

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-3-179-184
УДК 624.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Расчет зависимости прогиба арочной фермы с подвесными элементами от числа панелей

М.Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Российская Федерация, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14
e216@ya.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 16 марта 2020 г.
Доработана: 05 апреля 2020 г.
Принята к публикации: 14 апреля 2020 г.

Аннотация

Цель исследования – предложить схему и аналитический расчет статически определимой плоской фермы с подвесным нижним поясом. **Методы.** Вывод формулы зависимости прогиба фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу от ее размеров и числа панелей выполнен в системе компьютерной математики Maple. Усилия в стержнях находятся из решения общей системы уравнений равновесия всех узлов в символьной форме. Прогиб вычисляется по формуле Максвелла – Мора. Жесткость всех стержней, исключая опорные, предполагается одинаковой. Обобщение ряда формул для прогиба, полученных при последовательном увеличении числа панелей на произвольное их число, произойдет методом двойной индукции по двум независимым параметрам. Один параметр – число панелей в ригеле, другой – число панелей в боковых частях арки. При этом задействуются специальные операторы системы Maple, позволяющие для последовательности коэффициентов в искомой формуле составить и решить рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют элементы последовательностей. **Результаты.** Полученные решения имеют полиномиальную форму по числу панелей не выше пятой степени. Построены и проанализированы кривые зависимости прогиба от числа панелей. Найдены асимптотические свойства решений в случае фиксированной длины пролета конструкции и заданной суммарной нагрузки. Предложенная схема статически определимой конструкции с двумя независимыми параметрами регулярности допускает нахождение достаточно простого аналитического решения. Полученная формула наиболее эффективна в расчетах систем с большим числом элементов, где численные методы имеют тенденцию к накоплению ошибок округления.

Ключевые слова: ферма, решетка фермы, Maple, прогиб, индукция, арка, асимптотика

Для цитирования

Кирсанов М.Н. Расчет зависимости прогиба арочной фермы с подвесными элементами от числа панелей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 179–184. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-179-184>

Введение

Существующие методы расчета строительных конструкций основаны, как правило, на численных

методах, в частности на методе конечных элементов [1–3]. С развитием систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Derive и др.) все большее значение приобретают аналитические методы [4–11]. Формулы, полученные для прогиба и усилий в элементах конструкции, могут быть использованы как для оценки точности численных решений, так и для простого предварительного расчета систем. Ценность аналитических решений тем больше, чем больше независимых параметров геометрии и упругих характеристик объекта. Для конструк-

Кирсанов Михаил Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; eLIBRARY SPIN-код: 8679-6853, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8588-3871>, ResearcherID: H-9967-2013, IstinaresearcherID: 2939132.

© Кирсанов М.Н., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

ций, имеющих регулярную структуру, например периодическую, решения методом индукции могут быть обобщены на произвольное число элементов периодичности. В регулярных фермах элементом периодичности является панель стержней. Если же конструкция имеет форму рамы или арки, то в ней может быть два и более параметра регулярности. В этом случае для обобщения решения на произвольное число панелей необходимо проводить двойную индукцию, например, сначала по числу панелей в ригеле, потом в опорах. Ранее этим методом были получены решения для прогиба плоских решетчатых [4–10], арочных [11–14] и пространственных [15–17] ферм. Более 70 формул для прогиба различных плоских ферм приведены в справочнике [18]. Предлагаемая конструкция (рис. 1, 2) арочной фермы рассчитывается этим методом.

1. Материалы и методы

Ригель фермы имеет прямолинейное очертание поясов и нисходящие раскосы длиной $c = \sqrt{h^2 + a^2}$. Симметричные части арки соединяются в шарнире C . Высота конструкции равна $(k + 3)h$, длина пролета $L = 2(n + k + 1)a$. Каждая ветвь арки состоит из трех частей: вертикальной высотой $2h$, наклонной из k панелей и горизонтальной (ригеля) из n панелей. Угол наклона боковых частей определяется соотношением размеров h и a . Нижний горизонтальный пояс фермы (стяжка) из шарнирно соединенных стержней длиной a крепится упругими вертикальными подвесками к нижнему поясу ригеля.

