

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225  
УДК 539.376

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Устойчивость геометрически нелинейных пластинчатых систем под действием динамических нагрузок

С.П. Иванов<sup>1,2\*</sup>, А.С. Иванова<sup>1</sup>, О.Г. Иванов<sup>1</sup><sup>1</sup>Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3<sup>2</sup>Марийский государственный университет, Российская Федерация, 424000, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1

\*sp-ivanov@mail.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 28 января 2020 г.

Доработана: 04 марта 2020 г.

Принята к публикации: 24 марта 2020 г.

### Аннотация

**Актуальность.** Односвязные и многосвязные пластинчатые системы часто используют в строительстве, авиастроении, кораблестроении, машиностроении, приборостроении. Вследствие этого исследование устойчивости геометрически нелинейных пространственных пластинчатых систем является актуальной темой как при действии статических, так и динамических нагрузок. Но, несмотря на значительные достижения в этой области, имеется еще много нерешенных проблем. Так, запросы вышеуказанных областей применения тонкостенных пространственных систем требуют дальнейшего исследования статической и динамической устойчивости. **Цель** – разработка метода расчета на устойчивость геометрически нелинейных пластинчатых систем типа призматических оболочек под действием динамических сжимающих нагрузок. **Методы.** Рассматривается пластинчатая система, на которую в продольном направлении действуют динамические сжимающие нагрузки. Учитываются гипотезы Кирхгофа – Лява. Геометрическая нелинейность вводится через соотношения между деформациями и перемещениями. Диаграмма деформирования материала – линейная. Перемещение точек в нормальном направлении к срединной плоскости пластин определяется в виде разложения по Власову. Для решения задачи используются энергетический метод и вариационный метод Власова. Экстремальное значение полной энергии определяется с использованием уравнений Эйлера – Лагранжа. В результате получена система основных нелинейных дифференциальных уравнений для исследования потери устойчивости пластинчатой системы под действием динамических сжимающих нагрузок. **Результаты.** Разработанный метод применяется для расчета на устойчивость геометрически нелинейной призматической оболочки с замкнутым контуром поперечного сечения при центральном сжатии под действием динамической нагрузки. Края оболочки опираются на диафрагмы. Исследуется потеря устойчивости призматической оболочки в продольном направлении по одной и двум полуволнам синусоиды. Численное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений выполняется методом Рунге – Кутты. По результатам расчетов построены графики зависимости относительной величины прогиба от динамического коэффициента. Рассмотрено влияние скорости изменения сжимающего напряжения, начального несовершенства оболочки и других параметров на критерий динамической устойчивости пластинчатой системы.

**Ключевые слова:** динамическая устойчивость, геометрическая нелинейность, пластинчатая система, призматическая оболочка, вариационный метод Власова

### Для цитирования

Иванов С.П., Иванова А.С., Иванов О.Г. Устойчивость геометрически нелинейных пластинчатых систем под действием динамических нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 219–225. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225>

Иванов Сергей Павлович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и прикладной механики ПГТУ; профессор кафедры электромеханики МарГУ; eLIBRARY SPIN-код: 5963-6739.

Иванова Анастасия Сергеевна, старший преподаватель, кафедра сопротивления материалов и прикладной механики; eLIBRARY SPIN-код: 9568-3451.

Иванов Олег Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов и прикладной механики; eLIBRARY SPIN-код: 5052-9077.

© Иванов С.П., Иванова А.С., Иванов О.Г., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Введение

Для расчета на устойчивость пластин и оболочек используются различные аналитические, численно-аналитические и численные методы. К численным методам расчета относится метод конечных элементов (МКЭ), который совершенно непригоден для ручного счета. Вариационный метод В.З. Власова [1; 2] относится ко второму виду методов расчета, где в отличие от МКЭ конечные уравнения можно реализовать в замкнутом виде. Данный метод эффективно применяется для расчета пластин и оболочек на прочность как при статических, так и при динамических воздействиях [1]. Также он применяется и при исследованиях на устойчивость [1; 3], доказывающих, что метод В.З. Власова достаточно эффективен для изучения физически и геометрически нелинейных пластинчатых систем.

