

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ  
DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGSDOI 10.22363/1815-5235-2020-16-3-209-218  
УДК 624.154

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Оценка взаимного влияния свай при вертикальных колебаниях фундамента

А.О. Колесников<sup>1\*</sup>, В.Н. Попов<sup>2</sup>, Т.Н. Костюк<sup>1</sup><sup>1</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Российская Федерация, 630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики имени С.А. Христиановича СО РАН, Российская Федерация, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1

\*ao\_kolesnikov@mail.ru

## История статьи:

Поступила в редакцию: 17 февраля 2020 г.

Доработана: 20 мая 2020 г.

Принята к публикации: 22 мая 2020 г.

## Благодарности

Работа выполнена по Программе фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы (проект АААА-А17-117030610136-3).

## Для цитирования

Колесников А.О., Попов В.Н., Костюк Т.Н. Оценка взаимного влияния свай при вертикальных колебаниях фундамента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 209–218. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-209-218>

## Аннотация

**Цель** исследования – изучение изменения динамической жесткости свайного фундамента от расстояния между сваями при вертикальных колебаниях с использованием экспериментальных данных из литературных источников и решения волновых моделей, описывающих вертикальные колебания тонкой пластины с круглыми вырезами. **Методы.** Для проверки достоверности решений волновых моделей, описывающих изменение динамических жесткостей при вертикальных колебаниях свайных фундаментов, используются данные, полученные в экспериментах по определению собственных частот связанных ростверками групп 3×3 висячих свай с различными расстояниями между ними. Также использованы данные, полученные при вынужденных вертикальных колебаниях связанных ростверками групп свай 2×2 при различных нагрузках и расстояниях между сваями. При обработке имеющихся амплитудно-частотных кривых решается обратная задача с использованием теории нелинейных колебаний для определения динамической жесткости. Оценивается соответствие между измеренными и прогнозируемыми данными при описании поведения свайно-грунтовой системы. **Результаты.** Установлено, что соотношения, учитывающие взаимное влияние висячих свай в кусте, полученные в рамках решений волновых моделей и применяемые для расчета динамических жесткостей при вертикальных колебаниях свайных фундаментов, позволяют получать удовлетворительные результаты по точности. Отклонение результатов расчетов от данных экспериментальных исследований не превышает 15 %.

**Ключевые слова:** свайный фундамент, взаимное влияние свай в группе, расстояние между сваями, свайно-грунтовая система, волновая модель

## Введение

Получение высокой точности оценки характеристик колебаний свайных фундаментов, исполь-

зуемых под машины с динамическими нагрузками, всегда актуальная проблема [1–25]. Динамика взаимодействия свайного фундамента с грунтом представляет собой одну из наименее изученных задач, а взаимное влияние свай в группе еще более ее усложняет. В случаях, когда расстояние между сваями велико, групповую жесткость можно оценить простым суммированием жесткостей от одиночных свай. Однако сваи, находящиеся на близком расстоянии друг от друга, имеют значительное взаимное влияние, и в результате их эффективность может сильно меняться. Для оценки динамического взаимодействия свай как между собой, так и с грунтом необ-

Колесников Алексей Олегович, кандидат технических наук, доцент, кафедра инженерной геологии, оснований и фундаментов; eLIBRARY SPIN-код: 1225-7017, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3627-5888>.

Попов Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; eLIBRARY SPIN-код: 9483-9689, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6043-2134>.

Костюк Татьяна Николаевна, магистрант, кафедра инженерной геологии, оснований и фундаментов; eLIBRARY SPIN-код: 5302-2974, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5605-7944>.

© Колесников А.О., Попов В.Н., Костюк Т.Н., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

ходимо создание теорий, описывающих процессы и экспериментальные исследования для проверки их применимости.

Отметим, что работы по определению амплитудно-частотных характеристик свайных фундаментов ведутся продолжительное время, но пока далеки от своего завершения. Точное теоретическое решение проблемы динамического взаимодействия сваи и грунта осложняется нелинейностью процесса, поэтому используются приближенные методы. В частности, можно упомянуть подходы, предложенные в [9–12]. Многие исследования посвящены взаимодействию с грунтом одной сваи при динамической нагрузке, но наряду с этим анализируется поведение и групп свай. Для получения оценок динамического состояния свайных сооружений в сложных условиях эксплуатации широко применяются методы численного моделирования с использованием конечных или граничных элементов [16–19].

В большинстве инженерных задач, взаимодействие сваи и грунта обычно хорошо описывается в рамках теории упругости, и, как показывают многие теоретические и экспериментальные исследования, волновые модели достаточно точно отражают процесс колебаний фундаментов в грунте [1–5; 14; 25]. Анализ реакции упругого полупространства, возбуждаемого периодической вертикальной силой, действующей вдоль вертикальной оси, выполненный Г. Лэмбом в 1904 г. является первым исследованием в этой области [26]. В настоящее время при определении амплитудно-частотных характеристик свайных фундаментов под действием динамических нагрузок успешно используются решения, полученные для задач колебания бесконечной пластины с круглым вырезом [14]. Однако практический интерес представляют обобщения этого результата на случаи, когда вырезом больше одного. Для определения связей между перемещениями и реакциями на боковой поверхности погруженных твердых тел, расположенных либо в ряд, либо в кусте, в [16; 27; 28] предложено решение задачи о вертикальных колебаниях пластины с несколькими круглыми вырезами и получены формулы для определения жесткостных и демпфирующих характеристик системы (см. схему на рис. 1). Но остается открытым вопрос о достоверности и точности полученных результатов.

В связи с этим настоящая работа посвящена исследованию изменений динамических жесткостей при вертикальных колебаниях свайных фундаментов с учетом расстояния между висячими сваями с использованием теоретических оценок, полученных в [27; 28], и их сопоставлению с экспериментальными данными из литературных источников [7–9;

29; 30]. За основу взяты результаты серии экспериментов на полигоне с группами висячих свай  $3 \times 3$ , связанных ростверком, по определению собственных частот фундаментов ( $s/d = m = 2, 3, 5$ ;  $d$  – диаметр сваи,  $s$  – расстояние между центральными осями соседних свай), проведенных и описанных нами в [29; 30]. Наряду с этим использовались результаты экспериментов на принудительную вертикальную вибрацию групп свай  $2 \times 2$ , объединенных ростверком, при  $s/d = 2, 3, 4$ , полученные в полевых условиях при различных нагрузках [8; 9].

### Методика исследований

Оценивалось соответствие между измеренными и прогнозируемыми данными при описании нелинейного поведения свайно-грунтовой системы. Для определения динамической жесткости и затухания решалась обратная задача с использованием теории нелинейных колебаний при обработке имеющихся в [7; 8] амплитудно-частотных кривых.

