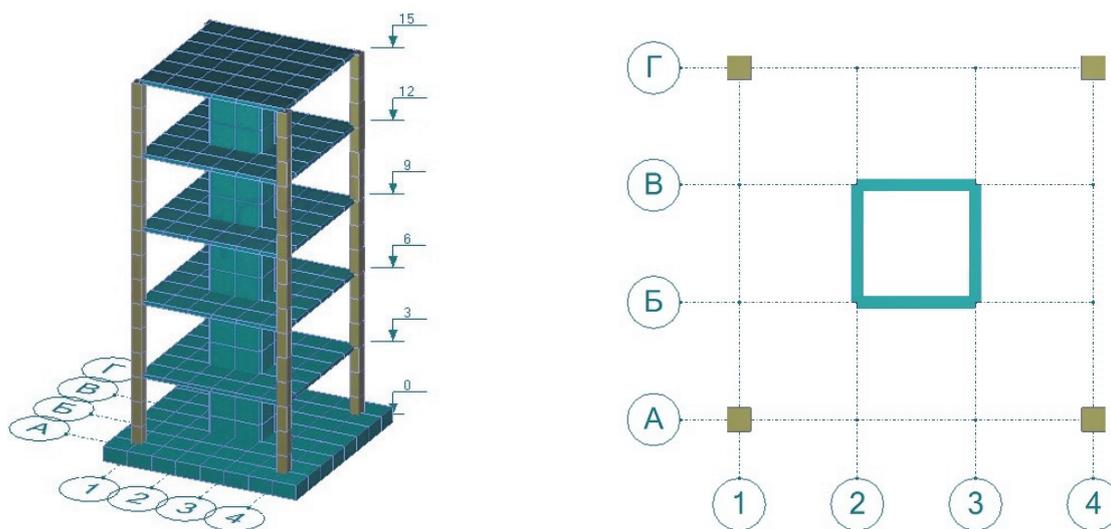


Рис. 2. Общий вид и план условного здания
 [Figure 2. General appearance and the plan of the conventional building]

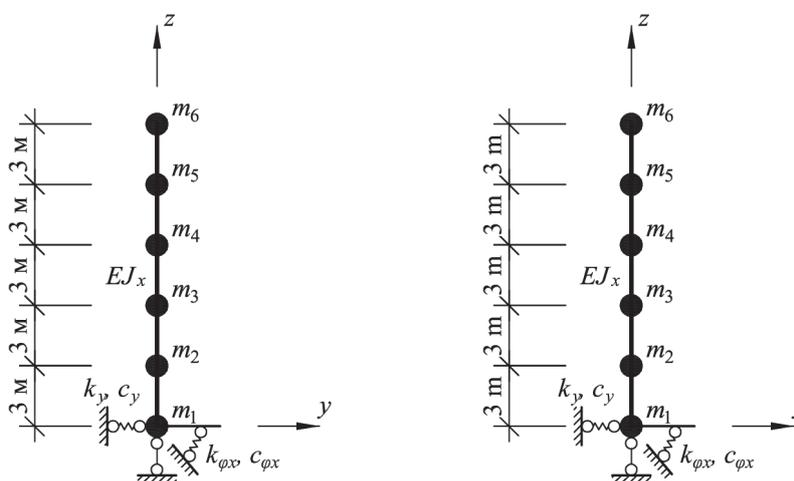


Рис. 3. Расчетная схема условного здания с учетом податливости основания
 [Figure 3. Design model of the conventional building with due account for the ductility of the foundation bed]

Таблица 1

Жесткостные характеристики основания
 [Table 1. Stiffness properties of the foundation bed]