Тема, связанная с исследованием устойчивости пространственных пластинчатых систем, является одной из важнейших проблем механики деформируемого твердого тела. При движении таких систем в жидкости или воздушной среде (например, при воздействии ветровой нагрузки) может возникать динамическая потеря устойчивости [5; 6]. В настоящее время в области расчетов на устойчивость тонкостенных конструкций имеется достаточно большое число публикаций [6–15]. Анализируя указанные статьи, можно сделать общие выводы. Такого вида работы были выполнены ранее А.С. Вольмиром [5; 6] и П.А. Лукашем [13] только без применения метода МКЭ. Данная работа отличается от статей [14; 15] тем, что здесь не определяется верхняя и нижняя критические силы и не решается статическая задача. Критическое значение динамической силы определяется из условия бурного выпучивания. Вычисляется отношение динамической нагрузки к статической критической нагрузке.

### 1. Разработка математической модели

В отличие от работ [3; 4] настоящая статья посвящена исследованию устойчивости пластинчатых систем (типа призматических оболочек) под действием динамической нагрузки  $P(t)$  с учетом геометрической нелинейности (рис. 1).

Через  $u = u(x, s, t)$ ;  $v = v(x, s, t)$ ;  $w = w(x, s, t)$  ( $t$  – время) обозначим перемещения точки  $M$  срединной поверхности оболочки в направлении координатных осей  $x, s, z$  (рис. 1). Геометрическую нелинейность вводим через известные соотношения [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= e_x^0 + e_x^1 - z\chi_x; \varepsilon_s = e_s^0 + e_s^1 - z\chi_s; \\ \varepsilon_{xs} &= e_{xs}^0 + e_{xs}^1 - 2z\chi_{xs}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} e_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}; e_s^0 = \frac{\partial v}{\partial s}; e_{xs}^0 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}; e_x^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; e_s^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2; \\ e_{xs}^1 &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial s}; \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_s = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \chi_{xs} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}. \end{aligned}$$

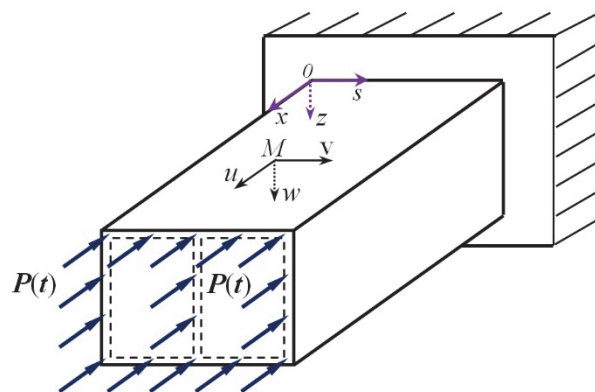


Рис. 1. Общая схема многосвязной пластинчатой системы  
[Figure 1. The general diagram of a multi-connected plate system]

Определим полную энергию  $L$  системы:

$$L = \Pi + K, \quad (2)$$

состоящей из потенциальной  $\Pi$  и кинетической  $K$  энергий:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint \left[ \frac{1}{2} \left( M_x \chi_x + M_s \chi_s + 2M_{xs} + N_x e_x + N_s e_s + 2N_{xs} e_{xs} \right) + P(t) \frac{w_{xx}^2}{2} \right] dx ds; \\ K &= \frac{\rho}{g} \int \frac{1}{2} (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Внутренние усилия (изгибающие моменты  $M_x, M_s$ , действующие соответственно в продольном  $x$  и поперечном  $s$  направлениях, крутящие моменты  $M_{xs}$ , нормальные  $N_x, N_s$  и сдвигающие  $N_{xs}$  силы) определяются по следующим формулам [1]:

$$\begin{aligned} M_x &= -D(w_{xx} + \nu w_{ss}); \\ N_x &= K_1 \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right); \\ M_s &= -D(w_{ss} + \nu w_{xx}); \\ N_s &= K_1 \left( v_s + \frac{1}{2} w_s^2 \right); \\ M_{xs} &= M_{sx} = -D(1-\nu)w_{xs}; \\ N_{xs} &= G\delta(u_s + v_x + w_x w_s), \end{aligned} \quad (4)$$

где в формулах (3) и (4) индексы при перемещениях  $u, v, w$  обозначают частные производные по переменным  $x, s, t$ :

$$e_x = e_x^0 + e_x^1; \quad e_s = e_s^0 + e_s^1; \quad e_{xs} = e_{xs}^0 + e_{xs}^1;$$

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}; \quad K_1 = \frac{E\delta}{1-\nu^2}.$$

Здесь  $E, G$  – модули упругости первого и второго рода;  $\delta$  – толщина пластин оболочки.