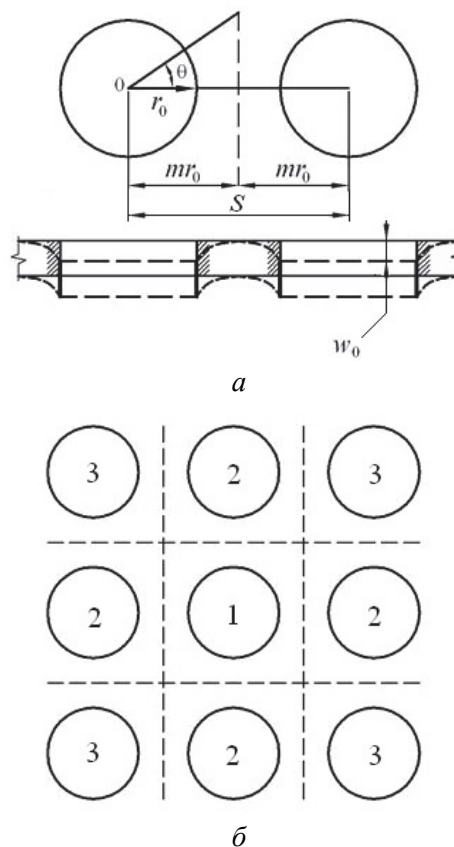


Рис. 1. Схема расположения вырезом в колеблющейся тонкой пластине:  $a$  – двух соседних;  $b$  – по схеме  $3 \times 3$

[Figure 1. The arrangement of cuts in a vibrating thin plate:  $a$  – two neighboring;  $b$  – according to the  $3 \times 3$  scheme]

В работе [14] при рассмотрении депланационных осесимметричных колебаний бесконечно тонко-

го слоя с одним круглым вырезом, имеющим радиус  $r_0$ , описываемых уравнением движения упругой среды при отсутствии объемных сил в цилиндрической системе координат  $(r, t)$  в виде

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

с граничным условием на контуре

$$w(r_0, t) = w_0 e^{i\omega t}$$

определено, что реакция слоя грунта единичной толщины, приложенная к боковой поверхности сваи, описывается как

$$S_{w0}(a_0) w_0 e^{i\omega t} = \mu w_0 e^{i\omega t} (S_{w1,0} + i S_{w2,0}),$$

где действительную  $S_{w1,0}$  и мнимую  $S_{w2,0}$  безразмерные части  $S_{w0}$  можно представить в виде

$$S_{w1,0}(a_0) = 2\pi a_0 \frac{J_0(a_0)J_1(a_0) + Y_0(a_0)Y_1(a_0)}{J_0^2(a_0) + Y_0^2(a_0)},$$

$$S_{w2,0}(a_0) = \frac{4}{J_0^2(a_0) + Y_0^2(a_0)}. \quad (1)$$

Здесь  $J_n, Y_n$  – функции Бесселя первого и второго рода;  $w = w(r, t)$  – перемещение вдоль оси  $z$ ;  $\rho$  – плотность;  $w_0$  – амплитуда колебаний;  $\omega$  – угловая частота колебаний;  $\mu$  – коэффициент Ламе, эквивалентный модулю сдвига  $G$ ,  $a_0 = \omega r_0 / \sqrt{\mu/\rho}$  – безразмерная частота.

В работе [16] рассмотрены депланационные колебания слоя с несколькими круглыми вырезами в ряд, имеющими радиусы  $r_0$ , центры которых расположены на расстоянии  $s = 2r_0 m$  или  $m$  диаметров друг от друга,  $m > 1$  (см. схему на рис. 1, а), а также для внутреннего из вырезом, упорядоченных по схеме, представленной на рис. 1, б, для которого реакция слоя грунта единичной толщины, примыкающего к боковой поверхности сваи, согласно [27] записывается как

$$S_{w1}(a_0, ma_0) w_0 e^{i\omega t} = \mu w_0 e^{i\omega t} (S_{w1,1} + i S_{w2,1}), \quad (2)$$

где  $S_{w1,1}, S_{w2,1}$  – действительные и мнимые безразмерные части  $S_{w1}$  можно представить в виде

$$S_{w1,1}(a_0, ma_0) = S_{w1,0} - \frac{3}{2} S_{w1cor}(a_0, ma_0),$$

$$S_{w2,1}(a_0, ma_0) = S_{w2,0} - \frac{3}{2} S_{w2cor}(a_0, ma_0),$$

$$S_{w1cor}(a_0, ma_0) = \pi a_0 \frac{J_0(a_0)J_1(ma_0) + Y_0(a_0)Y_1(ma_0)}{J_0^2(a_0) + Y_0^2(a_0)} C,$$

$$S_{w2cor}(a_0, ma_0) = \pi a_0 \frac{Y_0(a_0)J_1(ma_0) + J_0(a_0)Y_1(ma_0)}{J_0^2(a_0) + Y_0^2(a_0)} C,$$

$$C = \frac{\sum_{n=1}^2 J_{2n-1}(a_0) [Y_{2n-2}(a_0) - Y_{2n}(a_0)] - \sum_{n=1}^2 -Y_{2n-1}(a_0) [Y_{2n-2}(a_0) - Y_{2n}(a_0)]}{\sum_{n=1}^2 J_{2n-1}(a_0) [Y_{2n-2}(ma_0) - Y_{2n}(ma_0)] - \sum_{n=1}^2 -Y_{2n-1}(a_0) [Y_{2n-2}(ma_0) - Y_{2n}(ma_0)]},$$

здесь в отличие от (1) появились дополнительные члены, учитывающие влияние соседних вырезом.

В работе [28] были получены выражения, описывающие реакцию слоя грунта граничного (не углового) выреза (см. схему на рис. 1, б)

$$S_{w2}(a_0, ma_0) w_0 e^{i\omega t} = \mu w_0 e^{i\omega t} (S_{w1,2} + i S_{w2,2}),$$

$$S_{w1,2}(a_0, ma_0) = S_{w1,0}(a_0) - \frac{5}{4} S_{w1cor}(a_0, ma_0),$$

$$S_{w2,2}(a_0, ma_0) = S_{w2,0}(a_0) - \frac{5}{4} S_{w2cor}(a_0, ma_0)$$

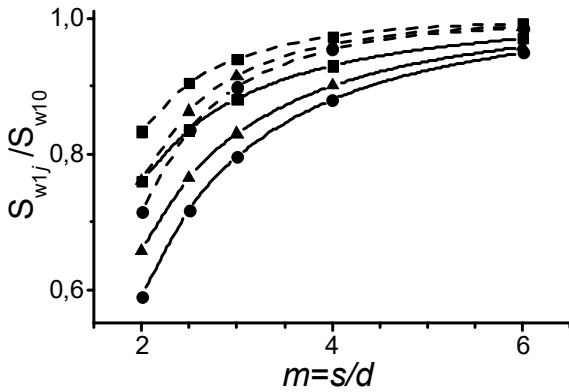
и углового выреза

$$S_{w3}(a_0, ma_0) w_0 e^{i\omega t} = \mu w_0 e^{i\omega t} (S_{w1,3} + i S_{w2,3}),$$