Вариант [Variant]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_d , МПа [MPa]	9,86	12,35	15,47	19,37	24,25	30,37	38,03	47,62	59,63	74,67
G_d , МПа [MPa]	3,65	4,57	5,73	7,17	8,98	11,25	14,09	17,64	22,09	27,66
ρ , т/м ³ [t/m ³]	1,75	1,80	1,86	1,92	1,99	2,07	2,16	2,26	2,38	2,53
k_y , кН/м [kN/m]	79 333	99 367	124 470	155 849	195 114	244 355	305 986	383 147	479 778	600 789
$k_{\phi x}$, кН·м [kN·m]	1 152 267	1 443 255	1 807 867	2 263 632	2 833 923	3 549 123	4 444 292	5 565 006	6 968 528	8 726 145
c_y , кН·с/м [kN·s/m]	4597	5218	5937	6749	7688	8775	10 031	11 481	13 184	15 211
$c_{\phi x}$, кН·с·м [kN·s·m]	38 217	43 378	49 352	56 107	63 912	72 947	83 385	95 444	109 603	126 454

Таблица 2

Частоты собственных колебаний, Гц, по формам (аналитический расчет)
 [Table 2. Natural vibration frequencies, Hz, according to vibration mode shapes (analytical analysis)]

Вариант [Variant]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Форма 1 [Mode shape 1]	0,99	1,11	1,23	1,38	1,53	1,71	1,90	2,11	2,34	2,58
Форма 2 [Mode shape 2]	3,53	3,95	4,41	4,93	5,50	6,14	6,85	7,64	8,51	9,47
Форма 3 [Mode shape 3]	37,07	37,14	37,22	37,33	37,46	37,63	37,83	38,08	38,39	38,77
Форма 4 [Mode shape 4]	110,77	110,82	110,89	110,97	111,08	111,22	111,38	111,59	111,85	112,17
Форма 5 [Mode shape 5]	237,97	238,01	238,07	238,15	238,25	238,37	238,53	238,73	238,98	239,29
Форма 6 [Mode shape 6]	448,20	448,19	448,18	448,18	448,19	448,20	448,22	448,24	448,28	448,34