Все перемещения запишем в виде ряда [1; 2]:

$$u(x, s, t) = \sum_i U_i(t) \varphi_i(x, s);$$

$$v(x, s, t) = \sum_k V_k(t) \psi_k(x, s);$$

$$w(x, s, t) = \sum_d W_d(t) f_d(x, s);$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; k, d = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $U_i(t), V_k(t), W_d(t)$  – обобщенные перемещения, которые зависят только от времени и определяются из решения задачи;  $\varphi_i(x, s), \psi_k(x, s), f_d(x, s)$  – функции распределения, которые задаются заранее [1; 3].

Число обобщенных перемещений можно сократить, используя условия совместности деформаций в узловых точках контура поперечного сечения оболочки, и при  $d = k$  [1]

$$W_d(t) = V_k(t). \quad (6)$$

С учетом соотношения (6) определим минимум функционала (2) [1]:

$$\frac{\partial L}{\partial U_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial U_{i,t}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial V_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V_{k,t}} = 0. \quad (7)$$

В развернутой форме уравнения (7) принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i (\gamma_1 a_{ji} - b_{ji}) U_i - \sum_k c_{jk} V_k - \frac{\rho}{gG} \sum_i a_{ji} U_{i,t} = \Phi_j; \\ \sum_k \left[ \begin{array}{l} -\gamma_1 e_{hk} + \\ + r_{hk} + \frac{P(t)}{a^* G} e_{hk}^* \\ - \gamma_1 n_{hk} \end{array} \right] V_k + \sum_i c_{hi} U_i - \frac{\rho}{gG} \sum_k d_{hk} V_{k,t} + Q_k = \Phi_h; \\ (i, j = 1, 2, 3, \dots, m; \quad k, h = 1, 2, 3, \dots, n), \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\Phi_j = -\gamma_1 \int_s \sum_k V_k f_{k,x} \sum_k V_k f_{k,xx} \varphi_j \delta ds + \int_s \sum_k V_k f_{k,x} \sum_k V_k f_{k,x} \varphi_{j,s} \delta ds;$$

$$\Phi_h = -\gamma_1 \left[ \int_s \sum_i U_i \varphi_{i,xx} \sum_k V_k f_{k,x} f_h \delta ds + \int_s \sum_i U_i \varphi_{i,x} \sum_k V_k f_{k,xx} f_h \delta ds + \frac{3}{2} \int_s (V_k f_{k,x})^2 \sum_k V_k f_{k,xx} f_h \right] -$$

$$- \int_s \left[ \sum_i U_i \varphi_{i,xs} \sum_k V_k f_{k,x} + \sum_k V_k \psi_{k,xx} \sum_k V_k f_{k,s} + \sum_k V_k f_{k,x} \sum_k V_k f_{k,s} \sum_k V_k f_{k,xx} + \sum_k V_k f_{k,xx} (\sum_k V_k f_{k,s})^2 \right] f_h \delta ds -$$

$$- \int_s (\sum_k V_k f_{k,xx} \sum_k V_k f_{k,s} + \sum_k V_k f_{k,x} \sum_k V_k f_{k,xx}) \psi_h \delta ds. \quad (10)$$

где  $\gamma_1 = \gamma / (1 - \nu^2)$ ,  $\gamma = E / G$  – отношение модуля упругости  $E$  к модулю сдвига  $G$ ,  $G = E / [2(1 + \nu)]$ ; величина  $a^*$  – длина контура поперечного сечения оболочки, на который действует динамическая нагрузка  $P(t)$ ; нагрузка  $Q_k$  позволяет учитывать начальное несовершенство оболочки.

В системе уравнений (8) в функциях  $U_{i,t}, V_{k,t}, U_{i,tt}, V_{k,tt}$  индексы после запятой указывают на дифференцирование по времени  $t$ .