$$S_{w1,3}(a_0, ma_0) = S_{w1,0}(a_0) - \frac{7}{8} S_{w1cor}(a_0, ma_0),$$

$$S_{w2,3}(a_0, ma_0) = S_{w2,0}(a_0) - \frac{7}{8} S_{w2cor}(a_0, ma_0).$$

Таким образом, динамические жесткости  $S_{wj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) описываются комплексными функциями, зависящими от частоты колебаний  $\omega$ , размеров выреза  $r_0$ , а также плотности  $\rho$  и модуля сдвига среды  $\mu$ . Реакции опережают соответствующие перемещения на временные интервалы  $\Delta_j$ , которые определяются из соотношений  $\Delta_j = \arctan(S_{w2,j} / S_{w1,j})$ . Параметры, характеризующие амплитуду перемещений, можно оценить из соотношений  $A_j = (S_{w1,j}^2 + S_{w2,j}^2)^{0,5}$ .



**Рис. 2.** Изменение относительной жесткости при  $a_0 = 0,05$  (штриховые кривые) и  $a_0 = 0,35$  (сплошные кривые) от расстояния между сваями и их положения в кусте  
 • ( $j = 1$ ), ▲ ( $j = 2$ ), ■ ( $j = 3$ )  
**[Figure 2.** Variation of the relative stiffness at  $a_0 = 0,05$  (dashed curves) and  $a_0 = 0,35$  (solid curves) from the distance between the piles and their position in a group  
 • ( $j = 1$ ), ▲ ( $j = 2$ ), ■ ( $j = 3$ )]

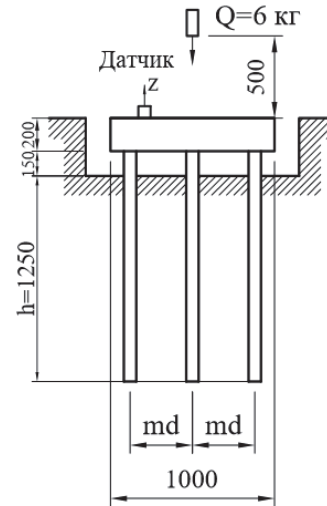
Рис. 2 иллюстрирует изменение относительной динамической жесткости  $S_{w1,j} / S_{w1,0}$ ,  $j = 1, 2, 3$  при  $a_0 = 0,05; 0,35$  в зависимости от расстояния между сваями и их положения в кусте согласно схеме на рис. 1, б. Из представленных результатов следует, что при сокращении расстояния между сваями жесткость может уменьшаться до 40 %.

Для проверки представленных теоретических оценок динамического взаимодействия системы «свая – грунт – свая» использованы результаты серии полевых экспериментов со связанными ростверками группами висячих свай 3×3 (схемы на рис. 3 и 1, б) по определению собственных частот фундаментов, опубликованные в [29; 30]. Все три опытных фундамента были выполнены в виде монолитного железобетонного ростверка с габаритными размерами 1,0×1,0×0,2 м, опирающегося на девять жестко закрепленных свай диаметром  $d = 76$  мм ( $r_0 = d/2$ ) с рабочей длиной 1,4 м, изготовленных из металлических труб с толщиной стенки 3,5 мм. Расстояние между осями свай равнялось  $2d, 3d$  и  $5d$ . Масса  $M$  каждого из фундаментов составляла 690 кг. Ростверк с грунтом не соприкасался. Величина заглубления свай в грунт  $h = 1,25$  м. Импульсное нагружение производилось стальным грузом, имеющим форму параллелепипеда массой 6 кг, который свободно падал на поверхность каждого испытуемого фундамента с высоты 0,5 м.

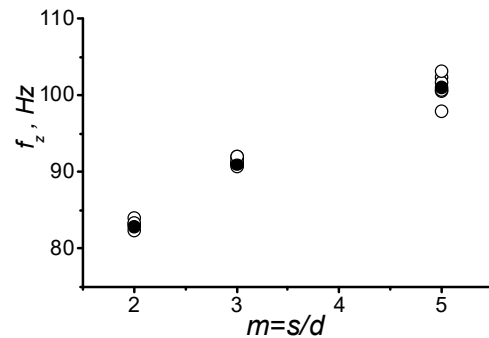
Грунт опытного полигона до глубины 9,3 м состоял из лессовидной маловлажной супеси с плотностью  $\rho = 1,7$  т/м<sup>3</sup> и модулем деформации  $E = 14$  МПа, подстилаемой полутвердыми суглинками. Грунтовые

воды на площадке отсутствовали. Значение скорости поперечных волн для грунта опытного полигона было экспериментально определено как  $V_s = 146$  м/с.

Результаты исследований [29; 30] на опытном полигоне по определению собственных частот фундаментов представлены на рис. 4 и в табл. 1.



**Рис. 3.** Схема экспериментальных исследований опытных фундаментов  
**[Figure 3.** Scheme of testing foundations experimental researches]



**Рис. 4.** Собственные частоты свайных фундаментов 3×3 при различных  $s/d$ :  
 о – эксперимент; • – среднее значение  
**[Figure 4.** Natural frequencies of the pile foundations 3×3 at different  $s/d$ :  
 о – experiment; • – average value]

Таблица 1

**Измеренные частоты**  
**[Table 1. Measured frequencies]**

Расстояние между сваями [Distance between piles]	Измеренная частота $f_z$ , Гц (среднее значение) [Measured frequency $f_z$ , Hz (average value)]
2d	82,90
3d	91,36
5d	101,05

Собственные частоты  $\lambda_z$  при вертикальных колебаниях фундаментов и жесткости  $K_z$  при наличии демпфирования связаны соотношениями

$$\lambda_z = 2\pi f_z \approx \sqrt{K_z/M}, \quad K_z \approx \lambda_z^2 M,$$

где  $M$  – масса всей конструкции.