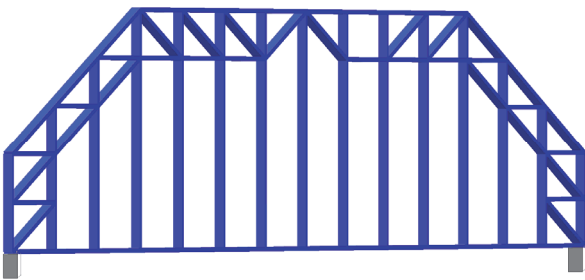


Рис. 1. 3D-модель фермы: $n = 4, k = 2$
[Figure 1. 3D model of the truss: $n = 4, k = 2$]

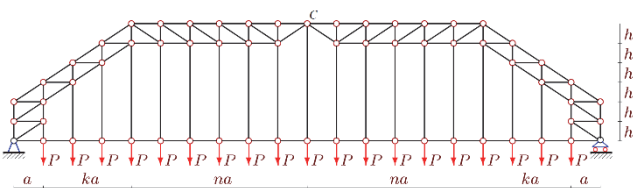


Рис. 2. Ферма под действием равномерной нагрузки при $n = 6, k = 3$
[Figure 2. Truss under uniform load: $n = 6, k = 3$]

Расчет усилий в стержнях выполним в системе компьютерной математики Maple по программе [18] на основе опыта ее применения [4–14] для решения подобных задач для плоских ферм. Сначала в программе задаются координаты узлов и порядок соединения стержней. По этим данным рассчитываются направляющие косинусы усилий, являющиеся элементами матрицы системы уравнений равновесия узлов. На языке системы Maple это имеет вид

```
> m0:=8m+12n+12k+4
> Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
> Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
> L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2);
> for j to 2 do
> u:=2N[i][2]-2+j:
> if u<=m0 then G[u,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi:
> u:=2N[i][1]-2+j:
> if u<=m0 then G[u,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi:
> od;
```

где $x[], y[]$ – координаты шарниров; $Lxy[1], Lxy[2]$ – проекции условно направленных стержней на оси координат; $L[i]$ – длина стержня; $m0$ – число стержней, включая три опорные; $G[]$ – матрица системы уравнений равновесия.

Решение системы линейных уравнений выполняется средствами системы Maple.

Полученное решение для усилий в стержнях можно представить графически, выделив красным цветом растянутые стержни и синим сжатые (рис. 3). Толщина отрезков стержней пропорциональна модулю усилий. Расчет произведен при $a = 5$ м, $h = 2$ м. Усилия отмечены значениями, отнесенными к величине нагрузки P и округленными до целого числа.

Заметим несколько неожиданное появление сжатых стержней в нижнем поясе ригеля и растянутых в верхнем поясе боковых сторон. Наличие стяжки затрудняет при расчете усилий непосредственное использование метода сечений.

Определим по формуле Максвелла – Мора прогиб фермы под действием равномерной нагрузки, приложенной к узлам нижнего пояса:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m_0-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

где S_i – усилия от действия внешней нагрузки; s_i – усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к сочленяющему узлу C ; l_i – длины стержней; m_0 – число стержней, включая три опорные стержня.

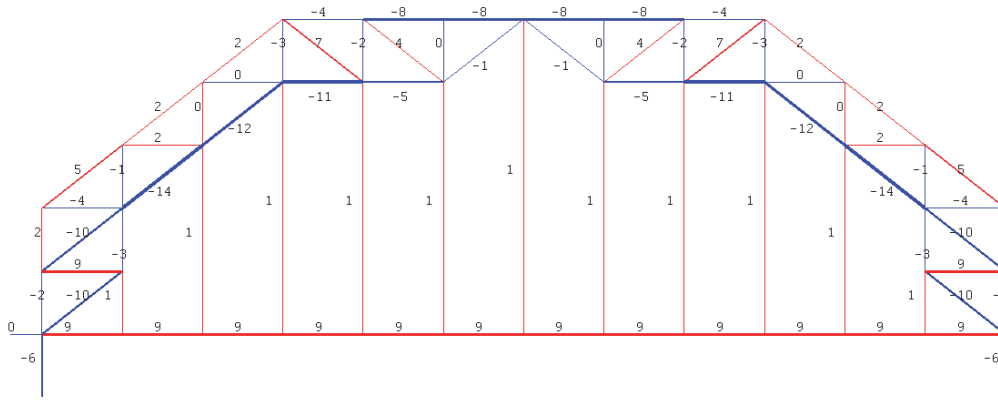


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях конструкции: $n = 3, k = 2$
 [Figure 3. Force distribution in the construction rods: $n = 3, k = 2$]