Коэффициенты уравнений (8) имеют вид [1; 3]:

$$a_{ji} = \iint_{x,s} \varphi_{j,x} \varphi_{i,x} \delta ds dx;$$

$$b_{ji} = \iint_{x,s} \varphi_{j,s} \varphi_{i,s} \delta ds dx;$$

$$c_{jk} = \iint_{x,s} \varphi_{j,s} \psi_{k,x} \delta ds dx;$$

$$c_{hi} = \iint_{x,s} \psi_{h,x} \varphi_{i,s} \delta ds dx;$$

$$e_{hk} = \iint_{x,s} J f_{h,xx} f_{k,xx} ds dx;$$

$$r_{hk} = \iint_{x,s} \psi_{h,x} \psi_{k,x} \delta ds dx;$$

$$d_{hk} = \iint_{x,s} (J f_{h,xx} f_{k,xx} + \psi_k \psi_h \delta) ds dx;$$

$$e_{hk}^* = \iint_{x,s} f_{h,xx} f_{k,xx} ds dx;$$

$$n_{hk} = \iint_{x,s} f_{h,ss} f_{k,ss} ds dx;$$

$$J = \frac{\delta^3}{12}. \quad (9)$$

В выражениях (9)  $\varphi_{i,x} = \partial \varphi_i / \partial x$ ,  $\varphi_{j,y} = \partial \varphi_j / \partial y$ ,  $f_{h,xx} = \partial^2 f_h / \partial x^2, \dots$

Правые части  $\Phi_j$  и  $\Phi_h$  уравнений (8) имеют следующий вид:

Получена общая система  $(m + n)$  дифференциальных уравнений (8). Данные уравнения пригодны для исследования устойчивости призматических оболочек под действием динамических нагрузок  $P(t)$ , которые могут изменяться по различным законам [6]. А.С. Вольмир в работе [6] отмечает: «Говоря о непрерывном увеличении нагрузки, мы имеем при этом в виду, что важный для нас процесс прощелкивания оболочки происходит на восходящем участке диаграммы нагружения; дальнейшим поведением конструкции мы не интересуемся». Решающее влияние на бурное выпучивание оболочки оказывает скорость возрастания нагрузки. Далее это будет продемонстрировано на примере расчета призматической системы.

## 2. Алгоритм решения задачи

Уравнения (8) для решения конкретной задачи можно реализовать двумя способами.

*Первый способ* заключается в непосредственном интегрировании по времени нелинейных дифференциальных уравнений при заданной нагрузке  $P(t)$ , изменяющейся во времени. При достижении критического значения времени  $t$  колебательный процесс нарушается, происходит резкое увеличение амплитуды колебаний, что соответствует бурному выпучиванию оболочки. Далее определяется соответствующее значение динамической нагрузки по формуле, которая задана для  $P(t)$ .

*Второй способ* заключается в использовании новой переменной  $t^*$  [6], которая связана с временной сжимающей нагрузкой  $P(t)$  и Эйлеровой критической нагрузкой  $P_{кр}$  следующей зависимостью  $t^* = P(t)/P_{кр}$ . А.С. Вольмир [6] отмечает: «Под величиной  $K_d$  понимается отношение динамической “критической” нагрузки к верхней статической критической нагрузке, вычисленной для идеальной оболочки или пластинки с теми же параметрами». Далее по преобразованным уравнениям строятся графики зависимости прогиба от  $t^*$ .

Для численного интегрирования дифференциальных уравнений используем метод Рунге – Куты по программе, составленной на языке Фортран.

## 3. Пример расчета

Применим второй способ решения по полученным уравнениям (8) для исследования динамической устойчивости односвязной призматической оболочки при центральном сжатии (рис. 2) [1]. Оболочка опирается торцами на диафрагмы, которые считаются абсолютно жесткими в своей плоскости и абсолютно гибкими из плоскости.