Жесткости групп свай при различных величинах  $s$  были определены с использованием результатов измерений, представленных в табл. 1, и формулы

$$K_z^g(m) = [2\pi f_z(m)]^2 M. \quad (3)$$

Согласно [2; 27], с использованием соотношения (2) для определения реакции слоя грунта толщиной  $h$ , примыкающего к боковой поверхности свай, получены теоретические оценки жесткости по боковой поверхности групп свай:

$$K_z^g(m) = \mu h S_{w1}^g(a_0, ma_0), \quad (4)$$

откуда следует, что значение коэффициента жесткости свай в кусте  $S_{w1}^g$  связано с безразмерной частотой колебаний  $a_0$  и расположением свай в ростверке. Для рассматриваемых фундаментов из 3×3 свай  $h = 1,25$  м и  $S_{w1}^g$  определяется согласно схеме на рис. 1, б по формуле

$$S_{w1}^g(a_0, ma_0) = S_{w1,1}(a_0, ma_0) + 4S_{w1,2}(a_0, ma_0) + 4S_{w1,3}(a_0, ma_0),$$

где  $a_0 = \omega r_0 / \sqrt{\mu \rho}$ ,  $\omega = 2\pi f_z$ ,  $\mu = V_s^2 \rho$  – модуль сдвига;  $V_s$  – скорость поперечных волн в грунте.

В рассматриваемых случаях безразмерная частота колебаний  $a_0$  изменяется в диапазоне от 0,13 до 0,17. При оценке изменения жесткости системы от расстояния между сваями использовалась  $a_0 = 0,15$ .

Результаты, полученные при проведении инженерных расчетов с использованием формул (3), (4) представлены на рис. 5. Расчетная кривая и точки, соответствующие результатам измерений, иллюстрируют изменение жесткостей относительно значения при  $s/d = 5$ . Величины, полученные с использованием формулы (4), имеют максимальное различие с опытными данными, не превышающее 14 %. Представленный результат подтверждает, что расчеты в рамках используемых приближений позволяют получить удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

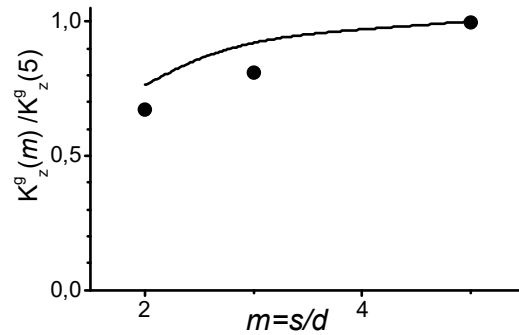


Рис. 5. Изменение жесткости системы от расстояния между сваями: сплошная линия – результаты расчетов; • – эксперимент [Figure 5. Changing in system stiffness depending on distance between piles: solid line – result of calculation; • – experiment]

Таблица 2

Резонансные частоты  $f_{res}$  и амплитуды  $A_{res}$  [Table 2. Resonant frequencies  $f_{res}$  and amplitudes  $A_{res}$ ]

$m_e r_e$ , кг·м [kg·m]	$s/d = 2$		$s/d = 3$		$s/d = 4$	
	$A_{res}$ , мм [mm]	$f_{res}$ , Гц [Hz]	$A_{res}$ , мм [mm]	$f_{res}$ , Гц [Hz]	$A_{res}$ , мм [mm]	$f_{res}$ , Гц [Hz]
0,0187	0,0358	29,61	0,0317	35,45	0,0262	38,21
0,0278	0,0510	29,22	0,0422	34,41	0,0381	36,71
0,0366	0,0633	28,95	0,0589	33,35	0,0501	35,18
0,0450	0,0832	28,46	0,0707	32,73	0,0619	33,50

В качестве дополнительной проверки соотношений для получения теоретических оценок использованы результаты динамических испытаний в полевых условиях по определению резонансных частот и амплитуд фундаментов при различных уровнях вертикального гармонического возбуждения с ростверками для групп висячих свай 2×2 [7–9; 31]. Все опытные фундаменты были выполнены в виде монолитного железобетонного ростверка с габаритными размерами 0,57×0,57×0,25 м, опирающегося на четыре жестко закрепленные бетонные сваи. Диаметр свай  $d = 100$  мм, расстояние между осями свай  $s$  равнялось  $2d$ ,  $3d$  и  $4d$ . Ростверки с грунтом не соприкасались. Величина заглубления свай в грунт  $h = 1,5$  м. Испытания проводились при различных эксцентрических моментах  $m_e r_e = 0,0187$ ; 0,0278; 0,0366 и 0,0450 кг·м, где  $m_e$  – масса эксцентричной вращающейся части в генераторе, а  $r_e$  – эксцентриситеты массы. Методология вибрационных испытаний описана в [8]. Масса каждого из фундаментов  $M_0 = 1200$  кг, включая массу вращающейся части. Для грунта опытного полигона определены значения модуля сдвига  $\mu$  от  $14 \cdot 10^6$  до  $26 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup> и скорости поперечных волн  $V_s$  в диа-

пазоне 95–150 м/с, которые зависят от глубины [9]. Результаты определения резонансных частот  $f_{res}$  и амплитуд  $A_{res}$  представлены в табл. 2.

При экспериментальных исследованиях часто приходится решать обратные задачи теории колебаний [31]. Сначала по измеренным амплитудно-частотным кривым определяются эффективная масса, жесткость и демпфирование свайно-грунтовой системы. Затем, с использованием найденных значений параметров, в рамках теории колебаний вычисляются амплитудно-частотные кривые и результаты сравниваются с результатами испытаний.

Рассмотрим воздействие на фундамент гармонически меняющейся силы с амплитудой, пропорциональной квадрату частоты  $\omega$ :

$$P_z = r_e m_e \omega^2,$$

тогда уравнение движения для рассматриваемой системы можно записать следующим образом:

$$M\ddot{z} + \Phi K_z \dot{z} + K_z z = m_e r_e \omega^2 \sin \omega t.$$

Здесь  $M$  – эффективная масса, которая включает  $M_0$  и массу присоединенного грунта, колеблющегося вместе с фундаментом;  $K_z$  – жесткость;  $\Phi$  – модуль затухания. Решение этого уравнения записывается в виде

$$z = A \sin(\omega t + \delta),$$

$$\text{tg}(\delta) = -\frac{\Phi \omega K_z / M}{K_z / M - \omega^2},$$

где амплитуда  $A$  описывается формулой

$$A = \frac{m_e r_e \omega^2}{M \sqrt{(K_z / M - \omega^2)^2 + (\Phi \omega K_z / M)^2}}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. При режиме колебаний на больших частотах, когда коэффициент динамичности близок к единице, амплитуда колебаний будет равна  $A_\infty = m_e r_e / M$ . До выхода системы в режим колебаний на больших частотах возможно возникновение резонанса с амплитудой

$$A_{res} = \frac{A_\infty}{\Phi \sqrt{(K_z / M)(1 - \Phi^2 K_z / 4M)}} \quad (6)$$

при частоте

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{K_z / M}{1 - \Phi^2 K_z / 2M}}, \quad \Phi^2 K_z / M < 2. \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) позволяют оценить значения  $\Phi$  и  $K_z / M$ , если при проведении измерений на каком-либо объекте были определены величины  $A_{res}$  и  $f_{res}$  ( $\omega_{res} = 2\pi f_{res}$ ):

$$K_z / M = \omega_{res}^2 \sqrt{1 - (A_\infty / A_{res})^2},$$

$$\Phi = \omega_{res}^{-1} \sqrt{\frac{2 - 2\sqrt{1 - (A_\infty / A_{res})^2}}{\sqrt{1 - (A_\infty / A_{res})^2}}}.$$

На рис. 6, а представлены экспериментальные частотные кривые для группы свай при  $s = 4d$  для различных значений  $m_e r_e$  [8].