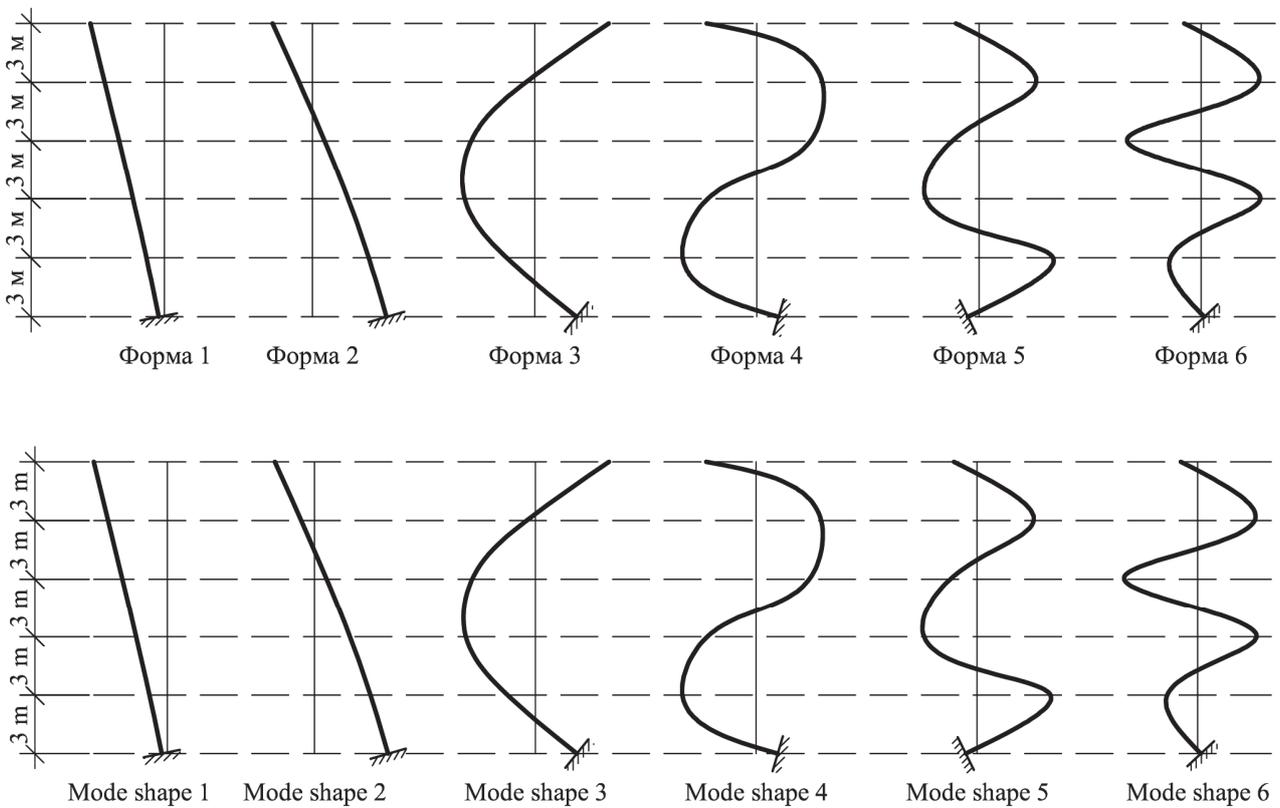


Рис. 4. Формы колебаний условного здания с учетом податливости основания
 [Figure 4. Vibration mode shapes of the conventional building with due account for the foundation bed ductility]

Были рассмотрены собственные колебания шести-массового консольного стержня при десяти вариантах жесткости основания [15]. Характеристики основания представлены в табл. 1 (коэффициент Пуассона грунта μ во всех случаях принят равным 0,35).

По результатам расчета получены формы и частоты собственных колебаний. Для каждого варианта учтено по шесть форм. Частоты свободных колебаний системы для различных вариантов жесткости основания и форм колебаний представ-

лены в табл. 2, а сами формы (идентичные для всех вариантов жесткости основания) – на рис. 4.

Для контроля расчет пятиэлементного шести-массового консольного стержня был произведен методом конечных элементов в программном комплексе «ЛИРА 10.8» (рис. 5). Сооружение задавалось стержнем пользовательского сечения, в узлах прикладывались массы, а опора моделировалась упругой связью с коэффициентами квазистатической жесткости. Для исследования только горизон-

тальных колебаний перемещения по вертикали (вдоль оси z) для всех узлов запрещались. После проведения модального анализа конечно-элементной модели были рассмотрены также по шесть форм соб-

ственных колебаний. Результаты расчета в программном комплексе «ЛИРА 10.8» представлены в табл. 3. Формы колебаний идентичны формам, представленным на рис. 4.

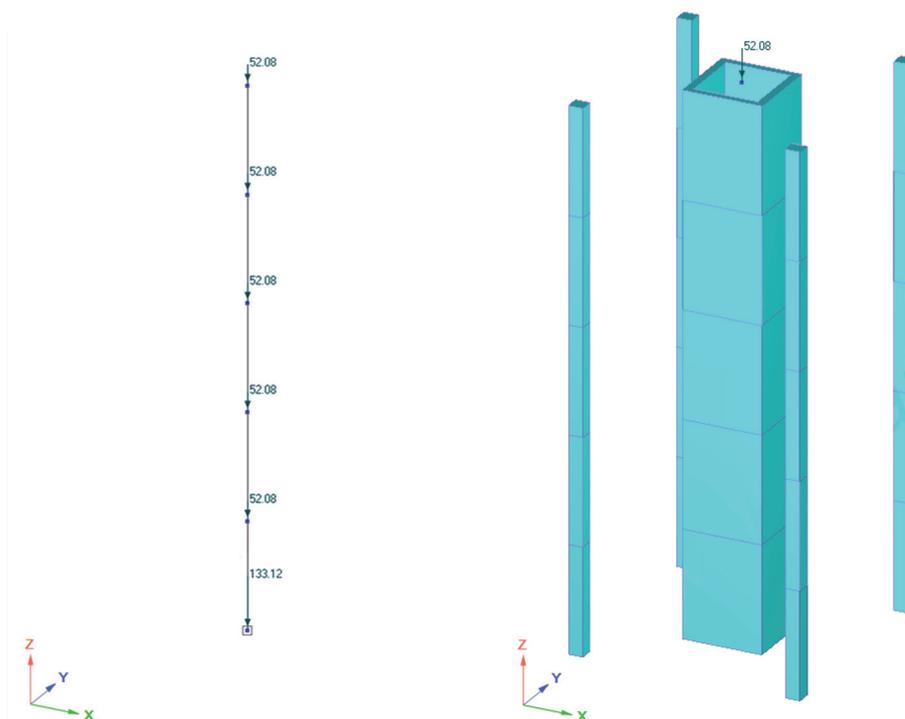


Рис. 5. Расчетная схема условного здания в ПК «ЛИРА 10.8»
[Figure 5. Design model of the conventional building in the software package “LIRA 10.8”]