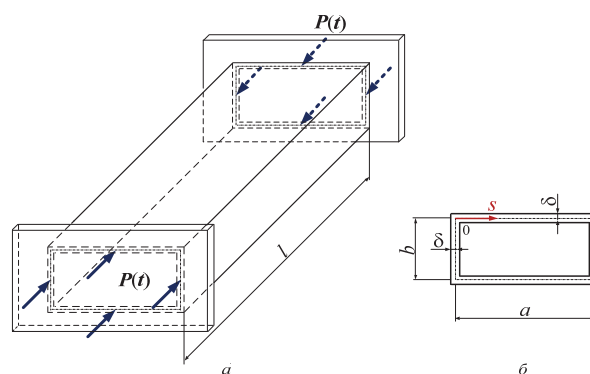
Приняты следующие геометрические параметры замкнутой призматической оболочки:  $a = 2,4$  м;

$b = 1,6$  м;  $\delta = 0,1$  м;  $l = 31,4$  м. Коэффициент Пуассона материала оболочки  $\nu = 0,2$ ; объемный вес материала  $\rho = 20$  кН/м<sup>3</sup>.

Положим, что динамическая нагрузка изменяется по линейному закону:

$$P(t) = k \cdot t \cdot a^* \cdot \delta, \quad (11)$$

где  $k$  – величина, которая характеризует скорость изменения сжимающего напряжения;  $a^*$  – периметр контура поперечного сечения.



**Рис. 2.** Односвязная призматическая оболочка:  
а – схема оболочки под действием динамической нагрузки;  
б – поперечное сечение оболочки

**[Figure 2.** The single-connected prismatic shell:  
а – the diagram of shell under the action of dynamic load;  
б – the cross section of shell]

Для данной замкнутой оболочки при потере устойчивости от центрального сжатия по крутильной форме перемещения можно представить в виде [1]

$$\begin{aligned} u(x, s, t) &= U_1(t) \varphi_1(x, s); \\ v(x, s, t) &= V_1(t) \psi_1(x, s) + V_2(t) \psi_2(x, s); \\ w(x, s, t) &= W_1(t) f_1(x, s) + W_2(t) f_2(x, s), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $U_1(t)$ ,  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$ ,  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$  – обобщенные перемещения в направлении осей  $x$ ,  $s$ ,  $z$ ;  $\varphi_1(x, s)$ ,  $\psi_1(x, s)$ ,  $\psi_2(x, s)$ ,  $f_1(x, s)$ ,  $f_2(x, s)$  – координатные функции, которые задаются при крутильной форме потери устойчивости в поперечном направлении (рис. 2, а, б).

Для данной оболочки в случае потери устойчивости по синусоиде в направлении оси  $x$  координатные функции можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, s) &= \varphi_1(s) \cos \lambda x; & \psi_1(x, s) &= \psi_1(s) \sin \lambda x; \\ \psi_2(x, s) &= \psi_2(s) \sin \lambda x; & f_1(x, s) &= f_1(s) \sin \lambda x; \\ f_2(x, s) &= f_2(s) \sin \lambda x, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\lambda = m_1\pi/l$ ,  $l$  – длина оболочки;  $m_1$  – число полу-волн.

Функции распределения  $\varphi_1(s)$ ,  $\psi_1(s)$ ,  $\psi_2(s)$ ,  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$ , зависящие от переменной  $s$  (рис. 2, б), представлены в работе [1]. Обход замкнутого контура ведется начиная с левого верхнего угла (рис. 2, б). Используя данные функции по формулам (9) с учетом (13) определяем коэффициенты уравнения (8).

Дифференциальные уравнения устойчивости (8) для данной призматической оболочки под действием динамической нагрузки принимают вид

$$\begin{aligned}
 & (\gamma_1 a_{11} - b_{11})U_1 - c_{11}V_1 - c_{12}V_2 + \frac{P}{gG}a_{11}U_{1,t} = \Phi_1; \\
 & \left[ r_{11} + \frac{2\gamma}{1+\nu}m_{11} - \frac{b^2 + a^2}{4}P(t) \right] V_1 + \\
 & + \left[ r_{11} + \frac{2\gamma}{1+\nu}m_{11} - \frac{b^2 + a^2}{4}P(t) \right] V_2 + \\
 & + c_{11}U_1 + \frac{P}{gG}(d_{11}V_{1,t} + d_{12}V_{2,t}) = \Phi_2; \\
 & \left[ r_{21} + \frac{2\gamma}{1+\nu}m_{21} - \frac{b^2 - a^2}{4}P(t) \right] V_1 + \\
 & + \left[ r_{22} + \frac{2\gamma}{1+\nu}m_{22} - \gamma_1 n_{22} - \frac{b^2 + a^2}{4}P(t) \right] V_2 + \\
 & + c_{21}U_1 + \frac{P}{gG}(d_{21}V_{1,t} + d_{22}V_{2,t}) = \Phi_3;
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  учитывают геометрическую нелинейность системы и определяются по формулам (10) при  $i = 1$ ;  $k, h = 1, 2$ .