При известных  $m_e r_e$ , согласно [28], эффективную массу  $M$  можно оценить, используя экспериментальные значения для  $A_\infty - M = m_e r_e / A_\infty$ , а затем уточнить при последующих расчетах. Полученная таким образом величина  $M$  составляет 3200 кг, что намного больше массы конструкции  $M_0 = 1200$  кг.

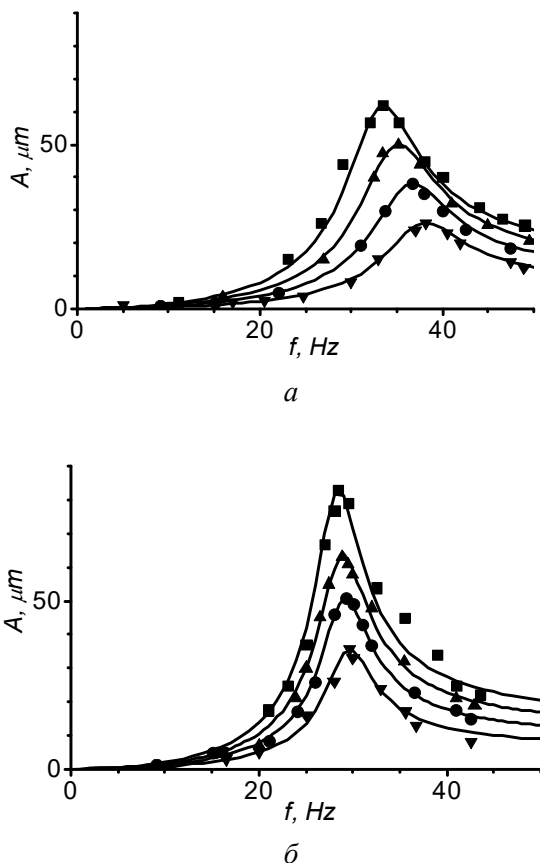
Используя данные из табл. 2 с резонансными частотами  $f_{res}$  и амплитудами  $A_{res}$  ( $s = 4d$ ), определяются значения  $K_z^g / M$  для группы свай при различных значениях  $s$ . Результаты расчетов  $K_z^g / M$  и  $\Phi$  представлены в табл. 3. Нелинейные амплитудно-частотные кривые, рассчитанные с определенными  $M$ ,  $K_z^g / M$  и  $\Phi$ , изображены на рис. 6, а. В качестве дополнительной проверки выполнены расчеты для  $s = 2d$  при том же значении  $M = 3200$  кг и соответствующих этому варианту величинах  $K_z^g / M$  и  $\Phi$  (рис. 6, б). Приведенные данные иллюстрируют, что теоретические результаты удовлетворительно согласуются с данными измерений, имеющимися в доступных литературных источниках.

Таблица 3

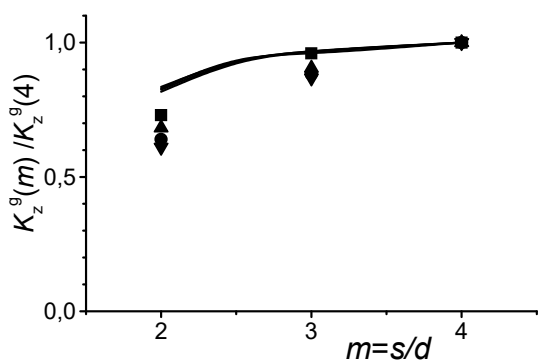
Результаты расчетов  $K_z^g / M$  и  $\Phi$

[Results of calculations of  $K_z^g / M$  and  $\Phi$ ]

$m_e r_e$ , кг·м [kg·m]	$s/d = 2$		$s/d = 3$		$s/d = 4$	
	$K_z^g / M$ , 1/с <sup>2</sup> [1/с <sup>2</sup> ]	$\Phi$ , с [s]	$K_z^g / M$ , 1/с <sup>2</sup> [1/с <sup>2</sup> ]	$\Phi$ , с [s]	$K_z^g / M$ , 1/с <sup>2</sup> [1/с <sup>2</sup> ]	$\Phi$ , с [s]
0,0187	3,41·10 <sup>4</sup>	0,89·10 <sup>-3</sup>	4,88·10 <sup>4</sup>	0,84·10 <sup>-3</sup>	5,62·10 <sup>4</sup>	0,95·10 <sup>-3</sup>
0,0278	3,32·10 <sup>4</sup>	0,94·10 <sup>-3</sup>	4,57·10 <sup>4</sup>	0,97·10 <sup>-3</sup>	5,18·10 <sup>4</sup>	1,00·10 <sup>-3</sup>
0,0366	3,25·10 <sup>4</sup>	1,01·10 <sup>-3</sup>	4,31·10 <sup>4</sup>	0,94·10 <sup>-3</sup>	4,71·10 <sup>4</sup>	1,05·10 <sup>-3</sup>
0,0450	3,15·10 <sup>4</sup>	0,96·10 <sup>-3</sup>	4,14·10 <sup>4</sup>	0,98·10 <sup>-3</sup>	5,31·10 <sup>4</sup>	1,10·10 <sup>-3</sup>



**Рис. 6.** Экспериментальные и расчетные частотные кривые группы свай 2×2 при  $s = 4d$  (а),  $s = 2d$  (б), для различных значений  $r_e m_e = 0,0187$  (▼),  $0,0278$  (●),  $0,0366$  (▲),  $0,0450$  (■), кг·м [7; 8] (кривые – результаты расчетов)  
**[Figure 6.** Experimental and calculated frequency curves of the pile group 2×2 at  $s = 4d$  (a),  $s = 2d$  (б), for different values  $r_e m_e = 0,0187$  (▼),  $0,0278$  (●),  $0,0366$  (▲),  $0,0450$  (■), kg·m [7; 8] (curves – results of calculations)]