Таблица 3

Частоты собственных колебаний, Гц, по формам (расчет конечно-элементной модели в ПК «ЛИРА 10.8»)
[Table 3. Natural vibration frequencies, Hz, according to vibration mode shapes
(analysis of finite element model in the software package “LIRA 10.8”)]

Вариант [Variant]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Форма 1 [Mode shape 1]	0,99	1,11	1,24	1,38	1,54	1,71	1,90	2,11	2,34	2,59
Форма 2 [Mode shape 2]	3,54	3,95	4,42	4,93	5,51	6,15	6,86	7,65	8,52	9,48
Форма 3 [Mode shape 3]	37,11	37,18	37,27	37,37	37,51	37,67	37,88	38,13	38,44	38,82
Форма 4 [Mode shape 4]	112,08	112,14	112,21	112,30	112,41	112,55	112,72	112,93	113,20	113,52
Форма 5 [Mode shape 5]	229,09	229,14	229,19	229,26	229,35	229,46	229,60	229,77	229,98	230,24
Форма 6 [Mode shape 6]	366,35	366,37	366,40	366,43	366,47	366,52	366,58	366,66	366,75	366,87

Также были рассмотрены колебания данного консольного стержня на абсолютно жестком основании (рис. 6). В этом случае необходимость учета податливости основания и массы фундамента отсутствуют и система становится пятимассовой ($m_1 = m_2 = \dots = m_5 =$

$= 52,08$ т). Очевидно, в результате расчета будет выявлено лишь пять форм колебаний. Результаты данного расчета аналитически в матричной форме и модального анализа конечно-элементной модели представлены в табл. 4, формы колебаний – на рис. 7.

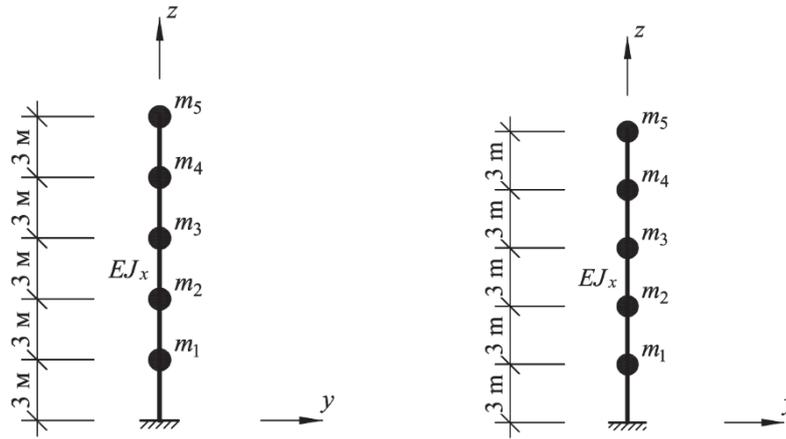


Рис. 6. Расчетная схема условного здания на абсолютно жестком основании
[Figure 6. Design model of the conventional building on absolutely stiff foundation bed]

Таблица 4

Частоты собственных колебаний, Гц, по формам при расчете на абсолютно жестком основании
[Table 4. Natural vibration frequencies, Hz, according to vibration mode shapes in the analysis for absolutely stiff foundation bed]

Метод расчета [Method of analysis]	Форма 1 [Mode shape 1]	Форма 2 [Mode shape 2]	Форма 3 [Mode shape 3]	Форма 4 [Mode shape 4]	Форма 5 [Mode shape 5]
В матричной форме [In the matrix form]	7,41	47,24	132,50	277,03	459,38
Конечно-элементный [Through finite element method]	7,41	47,35	134,15	259,24	386,08