Уравнения (14) можно решить первым способом, непосредственно интегрируя их по времени.

Конечную реализацию уравнений (14) проводим, используя второй способ, вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 P_{кр} &= 0,00134E; \quad t^* = \frac{P(t)}{P_{кр}}; \quad \zeta_1 = \frac{V_1}{\delta}; \quad \zeta_2 = \frac{V_2}{\delta}; \\
 S^* &= \frac{\delta^2 (a^* s)^2}{P_{кр}^2 \cdot \lambda^2 \cdot g \cdot G},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $P_{кр}$  – величина статической критической нагрузки;  $t^*$  – безразмерный параметр времени;  $\zeta$  – относительная величина прогиба пластин оболочки;  $S^*$  – параметр скорости изменения напряжения (нагрузки) [1].

Пренебрегаем депланицией оболочки, вводим новую переменную  $t^*$ , с учетом (15) после некоторых преобразований уравнения (14) приводим к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & 66,242 \cdot (0,0549 - t^*)\zeta_1 + 25,478 \cdot (0,0607 - t^*)\zeta_2 + \\
 & + S^* (13,65\zeta_{1,t^*} + 4,78\zeta_{2,t^*}) + Q_1 = \Phi_2(\zeta_1, \zeta_2); \\
 & 25,478 \cdot (0,0607 - t^*)\zeta_1 + 66,242 \cdot (0,0549 - t^*)\zeta_2 + \\
 & + S^* (4,78\zeta_{1,t^*} + 13,65\zeta_{2,t^*}) + Q_2 = \Phi_3(\zeta_1, \zeta_2),
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{где } \zeta_{1,t^*} = \frac{d^2 \zeta_1}{dt^{*2}}, \quad \zeta_{2,t^*} = \frac{d^2 \zeta_2}{dt^{*2}}.$$

По результатам численного интегрирования дифференциальных уравнений (16) с помощью метода Рунге – Кутты построены графики зависимости перемещения  $\zeta = v/\delta$  узловой точки поперечного сечения, расположенного в середине пролета, от параметра времени  $t^* = P(t)/P_{кр}$  (рис. 3).

На рис. 3 графики 1, 2, 3 построены соответственно для скоростей  $S^* = 10, 50, 100$  изменения сжимающей нагрузки при потере устойчивости по одной полуволне синусоиды  $m_1 = 1$  и параметру, учитывающему величину начального несовершенства оболочки  $Q_1 = Q_2 = 0,1$ . График 4 соответствует параметру  $S^* = 50$  при  $m_1 = 1, Q_1 = Q_2 = 0,01$ . График 5 построен для  $S^* = 50$  при  $m_1 = 2, Q_1 = Q_2 = 0,1$ .

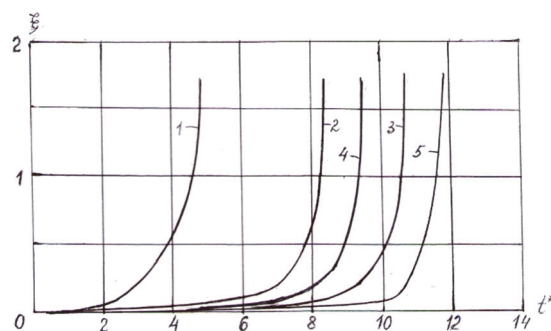


Рис. 3. Графики зависимости перемещения  $\zeta$  от параметра времени  $t^*$   
 [Figure 3. Graphs of the displacement  $\zeta$  against the time parameter  $t^*$ ]

Из анализа графиков следует, что с увеличением скорости действия нагрузки  $S^*$  величина динамического коэффициента  $K_d = t^*$  возрастает значительно (см. графики 1, 2 и 3). При увеличении числа полуволн  $m_1$  величина  $K_d$  также значительно возрастает (видно из сравнения графиков 2 и 5). При уменьшении начального несовершенства значение  $K_d$  увеличивается (см. графики 2 и 4).