2. Результаты

Замечено, что при расчете прогиба вид результата для разного числа панелей не меняется:

$$\Delta = P(A_{n,k}a^3 + C_{n,k}c^3 + H_{n,k}h^3) / ((k+3)^2 EFh^2).$$

Вывод общих формул для коэффициентов в этом выражении производится в два этапа. Сначала фиксируется $k = 1$ и вводится зависимость коэффициентов от n при этом значении k . Затем данный вывод повторяется при $k = 2, 3, 4, \dots$ ровно столько раз, сколько необходимо для получения закономерности по k . Особенность оператора **rgf_findrecur** пакета **genfunc** системы Maple состоит в том, что число членов анализируемой последовательности должно быть четным. При $k = 1$ коэффициенты $A_{n,1}$ образуют последовательность 51, 232, 703, 1704, 3555, 6656, 11487, 18608 Оператор **rgf_findrecur** дает однородное рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности:

$$A_{n,1} = 5A_{n-1,1} - 10A_{n-2,1} + 10A_{n-3,1} - 5A_{n-4,1} + A_{n-5,1}.$$

Оператор **rsolve** решает это уравнение:

$$A_{n,1} = (232n + 260n^2 + 80n^3 + 40n^4) / 12.$$

Аналогично при других значениях k имеем следующие выражения:

$$A_{n,2} = (270 + 894n + 544n^2 + 78n^3 + 62n^4) / 12,$$

$$A_{n,3} = (1152 + 2184n + 894n^2 + 60n^3 + 90n^4) / 12,$$

$$A_{n,4} = (3150 + 4300n + 1292n^2 + 26n^3 + 124n^4) / 12,$$

...

Второй этап индукции – обобщение полученных выражений по k . Для этого используются те же операторы – **rgf_findrecur** и **rsolve**. В итоге имеем:

$$A_{n,k} = (6k^4 + 3(8 + 11n - n^2)k^3 + (12 + 116n + 51n^2 - 8n^3 + 3n^4)k^2 - (24 - 83n - 152n^2 - 22n^3 - 13n^4)k - 18 + 60n^2 + 66n^3 + 24n^4) / 12,$$

$$C_{n,k} = (-(n+1)k^5 + 3(1-3n)k^4 + (4n^3 + 3n^2 - 2n + 23)k^3 + 3(10n^3 + 14n^2 + 11n + 17)k^2 + (74n^3 + 69n^2 + 63n + 50)k + 36n^3 + 54n^2 + 36n + 18) / 12,$$

$$H_{n,k} = ((1-n)k^3 + (n^3 + n^2 - 4n)k^2 + (5n^3 + 15n^2 - 24n - 1)k + 10n^3 + 12n^2 - 15n - 8) / 2.$$

Проверку этих зависимостей можно выполнить, поменяв порядок индукции: сначала по k , потом по n .

На рис. 4 даны кривые найденного решения для безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ при фиксированной длине пролета $L = 2a(n + k + 1) = 100$ м, заданной общей нагрузке $P_0 = P(2n + 2k + 1)$ и ограниченной сумме панелей $k + n = 15$. Последнее ограничение сделано для иллюстрации влияния выбора соотношения размеров ригеля и боковых стоек на жесткость сооружения. На рисунке видно, что при малых n и, следовательно, больших k прогиб очень мал или даже отрицательный. Такое соотношение n и k соответствует высоким аркам, а большие значения n – низким конструкциям с большим пролетом и большим прогибом.

Если же просто увеличивать число панелей k в боковых частях арки, то прогиб монотонно уменьшается (рис. 5), причем тем быстрее, чем меньше высота панели h . Более того, при некотором значении k прогиб обращается в ноль и даже становится

ся отрицательным. Это – следствие прямолинейности боковых сторон арки. Будь прогиб криволинейным с выпуклостью вверх, этого бы не произошло. Кривые зависимости прогиба от числа панелей имеют точки перегиба, но не имеют экстремальных точек. Отметим, что при выбранном значении пролета $L = 100$ м и $n = 4$ длина панели в случае прогиба, близкого к нулю, то есть при $k = 11$, равна $a = 3,1$ м, а при $k = 44$ (в районе самопересечения кривых) $a = 1,0$ м.