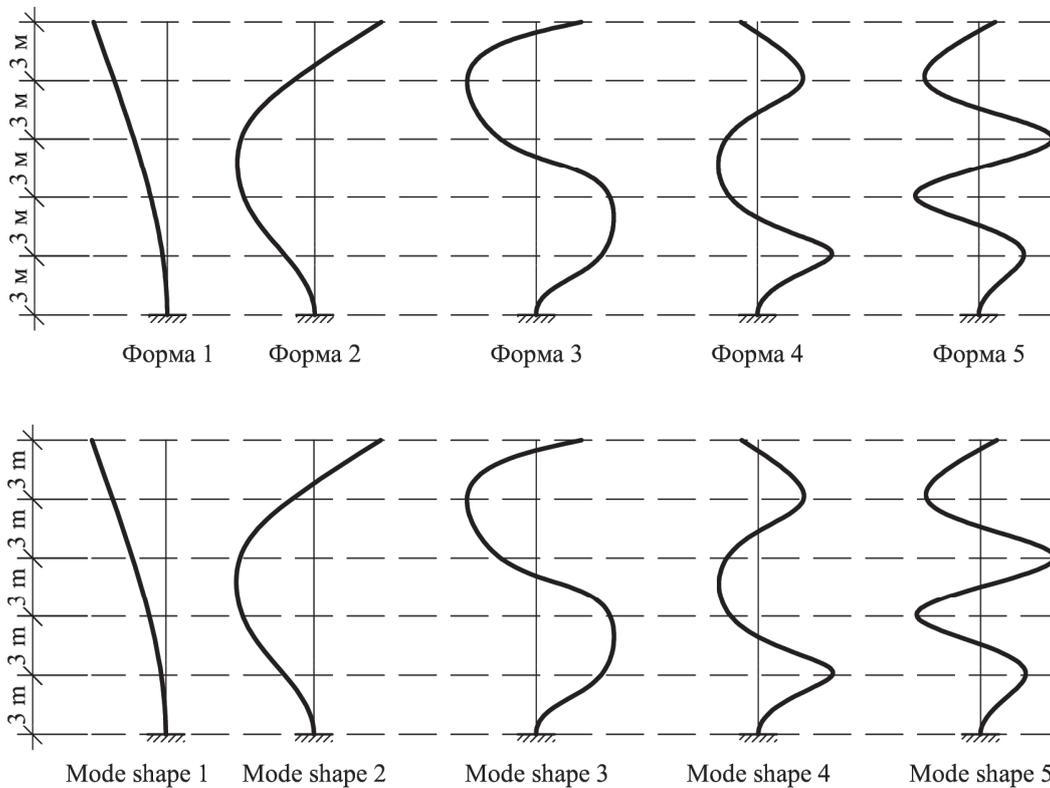


Рис. 7. Формы колебаний условного здания на абсолютно жестком основании
[Figure 7. Vibration mode shapes of the conventional building on absolutely stiff foundation bed]

Заключение

Результаты модального анализа конечно-элементной модели в программном комплексе «LIRA 10.8» достаточно хорошо сходятся с аналитическим расчетом в матричной форме. Расхождения значений частот для первых трех форм колебаний составляют менее 1 %, для формы 4 – 1,2 %, для формы 5 – от 3,7 до 6,4 %, для формы 6 – от 16,0 до 18,3 %.

Идентичны и формы колебаний при податливом и жестком основании с тем отличием, что во втором случае исчезает форма, обусловленная преимущественно смещением и поворотом фундамента (рис. 4, форма 2). Таким образом, форма 2 при жестком основании аналогична форме 3 при податливом, форма 3 – форме 4.