**Рис. 7.** Изменение относительной жесткости группы свай 2×2 от расстояния между сваями в кусте: эксперимент при различных значениях  $r_e m_e = 0,0187$  (▼),  $0,0278$  (●),  $0,0366$  (▲),  $0,0450$  (■), кг·м [8], кривые – результаты расчетов  
**[Figure 7.** Variation the relative stiffness of a group piles 2×2 from the distance between the piles in the group: the experiment at different values  $r_e m_e = 0,0187$  (▼),  $0,0278$  (●),  $0,0366$  (▲),  $0,0450$  (■), kg·m [8], (curves – results of calculations)]

Значения  $K_z^g / M$  для группы свай позволяют оценить собственные частоты  $\lambda_z$  при вертикальных колебаниях фундаментов и наличии демпфирования –  $\lambda_z \approx \sqrt{K_z / M}$ . Из представленных в табл. 3 результатов следует уменьшение собственных частот при увеличении интенсивности возбуждения, что согласуется с выводами из [31] о нелинейном поведении рассматриваемой системы «сваи – грунт». Модуль затухания изменяется слабо, и его средняя величина оценивается как  $\Phi \approx 0,97 \cdot 10^{-3}$  с. Сравнение с экспериментом подтверждает, что аналитические методы позволяют описывать основные особенности амплитудно-частотного поведения групп свай при малых вертикальных вибрационных воздействиях. В рассмотренных случаях эффективная масса и демпфирование сохраняют свои величины при увеличении интенсивности возбуждения. Изменение, определяемой по результатам экспериментов динамической жесткости относительно максимального значения при  $s/d = 4$ , представлено на рис. 7.

Согласно [2], теоретическая оценка жесткости по боковой поверхности группы свай получена с использованием соотношения

$$K_z^g(m) = 4\mu h S_{1,3}(a_0, m a_0),$$

где  $h$  – величина заглубления свай в грунт.

Определено, что в рассматриваемых случаях при имеющихся значениях радиуса сваи, скорости поперечных волн и определенных резонансных частотах возможные значения безразмерной частоты колебаний  $a_0 = r_0 \omega / V_s$ ,  $\omega = 2\pi f_{rez}$  изменяются в диапазоне от 0,06 до 0,1. При оценке изменения жесткости системы от расстояния между сваями использовалось  $a_0 = 0,08$ . Близко расположенные кривые на рис. 7 иллюстрируют изменение рассчитанных жесткостей относительно максимального значения при  $s/d = 4$  для различных  $m_e r_e$ .

Из сравнения теоретической оценки с экспериментами следует, что рассматриваемый аналитический метод позволяет прогнозировать основные особенности динамического взаимодействия между сваями в группе. Максимальное отличие между экспериментальными результатами и теоретическими оценками, которые уменьшают эффект взаимодействия, при  $s/d = 2$  составляет около 15 %, а при величине параметра  $s/d = 3$  результаты различаются не более чем на 5 %. Вместе с тем необходимо отметить, что нами не учитывается взаимодействие под концом свай, которое является существенным. Однако в результате можно сделать

вывод об удовлетворительном совпадении, хотя очевидно, что разработка теоретических оценок взаимодействия группы свай между собой и грунтом требует дальнейшего совершенствования с привлечением экспериментальных данных, полученных при испытаниях полноразмерных свайных фундаментов в полевых условиях.

### Заключение

Проведено сравнение теоретических результатов с данными экспериментов по количественной оценке взаимодействия связанных ростверком висячих свай при вертикальных колебаниях. Использовались полученные ранее аналитические выражения для расчетов динамической жесткости свай в группе в зависимости от их расположения и расстояния между ними. По результатам проведенных исследований установлено, что соотношения, полученные в рамках волновых моделей, учитывающих взаимное влияние свай в кусте, применяемые для расчета динамических жесткостей при вертикальных колебаниях свайных фундаментов, позволяют получать удовлетворительные результаты по точности, что подтверждается их сравнением с данными экспериментальных исследований.

### Список литературы

1. *Prakash S., Puri V.K.* Foundations for machines: analysis and design. NY: J. Wiley & Sons, 1988. 656 p.
2. *Chowdhury I., Dasgupta S.P.* Dynamics of Structures and Foundations: A Unified Approach: Fundamentals: 1. CRC Press, 2008. 882 p.
3. *Пятецкий В.М., Александров Б.К., Савинов О.А.* Современные фундаменты машин и их автоматизированное проектирование. М.: Стройиздат, 1993. 416 с.
4. *Савинов О.А.* Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. Ленинград: Стройиздат, 1979. 200 с.
5. *Guo W.D.* Theory and practice of pile foundations. CRC Press, 2013. 576 p.
6. *Novak M., El Sharnouby B.* Evaluation of dynamic experiments on pile group // Journal of Geotechnical Engineering. 1984. Vol. 110. Issue 6. Pp. 738–756.
7. *Rashidifar M.A., Rashidifar A.A., Abertavi A.* Non-linear characteristics of the pile soil system under vertical vibration // Universal journal of engineering science. 2016. Vol. 4. Issue 4. Pp. 59–65.
8. *Manna B., Baidya D.K.* Dynamic nonlinear response of pile foundations under vertical vibration – Theory versus experiment // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2010. Vol. 30. Pp. 456–469.
9. *Das S.K., Manna B., Baidya D.K.* Prediction of pile-separation length under vertical vibration using ANN // 14<sup>th</sup> Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering 2011. Hong Kong, China. Curran Associates, Inc, 2013. Vol. 2. Pp. 887–892.
10. *El Naggar M., Novak M.* Nonlinear axial interaction in pile dynamics // Journal of Geotechnical Engineering ASCE. 1994. Vol. 120. Issue 4. Pp. 678–696.
11. *Matlock H., Foo S.H.C., Bryant L.M.* Simulation of lateral pile behaviour under earthquake motion // Proc. ASCE. Specialty Conf. on Earthq. Eng. and Soil Dyn., XI. 1978. Pp. 600–619.
12. *Novak M., Sheta M.* Approximate approach to contact problems of piles // Proc: Dyn. Response of Pile Found: Analytical Aspects. NY: ASCE. 1980. Pp. 53–79.
13. *Veletsos A.S., Dotson, K.W.* Vertical and torsional vibration of foundations in inhomogeneous media // Jl. of Geotech. Eng., ASCE. 1988. Vol. 114. Issue 9. Pp. 1002–1021.
14. *Баранов В.А.* О расчете вынужденных колебаний заглубленного фундамента // Вопросы динамики и прочности: труды Рижского ПИ. 1967. № 14. С. 195–209.
15. *Нуждин Л.В., Забылин М.И.* Жесткость и демпфирование вертикальных колебаний свайного фундамента в слоистом основании // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1990. № 12. С. 36–41.
16. *Нуждин Л.В., Гензе П.А., Попов В.Н.* Оценка динамических реакций на контурах нескольких круглых вырезов в бесконечной пластине // Изв. вузов. Строительство. 2005. № 4. С. 47–53.
17. *Wu W., Wang K., Zhang Z., Leo C.* Soil-pile interaction in the pile vertical vibration considering true three-dimensional wave effect of soil // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2013. Vol. 37. Issue 17. Pp. 2860–2876.
18. *Medina C., Aznárez J., Padrón L., Maeso O.* Effects of soil-structure interaction on the dynamic properties and seismic response of piled structures // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2013. Vol. 53. Pp. 160–175.
19. *Allani M., Holeyman A.* Numerical evaluation of effects of nonlinear lateral pile vibrations on nonlinear axial response of pile shaft // Soils and Foundations. 2013. Vol. 53. Issue 3. Pp. 395–407.
20. *Khalil M.M., Hassan A.M., Elmamlouk H.H.* Dynamic behavior of pile foundations under vertical and lateral vibrations // HBRC Journal. 2019. Vol. 15. Issue 1. Pp. 55–71. DOI: 10.1080/16874048.2019.1676022.
21. *Amiri A.M., Ghanbari A.A., Derakhshandi M.* An analytical model for estimating the vibration frequency of structures located on the pile group in the case of floating piles and end-bearing pile march // Civil Engineering Journal. 2018. Vol. 4. Issue 2. Pp. 450–468. DOI: 10.28991/cej-0309105.
22. *Biswas S., Manna B.* Experimental and theoretical studies on the nonlinear characteristics of soil-pile systems under coupled vibrations // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2018. Vol. 144. Issue 3. Article number 04018007. DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001850.
23. *Biswas S., Manna B., Baidya D.K.* Experimental and theoretical study on the nonlinear response of full-scale single pile under coupled vibrations // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2017. Vol. 94. Pp. 109–115. DOI: 10.1016/j.soildyn.2017.01.012.
24. *Gazetas G., Markis N.* Dynamic pile-soil-pile interaction. Part I: Analysis of axial vibration // Earthquake