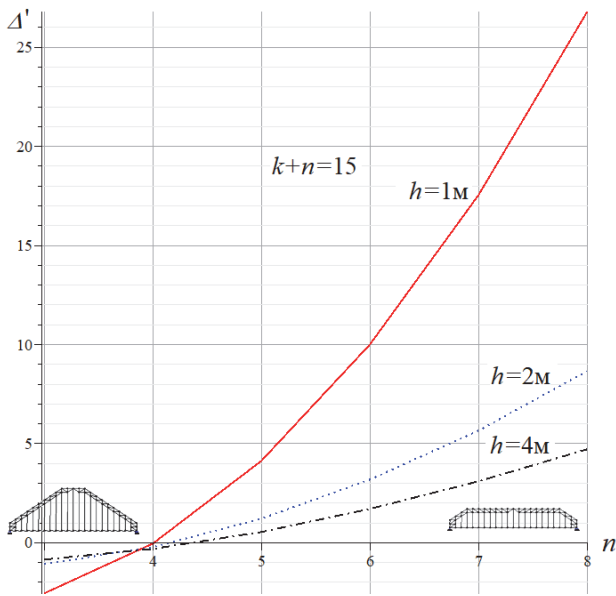


Рис. 4. Зависимость прогиба от соотношений числа панелей:
 $L = 100$ м
[Figure 4. Deflection dependence on the ratio of the number of panels: $L = 100$ m]

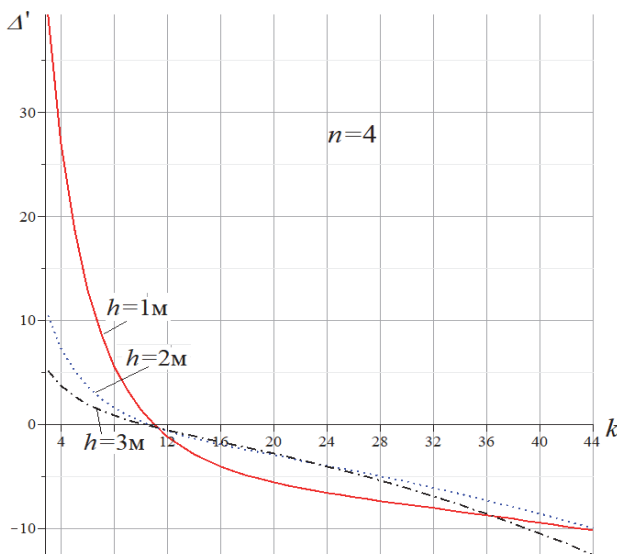


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа k панелей: $n = 4$
[Figure 5. Deflection dependence on the number of panels k :
 $n = 4$]

Операторы системы Maple могут найти и асимптотические свойства решения, иллюстрирующие характер зависимостей в принятой постановке (фиксированная нагрузка и заданный пролет). Рост прогиба по числу k панелей имеет квадратичный характер с выпуклостью параболы вверх:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^2 = -h(n+1) / (24L).$$

Аналогичный порядок асимптотики имеет решения по числу n панелей в ригеле для произвольного параметра k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = h(k^2 + 6k + 8) / (6L(k+3)).$$

Заключение

Предложена схема плоской модели статически определимой фермы арочного типа с дополнительным нижним поясом, выполняющим роль стяжки. Схема может быть рассчитана в аналитической форме. Решение для прогиба в зависимости от числа панелей достаточно компактно, а два независимых параметра n и k дают возможность использовать это решение для широкого класса ферм арочного типа. При решении была выбрана система Maple, однако это не принципиальный выбор. С не меньшим успехом для расчета усилий и прогиба в аналитической форме можно использовать и системы Mathematica, Maxima, Derive, Reduce и др. Трудности для некоторых систем возникают при составлении и решении рекуррентных уравнений, для которых не во всех системах имеются специальные операторы. В таких случаях можно использовать существующие онлайн-сервисы, например на базе Mathematica, или писать свои программы.

Список литературы

1. Mathieson C., Roy K., Clifton G., Ahmadi A., Lim J.B.P. Failure mechanism and bearing capacity of cold-formed steel trusses with HRC connectors // Engineering Structures. 2019. Vol. 201. Article number 109741.
2. Villegas L., Moran R., Garcia J.J. Combined culmslat Guadua bamboo trusses // Engineering Structures. 2019. Vol. 184. Pp. 495–504.
3. Dong L. Mechanical responses of snap-fit Ti-6Al-4V warren-truss lattice structures // International Journal of Mechanical Sciences. 2020. Vol. 173. Article number 105460.
4. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46. No. 1. Pp. 46–52.
5. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 4–3 (8). С. 7–8.

6. Тимофеева Т.А. Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 26–33.
7. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 15–25.
8. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). С. 21–29.
9. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2 (21). С. 32–39.
10. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
11. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // *Строительная механика и конструкции*. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
12. Компанец К.А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // *Молодежь и наука*. 2017. № 4. С. 108.
13. Савиных А.С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // *Строительство и архитектура*. 2017. Т. 5. Вып. 3 (6). С. 12–17.
14. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // *Постулат*. 2017. № 12 (26). С. 74.
15. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. № 4 (64). С. 52–58.
16. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // *Научный альманах*. 2016. № 6–2 (19). С. 214–217.
17. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 4–8.
18. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.