Установлено, что низшие формы более чувствительны к жесткости основания. При увеличении модуля деформации грунта основания в 7,57 раза частота колебаний формы 1 увеличилась в 2,61 раза (с 0,99 до 2,58 Гц), формы 2 – в 2,68 раза, формы 3 – в 1,05 раза. Частоты остальных форм при увеличении жесткости основания изменились незначительно. Теоретически при стремлении жесткости основания к бесконечности частота колебаний формы 1 может увеличиться еще в 2,87 раза (с 2,58 до 7,41 Гц), формы 3 – в 1,22 раза (став формой 2), формы 4 – в 1,18 раза, формы 5 – в 1,16 раза, формы 6 – в 1,02 раза. Ожидается, что частота колебаний формы 2, обусловленной преимущественно перемещениями фундамента, наиболее чувствительна к податливости основания. Тем не менее для рассматриваемого сооружения при заданном интервале модуля деформации грунта перемена мест между формами не выявлена, так как для этого требуется большая степень свободы исследуемой системы для учета не только изгибных, но и крутильных и поступательных форм колебаний [20].

Полученное решение может быть эффективно использовано для вероятностного анализа системы «сооружение – основание» при сейсмических нагрузках.

Список литературы

1. Clough Ray W., Penzien Joseph. Dynamics of structures. 3rd ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2003.
2. Уздин А.М., Сандович Т.А., Аль-Насер-Мохомад Самих Амин. Основы теории сейсмостойкого строительства зданий и сооружений. СПб.: Изд-во ВНИИГ имени Б.Е. Веденеева, 1993.
3. Datta T.K. Seismic analysis of structures. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd., 2010.
4. Newmark N.M., Rosenblueth E. Fundamentals of earthquake engineering. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1971.
5. Мкртычев О.В., Реушков А.А. Сейсмические нагрузки при расчете зданий и сооружений. М.: АСВ, 2017.

6. СП 14.13330.2018. Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция СНиП II-7-81*. М.: Стандартинформ, 2018.

7. Пиеничкина В.А. Надежность зданий как пространственных составных систем при сейсмических воздействиях: монография. Волгоград: ВолгГАСУ, 2010.

8. Дроздов В.В., Пиеничкина В.А., Евтушенко С.И. Инженерная методика оценки сейсмической надежности зданий по предельно допустимому риску // Вестник ВолгГАСУ. 2013. № 2 (27). С. 10.

9. Саргсян А.Е. Оценка интенсивности сейсмического воздействия на сооружение с учетом податливости его основания // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. № 4. С. 55–59.

10. Саргсян А.Е., Гукова Е.Г., Шапошников Н.Н. Динамическая механическая модель основания сооружения с учетом инерционных свойств грунтов // Вестник МГСУ. 2012. № 2. С. 66–69.

11. Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I., Sukhina K.N., Alkneume M.H. Converging of analytical solution of pile under horizontal static load with analysis through finite element method // Advances in engineering research: conference proceedings. Vol. 157. Amsterdam: Atlantis Press, 2018. Pp. 520–523.

12. Pshenichkina V.A., Shchitov D.V., Sidyakin P.A. Problems of forecasting the resource of buildings of the historical construction of the resort region of the Caucasian Mineral Waters // IOP conference series: materials science and engineering. Vol. 463. Part 2. Issue 3. London: Institute of Physics Publishing, 2018. 032027.

13. Волгин Г.А., Рожков А.Ф., Инжутов И.С., Гончаров Ю.М. Численно-экспериментальное исследование динамических параметров крупнопанельного здания // Вестник ТГАСУ. 2016. № 3. С. 111–120.

14. Галиуллин Р.Р., Изотов В.С., Нуриева Д.М. Численные исследования динамических характеристик зданий с железобетонным каркасом // Известия КазГАСУ. 2011. № 2 (16). С. 81–85.

15. Пиеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И. Сравнительный анализ влияния жесткости основания на динамические характеристики зданий // Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении: материалы международной научно-технической конференции (Новочеркасск, 29–31 мая 2018 г.) / Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова. Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2018. С. 733–744.

16. Поляков С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий: учебное пособие для вузов. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1983.

17. Киселев В.А. Строительная механика: специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов. 3-е изд., испр. и доп. М.: Стройиздат, 1980.

18. Цейтлин А.И., Гусева Н.И. Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия. М.: Стройиздат, 1979.

19. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука, 1998.

20. Строк С.И., Пиеничкина В.А., Дроздов В.В. Анализ влияния жесткости грунтового основания на частоты и формы колебаний сооружений // Строительство и архитектура. 2018. № 2. С. 13–21.