Engineering and Structural Dynamics. 1991. Vol. 20. Issue 2. Pp. 115–132. DOI:10.1002/eqe.4290200203.

25. Novak M. Dynamic Stiffness and Damping of Piles // Canadian Geotechnical Journal. 1974. Vol. 11. Issue 4. Pp. 574–598.

26. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1904. Vol. 203. Pp. 1–42.

27. Колесников А.О., Попов В.Н. Оценка динамических реакций на контурах нескольких круглых вырезов при колебаниях пластины // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. №. 3. С. 37–43.

28. Колесников А.О., Попов В.Н. Динамические реакции на контурах круговых вырезов с учетом их взаимного расположения при колебаниях пластины // Известия ВНИИГ имени Б.Е. Веденеева. 2017. Т. 283. С. 3–10.

29. Колесников А.О., Попов В.Н., Костюк Т.Н. Исследование влияния заглубления и расположения свай

на собственные частоты при колебаниях фундаментов // Известия вузов. Строительство. 2019. № 5. С. 39–52.

30. Колесников О.А., Костюк Т.Н., Попов В.Н. Расчет вертикальной жесткости свайного фундамента с учетом взаимного влияния свай // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 3. С. 229–336.

31. Manna B., Baidya D.K. Nonlinear vertical dynamic response of pile groups // Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. 2009. IOS Press. Pp. 1128–1131. DOI: 10.3233/978-1-60750-031-5-1128.

32. Novak M. Data reduction from nonlinear response curves // Journal of Engineering Mechanics, ASCE. 1971. 97(EM4). Pp. 1187–1204.

33. Lorenz H. Elasticity and damping effects of oscillating bodies on soil // Symposium on Dynamic Testing on Soils, ASTM STP. 1953. No. 156. Pp. 113–122.

RESEARCH PAPER

## Evaluation of the pile interaction at vertical vibrations of foundation

Aleksei O. Kolesnikov<sup>1\*</sup>, Vladimir N. Popov<sup>2</sup>, Tatiana N. Kostiuk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), 113 Leningradskaya St, Novosibirsk, 630008, Russian Federation

<sup>2</sup>Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of SB RAS, 4/1 Institutskaya St, Novosibirsk, 630090, Russian Federation

\*ao\_kolesnikov@mail.ru

### Article history:

Received: February 17, 2020

Revised: May 20, 2020

Accepted: May 22, 2020

### Acknowledgements:

The research has been carried out within the Program of Fundamental Research of the State Academies of Sciences 2013-2020 (project No. AAAA-A17-117030610136-3).

### For citation

Kolesnikov A.O., Popov V.N., Kostiuk T.N. Evaluation of the pile interaction at vertical vibrations of foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(3):209–218. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-209-218> (In Russ.)

### Abstract

**The aim of the work** – to research changes in the dynamic stiffness of pile foundations from the distance between the piles during vertical vibrations using experimental data from literature sources and solving wave models describing the vertical vibrations of a thin plate with round cuts. **Methods.** To verify the reliability of solutions of wave models describing changes in dynamic stiffness during vertical vibrations of pile foundations, it is used data obtained in experiments to determine the eigenfrequencies of 3×3 groups of friction piles with different distances between them. Also the data obtained from forced vertical oscillations of 2×2 groups of friction piles connected by pile-caps at different loads and distances between piles was used. In the processing of available amplitude-frequency curves for determining the dynamic stiffness the inverse problem is solved using the theory of nonlinear oscillations. The correspondence between the measured and predicted data is evaluated, when describing the behavior of the pile-ground system. **Results.** It is established that the relations that take into account the mutual influence of piles in the group, obtained in the framework of wave models solutions and used for calculating dynamic stiffness in vertical vibrations of pile foundations, allow us to obtain satisfactory results in accuracy. The deviation of the calculation results from the experimental data does not exceed 15%.

**Keywords:** pile foundation, mutual influence of piles in a group, distance between piles, pile-ground system, wave model

## References

1. Prakash S., Puri V.K. *Foundations for machines: analysis and design*. NY: J. Wiley & Sons; 1988.

**Aleksei O. Kolesnikov**, Cand. Sc. (Technical), Associate Professor, Department of Engineering Geology, Bases and Foundations; eLIBRARY SPIN-code: 1225-7017, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3627-5888>.

**Vladimir N. Popov**, Dr. Sc. (Physics-Mathematical), chief researcher; eLIBRARY SPIN-code: 9483-9689, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6043-2134>.

**Tatiana N. Kostiuk**, master student, Department of Engineering Geology, Bases and Foundations; eLIBRARY SPIN-code: 5302-2974, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5605-7944>.