RESEARCH PAPER

Calculation of the deflection of an arched truss with suspended elements depending on the number of panels

Mikhail N. Kirsanov

National Research University "Moscow Power Engineering Institute", 14 Krasnokazarmennaya St, Moscow, 111250, Russian Federation
e216@ya.ru

Article history:

Received: March 16, 2020

Revised: April 05, 2020

Accepted: April 14, 2020

Abstract

The aim of the work – to propose a scheme and analytical calculation of a statically definable planar truss with a suspended lower belt. **Methods.** The formula for the dependence of the deflection of the truss under the action of a uniform load on the lower belt on its size and the number of panels is derived in the computer mathematics system Maple. The forces in the rods are found from the solution of the general system of equilibrium equations of all nodes in symbolic form. The deflection is calculated using the Maxwell – Mohr's formula. Generalization of a number of formulas for deflection obtained by increasing the number of panels sequentially to an arbitrary number is performed by double induction using two independent parameters. In this case, special operators of the Maple system are used, allowing for a sequence of coefficients in the desired formula to create and solve recurrent equations that satisfy the elements of the sequences. **Results.** The obtained solutions have a polynomial form for the number of panels. Curves of deflection dependence on the number of panels are constructed and analyzed. Asymptotic properties of solutions are found in the case of a fixed span length of the structure and a given total load. The proposed scheme is a statically determinate structure with two independent parameters of regularity allows for the finding of a fairly simple analytical solution. The resulting formula is most effective in calculating systems with a large number of elements, where numerical methods tend to accumulate rounding errors.

Keywords: truss, truss lattice, Maple, deflection, induction, arch, asymptotics

For citation

Kirsanov M.N. Calculation of the deflection of an arched truss with suspended elements depending on the number of panels. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(3):179–184. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-179-184> (In Russ.)

Mikhail N. Kirsanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; eLIBRARY SPIN-code: 8679-6853, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8588-3871>, ResearcherID:H-9967-2013, IstinaresearcherID: 2939132.

References

1. Mathieson C., Roy K., Clifton G., Ahmadi A., Lim J.B.P. Failure mechanism and bearing capacity of cold-formed steel trusses with HRC connectors. *Engineering Structures*. 2019;201:109741.
2. Villegas L., Moran R., Garcia J.J. Combined culmslat Guadua bamboo trusses. *Engineering Structures*. 2019; 184:495–504.
3. Dong L. Mechanical responses of snap-fit Ti-6Al-4V warren-truss lattice structures. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020;173:105460.
4. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017;46(1):46–52.
5. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016;(8)4–3:7–8.
6. Timofeeva T.A. Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):26–33. (In Russ.)
7. Boyko A.Y., Tkachuk G.N. Derivation of the formulas for the deflection of a flat hinged-rod frame in the of symbol mathematics Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):15–25. (In Russ.)
8. Belyankin N.A., Boyko A.Y. Formula for deflection of a girder with an arbitrary number of panels under the uniform load. *Structural mechanics and structures*. 2019;1(20): 21–29. (In Russ.)
9. Tkachuk G.N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;2(21):32–39. (In Russ.)
10. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Magazine of civil Engineering*. 2015;5(57):66–73. (In Russ.)
11. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems of deflection of flat trusses of arch type. *Structural mechanics and structures*. 2018;1(16):12–33. (In Russ.)
12. Kompaneets A.K. The calculation of the displacement of the movable support of flat arched diagonal truss with a load at Midspan. *Youth and science*. 2017;4–2:108. (In Russ.)
13. Savinyh A. Analysis of deflection of the arch truss loaded at the upper belt. *Construction and Architecture*. 2017; 5;3(6):12–17. (In Russ.)
14. Tinkov D.V. Calculation of the deflection of a flat arched truss with a cross-shaped grid. *Postulat*. 2017;12(26):74. (In Russ.)
15. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016; 4(64):52–58. (In Russ.)
16. Domanov J.V. The analytical dependence of the deflection of the spatial console of the triangular profile on the number of panels. *Science Almanac*. 2016;6–2(19):214–217. (In Russ.)
17. Larichev S.A. Inductive analysis of the effect of a building lift on the stiffness of a spatial beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. 2015;1:4–8. (In Russ.)
18. Kirsanov M.N. *Planar trusses. Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing; 2019.