Influence of the foundation bed stiffness on the dynamic properties of the building as of a multi-mass cantilever bar

Valeriya A. Pshenichkina, Vyacheslav V. Drozdov*, Sergey I. Strok

Volgograd State Technical University, 28 Lenina Ave, Volgograd, 400005, Russian Federation

*drozdov_jm@mail.ru

Article history:

Received: April 14, 2020

Revised: June 30, 2020

Accepted: July 12, 2020

Abstract

Relevance. The study of the interaction of buildings and structures with the base during an earthquake is one of the most important tasks of the theory of earthquake resistance. The response of the structure to seismic impact depends to a large extent on the ratio of the stiffness characteristics of the soil, foundation, and foundation structure. Moreover, taking into account a rather high degree of statistical variability of the characteristics of the soil foundation, it is possible to ensure the required level of safety of a structure only through the use of probabilistic models and a quantitative assessment of the reliability of the construction-base system as a whole. At present, for the calculation of the “construction – base” system for seismic loads, deterministic discrete models of the finite element method are mainly used. But these models are poorly adapted for probabilistic calculations and require extensive statistical data, which are currently insufficient. Therefore, in problems of reliability assessment, it is advisable to use simplified analytical models, which make it possible to derive the value of the statistical variability of its reaction with relatively small initial information about the system. **The aim of the work** – based on the well-known solution for the single-mass model to present an analytical solution in the matrix form of the problem of free horizontal vibrations of a multi-mass cantilever rod on the foundation specified by the elastic half-space model. **Methods.** A study was made of the effect of the compliance of the soil foundation on the frequencies and forms of horizontal vibrations of the structure. A comparison of the results with the calculation performed by the finite element method is given. **Results.** The obtained solution is intended to conduct a probabilistic calculation of the construction-base system under seismic loads and evaluate its reliability.

Keywords: “structure – foundation bed” system, foundation bed stiffness, dynamic properties, horizontal vibrations, vibration frequencies, vibration mode shapes, multi-mass cantilever bar

For citation

Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I. Influence of the foundation bed stiffness on the dynamic properties of the building as of a multi-mass cantilever bar. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):298–310. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-298-310> (In Russ.)

References

1. Clough Ray W., Penzien Joseph. *Dynamics of structures*. 3rd ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc.; 2003.
2. Uzdin A.M., Sandovich T.A., Al'-Naser-Mohomad Samih Amin. *Osnovy teorii seismostojkogo stroitel'stva zdaniy i sooruzhenij* [Fundamentals of the theory of earthquake-resistant construction of buildings and structures]. Saint Petersburg: VNIIG imeni B.E. Vedeneva Publ.; 1993. (In Russ.)
3. Datta T.K. *Seismic analysis of structures*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd.; 2010.
4. Newmark N.M., Rosenblueth E. *Fundamentals of earthquake engineering*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.; 1971.
5. Mkrtychev O.V., Reshetov A.A. *Seismicheskie nagruzki pri raschete zdaniy i sooruzhenij* [Seismic loads when calculating buildings and structures]. Moscow: ASV Publ.; 2017. (In Russ.)
6. SP 14.13330.2018. *Stroitel'stvo v seismicheskikh raionakh* [Seismic building design code]. Updated version of SNiP II-7-81*. Moscow: Standartinform Publ.; 2018. (In Russ.)
7. Pshenichkina V.A. *Nadezhnost zdaniy kak prostranstvennyh sostavnyh sistem pri seismicheskikh vozdeystviyah* [Reliability of buildings as spatial composite systems in case of seismic impacts]: monograph. Volgograd: VolgGASU Publ.; 2010. (In Russ.)
8. Drozdov V.V., Pshenichkina V.A., Evtushenko S.I. *Inzhenernaya metodika ocenki seismicheskoy nadezhnosti zdaniy po predel'no dopustimomu risku* [Engineering methodology for assessing the seismic reliability of buildings based on the maximum allowable risk]. *Vestnik VolgGASU*. 2013; 2(27):10. (In Russ.)
9. Sargsjan A.E. *Ocenka intensivnosti seismicheskogo vozdeystviya na sooruzhenie s uchetom podatlivosti ego osnovaniya* [Assessment of the intensity of seismic impact on

Valeriya A. Pshenichkina, Head of Engineering Structures, Foundations and Safety of Constructions Department, Doctor of Technical Sciences, Professor, eLIBRARY SPIN-code: 3399-0668.