Для сравнения выполнен расчет и первым способом. Оба способа дают близкие результаты.

### Заключение

Разработана математическая модель расчета на устойчивость пластинчатых систем при действии динамической нагрузки с учетом геометрической



нелинейности. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений для исследования динамической устойчивости призматических оболочек.

Предложен алгоритм конечной реализации уравнений двумя способами. Предпочтение отдано второму способу, так как его использование сразу выявляет, во сколько раз динамическая нагрузка превышает статическую критическую нагрузку (на основе величины  $t^*$ ).

В качестве примера выполнен расчет на устойчивость оболочки замкнутого контура при действии динамической нагрузки, изменяющейся по линейному закону. Рассмотрено влияние скорости изменения сжимающего напряжения, начального несовершенства оболочки и числа полуволн на критерий динамической устойчивости оболочки.

### Список литературы

1. Иванов С.П., Иванова А.С. Приложение вариационного метода В.З. Власова к решению нелинейных задач пластинчатых систем: монография. Йошкар-Ола: ПГТУ, 2015. 248 с.
2. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат, 1958. 502 с.
3. Иванов С.П., Иванова А.С. Динамическая устойчивость физически нелинейных пластинчатых систем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 4. С. 11–20.
4. Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Динамическая устойчивость физически нелинейных пластинчатых систем при сжатии в двух направлениях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 132–141.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. Хамитов Т.К., Фатыхова Р.Р. Об устойчивости упругопластической цилиндрической оболочки при продольном ударе // Известия КГАСУ. 2016. № 4 (38). С. 490–496.
8. Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В. Устойчивость нелинейно-деформируемых цилиндрических оболочек при действии неравномерных нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 2. С. 3–10.
9. Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В. Динамическая потеря устойчивости нелинейно-деформируемых сетчатых пластин из композиционного материала с различными конфигурациями решетки // Научное обозрение. 2016. № 4. С. 44–51.
10. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads // Composite Structures. 2015. Vol. 127. Pp. 356–368.
11. Nazarimofrad E., Barkhordar A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2016. Vol. 23. No. 10. Pp. 1144–1148.
12. Ruocco E., Reddy J.N. A closed-form solution for buckling analysis of orthotropic Reddy plates and prismatic plate structures // Composites Part B: Engineering. 2019. Vol. 169. Pp. 258–273.
13. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
14. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Определение критической нагрузки потери устойчивости стержневой и плоской моделей круговой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 291–298.
15. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некратами критическими нагрузками // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 54–61.

RESEARCH PAPER

## The stability of geometrically nonlinear plate systems under the action of dynamic loads

Sergey P. Ivanov<sup>1,2\*</sup>, Anastasia S. Ivanova<sup>1</sup>, Oleg G. Ivanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Volga State University of Technology, 3 Lenin Sq, Yoshkar-Ola, 424000, Russian Federation

<sup>2</sup>Mari State University, 1 Lenin Sq, Yoshkar-Ola, 424000, Russian Federation

\*sp-ivanov@mail.ru

### Article history:

Received: January 28, 2020

Revised: March 04, 2020

Accepted: March 24, 2020

### Abstract

**Relevance.** Single-connected and multi-connected plate systems are widely used in construction, aircraft, shipbuilding, mechanical engineering, instrument making. As a result, the study of the stability of geometrically nonlinear plate

**Sergey P. Ivanov**, Doctor of Science, Professor, Head of the Department of Strength of Materials and Applied Mechanics of VSUT; Professor of the Department of Electromechanics of MarSU; eLIBRARY SPIN-code: 5963-6739.

**Anastasia S. Ivanova**, senior lecturer, Department of Strength of Materials and Applied Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 9568-3451.