2. Chowdhury I., Dasgupta S.P. *Dynamics of Structures and Foundations: A Unified Approach: Fundamentals: 1*. CRC Press, 2008.

3. Pyateckij V.M., Aleksandrov B.K., Savinov O.A. *Sovremennye fundamenty mashin i ikh avtomatizirovannoe proektirovanie [Modern foundations of machines and their computer design]*. Moscow: Strojizdat Publ., 1993. (In Russ.)

4. Savinov O.A. *Sovremennye konstruksii fundamentov pod mashiny i ikh raschet [Modern construction of foundations for machines and their calculation]*. Leningrad: Strojizdat Publ.; 1979. (In Russ.)

5. Guo W.D. *Theory and practice of pile foundations*. CRC Press; 2013.
6. Novak M., El Sharnouby B. Evaluation of dynamic experiments on pile group. *Journal of Geotechnical Engineering*. 1984;110(6):738–756.
7. Rashidifar M.A., Rashidifar A.A., Abertavi A. Nonlinear characteristics of the pile soil system under vertical vibration. *Universal Journal of Engineering Science*. 2016;(4):59–65.
8. Manna B., Baidya D.K. Dynamic nonlinear response of pile foundations under vertical vibration – Theory versus experiment. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2010;30:456–469.
9. Das S.K., Manna B., Baidya D.K. Prediction of pile-separation length under vertical vibration using ANN. *14<sup>th</sup> Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering 2011. Hong Kong, China*. 2013;2: 887–892.
10. El Naggar M., Novak M. Nonlinear axial interaction in pile dynamics. *Journal of Geotechnical Engineering ASCE*. 1994;120(4):678–696.
11. Matlock H., Foo S.H.C., Bryant L.M. Simulation of lateral pile behaviour under earthquake motion. *Proc. ASCE. Specialty Conf. on Earthq. Eng. and Soil Dyn., XI*. 1978:600–619.
12. Novak M., Sheta M. Approximate approach to contact problems of piles. *Proc. Dyn. Response of Pile Found. Analytical Aspects* (p. 53–79). NY: ASCE; 1980.
13. Veletsos A.S., Dotson K.W. Vertical and torsional vibration of foundations in inhomogeneous media. *Jl. of Geotech. Eng., ASCE*. 1988;114(9):1002–1021.
14. Baranov V.A. O raschete vyzhdenykh kolebaniy zaglubennogo fundamenta [On the calculation of forced oscillations of the deepening foundation]. *Voprosy dinamiki i prochnosti: Trudy Rzhskogo politekhnicheskogo instituta*. 1967;(14):195–209. (In Russ.)
15. Nuzhdin L.V., Zabylin M.I. Zhestkost' i dempfirovanie vertikal'nykh kolebaniy svajnogo fundamenta v sloistom osnovanii [Stiffness and damping of vertical vibrations of the pile foundation in a layered bases]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 1990;12:36–41. (In Russ.)
16. Nuzhdin L.V., Genze P.A., Popov V.N. Otsenka dinamicheskikh reaksij na konturakh neskol'kikh kruglykh vyrezov v beskonechnoj plastine [Estimation of dynamic reactions on the contours of several circular cuts in an infinite plate]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo*. 2005;4:47–53. (In Russ.)
17. Wu W., Wang K., Zhang Z., Leo C. Soil-pile interaction in the pile vertical vibration considering true three-dimensional wave effect of soil. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2013; 37(17):2860–2876.
18. Medina C., Aznárez J., Padrón L., Maeso O. Effects of soil-structure interaction on the dynamic properties and seismic response of piled structures. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2013;53:160–175.
19. Allani M., Holeyman A. Numerical evaluation of effects of nonlinear lateral pile vibrations on nonlinear axial response of pile shaft. *Soils and Foundations*. 2013;53(3):395–407.
20. Khalil M.M., Hassan A.M., Elmamlouk H.H. Dynamic behavior of pile foundations under vertical and lateral vibrations. *HBRC Journal*. 2019;15(1):55–71. DOI: 10.1080/16874048.2019.1676022.
21. Amiri A.M., Ghanbari A.A., Derakhshandi M. An analytical model for estimating the vibration frequency of structures located on the pile group in the case of floating piles and end-bearing pile march. *Civil Engineering Journal*. 2018;4(2):450–468. DOI: 10.28991/cej-0309105.
22. Biswas S., Manna B. Experimental and theoretical studies on the nonlinear characteristics of soil-pile systems under coupled vibrations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2018;144(3):04018007. DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001850.
23. Biswas S., Manna B., Baidya D.K. Experimental and theoretical study on the nonlinear response of full-scale single pile under coupled vibrations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2017;94:109–115. DOI: 10.1016/j.soildyn.2017.01.012.
24. Gazetas G., Markis N. Dynamic pile-soil-pile interaction. Part I: Analysis of axial vibration. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 1991;20(2):115–132. DOI: 10.1002/eqe.4290200203.
25. Novak M. Dynamic Stiffness and Damping of Piles. *Canadian Geotechnical Journal*. 1974;11(4):574–598.
26. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*. 1904;203:1–42.
27. Kolesnikov A.O., Popov V.N. Estimation of dynamic responses on contours of several round cuts at vibrations of a thin plate. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;3:37–43. (In Russ.)
28. Kolesnikov A.O., Popov V.N. Dinamicheskie reaksii na konturakh krugovykh vyrezov s uchedom ikh vzaimnogo raspolzheniya pri kolebaniyakh plastiny [Dynamic reactions on contours of circular cuts taking into account their mutual arrangement at plate oscillations]. *Izvestiya VNIIG imeni B.Ye. Vedeneeva*. 2017;283:3–10. (In Russ.)
29. Kolesnikov A.O., Popov V.N., Kostiuk T.N. Issledovanie vliyaniya zaglubleniya i raspolzheniya svaj na sobstvennye chastoty pri kolebaniyakh fundamentov [Investigation of the influence of deepening and piles location on natural frequencies during foundation vibrations]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo*. 2019;5:39–52. (In Russ.)
30. Kolesnikov A.O., Kostiuk T.N., Popov V.N. Calculation of foundation vertical stiffness with the piles mutual influence effect. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(3):229–236. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-229-236> (In Russ.)
31. Manna B., Baidya D.K. Nonlinear vertical dynamic response of pile groups. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2009:1128–1131. DOI: 10.3233/978-1-60750-031-5-1128.
32. Novak M. Data reduction from nonlinear response curves. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 97(EM4)*. 1971:1187–1204.
33. Lorenz H. Elasticity and damping effects of oscillating bodies on soil. *Symposium on Dynamic Testing on Soils, ASTM STP*. 1953;156:113–122.