Vyacheslav V. Drozdov, Associate Professor of Engineering Structures, Foundations and Safety of Constructions Department, Candidate of Technical Sciences, eLIBRARY SPIN-code: 3403-5982.

Sergey I. Strok, postgraduate student of Engineering Structures, Foundations and Safety of Constructions Department, eLIBRARY SPIN-code: 6209-1218.

the structure, taking into account the pliability of its base]. *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij*. 1986;(4):55–59. (In Russ.)

10. Sargsjan A.E., Gukova E.G., Shaposhnikov N.N. Dinamicheskaja mehanicheskaja model osnovanija sooruzhenija s uchetom inercionnyh svojstv gruntov [Dynamic mechanical model of bases of structures that takes account of inertial properties of soils]. *Vestnik MGSU*. 2012;(2):66–69. (In Russ.)

11. Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I., Sukhina K.N., Alkneume M.H. Converging of analytical solution of pile under horizontal static load with analysis through finite element method. *Advances in engineering research conference proceedings*. 2018;157:520–523.

12. Pshenichkina V.A., Shchitov D.V., Sidyakin P.A. Problems of forecasting the resource of buildings of the historical construction of the resort region of the Caucasian Mineral Waters. *IOP conference series: materials science and engineering*. 2018;463(3):032027.

13. Volgin G.A., Rozhkov A.F., Inzhutov I.S., Goncharov Ju.M. Chislenno-jeksperimental'noe issledovanie dinamicheskikh parametrov krupnopanel'nogo zdanija [Experimental and Numerical Analysis of Dynamic Parameters of Large-Panel Building]. *Vestnik TGASU*. 2016;(3):111–120. (In Russ.)

14. Galiullin R.R., Izotov V.S., Nurieva D.M. Chislennye issledovanija dinamicheskikh harakteristik zdaniy s zhelezobetonnyim karkasom [Numerical researches of dynamic characteristics of buildings with the ferro-concrete skeleton]. *Izvestija KazGASU*. 2011;2(16):81–85. (In Russ.)

15. Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I. Sravnitel'nyj analiz vlijanija zhestkosti osnovanija na dinamicheskie harakteristiki zdaniy [Contrastive analysis of influence of soil bases stiffness on dynamic characteristics of buildings]. *Mehanika gruntov v geotekhnike i fundamentostroenii: materialy mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii (Novocherkassk, May 29–31, 2018)*. Novocherkassk: JuRGPU (NPI) Publ.; 2018. p. 733–744. (In Russ.)

16. Poljakov S.V. *Sejssmostojkie konstrukcii zdaniy* [Earthquake-resistant building structures]: textbook for universities. 2nd ed. Moscow: Vysshaja shkola Publ.; 1983. (In Russ.)

17. Kiselev V.A. *Stroitel'naja mehanika: special'nyj kurs. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij* [Construction mechanics: special course. Dynamics and stability of structures]: textbook for universities. 3rd ed., rev. and exp. Moscow: Strojizdat Publ.; 1980. (In Russ.)

18. Cejtin A.I., Guseva N.I. *Statisticheskie metody rascheta sooruzhenij na gruppovye dinamicheskie vozdeystvija* [Statistical methods of calculating of structures for group dynamic impacts]. Moscow: Strojizdat Publ.; 1979. (In Russ.)

19. Birbraer A.N. *Raschet konstrukcij na sejssmostojkost* [Seismic analysis of structures]. Saint Petersburg: Nauka Publ.; 1998. (In Russ.)

20. Strok S.I., Pshenichkina V.A., Drozdov V.V. Analiz vlijanija zhestkosti gruntovogo osnovanija na chastoty i formy kolebanij sooruzhenij [Analysis of the influence of subgrade stiffness on the frequencies and mode shapes of structures]. *Stroitel'stvo i arhitektura*. 2018;(2):13–21. (In Russ.)