**Oleg G. Ivanov**, Cand. Sc., Associate Professor, Department of Strength of Materials and Applied Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 5052-9077.

systems is an urgent topic. But, despite significant achievements in this area, there are still many unsolved problems. Thus, the requests of the above-mentioned areas of application of thin-walled spatial systems require further study of the issue of static and dynamic stability. **The aim of the work** – development of a method of the dynamic stability analysis of geometrically nonlinear plate systems such as prismatic shells under the action of dynamic compression loads. **Methods.** A plate system, which is subject to dynamic compression loads in the longitudinal direction, is considered. Kirchhoff – Love hypotheses are taken into account. The material stress-deformation diagram is linear. The displacement of points in the normal direction to the median plane of the plates is determined in the form of the Vlasov expansion. To derive the basic differential equations of stability, the energy method and the variational Vlasov method are used. The extreme value of the total energy is determined using the Euler – Lagrange equation. As a result, a set of basic nonlinear differential equations for studying the buckling of the plate system under the action of dynamic compression loads is obtained. **Results.** The developed method is used to stability analysis of a geometrically nonlinear prismatic shell with a closed contour of the cross section, under central compression under the action of dynamic loading. The edges of the shell rest on the diaphragm. The buckling of the prismatic shell in the longitudinal direction along one and two half-waves of a sinusoid is studied. The numerical integration of nonlinear differential equations is performed by the Runge – Kutta method. Based on the calculation results, graphs of the dependence of the relative deflection on the dynamic coefficient are constructed. The influence of the rate of change of compression stress, the initial imperfection of the system, and other parameters on the criteria for the dynamic stability of the plate system is investigated.

**Keywords:** dynamic stability, geometric nonlinearity, plate system, prismatic shells, variation method of Vlasov

#### For citation

Ivanov S.P., Ivanova A.S., Ivanov O.G. The stability of geometrically nonlinear plate systems under the action of dynamic loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(3):219–225. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225> (In Russ.)

#### References

- Ivanov S.P., Ivanova A.S. *Prilozheniye variacionnogo metoda V.Z. Vlasova k resheniyu nelinejnykh zadach plastinchatykh sistem [Application of V.Z. Vlasov's variational method to solving nonlinear problems of plate systems]*. Yoshkar-Ola: PGTU Publ.; 2015. (In Russ.)
- Vlasov V.Z. *Tonkostennyye prostranstvennyye sistemy [Thin-Walled spatial systems]*. Moscow: Gosstrojizdat Publ.; 1958. (In Russ.)
- Ivanov S.P., Ivanova A.S. The dynamic stability of physically nonlinear plate systems. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(4):11–20. (In Russ.)
- Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. The dynamic stability of physically nonlinear plate systems under biaxial compression. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;(2):132–141. (In Russ.)
- Volmir A.S. *Ustojchivost' deformiruemyyh sistem [Stability of deformable systems]*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)
- Volmir A.S. *Ustojchivost' deformiruemyyh sistem [Non-linear dynamic of plats and shells]*. Moscow: Nauka Publ.; 1972. (In Russ.)
- Khamitov T.K., Fatykhova R.R. On stability of elastic-plastic cylindrical shell under longitudinal impact. *News of the KSUAE*. 2016;(4):490–496. (In Russ.)
- Trushin S.I., Sysoeva E.V., Zhuravleva T.A. The stability of nonlinear deformable cylindrical composite shells under non-uniform loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013;(2):3–10. (In Russ.)
- Trushin S.I., Zhuravleva T.A., Sysoeva E.V. Dynamic buckling of nonlinearly deformable reticulate plates from composite material with different lattice configurations. *Nauchnoe obozrenie [Scientific review]*. 2016;(4):44–51. (In Russ.)
- Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads. *Composite Structures*. 2015;(12):356–368.
- Nazarimofrad E., Barkhordar A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016;23(10):1144–1148.
- Ruocco E., Reddy J.N. A closed-form solution for buckling analysis of orthotropic Reddy plates and prismatic plate structures. *Composites Part B: Engineering*. 2019;(169):258–273.
- Lukash, P.A. *Osnovy nelinejnoj stroitel'noj mekhaniki [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1978. (In Russ.)
- Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu. The definition of the critical buckling load beam model and two-dimensional model of the round and two-dimensional model of the round cylindrical shell that interact with the soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):291–298. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-291-298> (In Russ.)
- Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):54–61. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61> (In Russ.)