ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ
NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Сравнительный анализ конечно-элементных формулировок при плоском нагружении упругого тела

Н.А. Гуреева[1], А.П. Николаев[2], В.Н. Юшкин[2]*

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, *Российская Федерация, 125993, Москва, ГСП-3, Ленинградский пр., 49*
[2]Волгоградский государственный аграрный университет, *Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26*
*aup-volgau@yandex.ru

История статьи:
Поступила в редакцию: 13 декабря 2019 г.
Доработана: 12 февраля 2020 г.
Принята к публикации: 25 февраля 2020 г.

Благодарности
Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-41-340004 р_а.

Для цитирования
Гуреева Н.А., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Сравнительный анализ конечно-элементных формулировок при плоском нагружении упругого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 139–145. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145

Аннотация
Цель исследования – сравнение результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния плосконагруженных упругих тел на основе метода конечных элементов в формулировке метода перемещений и в смешанной формулировке. ***Методы.*** Разработаны и применены алгоритмы метода конечных элементов в различных формулировках. ***Результаты.*** В декартовой системе координат для определения напряженно-деформированного состояния упругого тела при плоском нагружении использован конечный элемент четырехугольной формы в двух формулировках: в формулировке метода перемещений с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных и в смешанной формулировке с узловыми неизвестными в виде перемещений и напряжений. Аппроксимация перемещений через узловые неизвестные при получении матрицы жесткости конечного элемента выполнялась с использованием функции формы, элементами которой принимались полиномы Эрмита третьей степени. При получении матрицы деформирования перемещения и напряжения внутренней точки конечного элемента аппроксимировались через узловые неизвестные с использованием билинейных функций. Матрица жесткости четырехугольного конечного элемента в формулировке метода перемещений получена на основе функционала, основанного на разности действительных работ внешних и внутренних сил при нагружении твердого тела. Матрица деформирования конечного элемента формировалась на основе смешанного функционала, полученного из предложенного функционала путем замены действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работ внутренних сил при нагружении тела. На примере расчета показано существенное преимущество использования конечного элемента в смешанной формулировке.

Ключевые слова: матрица жесткости, матрица деформирования, четырехугольный конечный элемент, смешанный функционал

Введение

При достаточно полном развитии теории деформирования нагруженных твердых тел [1–2] аналитическое получение конкретных результатов возможно только в некоторых, далеких от практики инженерных расчетов, случаях. Для получения результатов расчетов при определении напряженно-деформированного состояния (НДС) практических инженерных конструкций необходимо использование численных методов. Среди численных методов широкое распространение получил метод конечных элементов в формулировке метода перемещений [3–13]. К существенным недостаткам этого метода относится отсутствие непрерывности производных перемещений на контурах и гранях конечных элементов при сохранении непрерывности в узловых точках. Использование конечных элемен-

Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3496-2008, eLIBRARY SPIN-код: 8393-5900.
Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7098-5998, eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484.
Юшкин Владислав Николаевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3965-4397, eLIBRARY SPIN-код: 4833-4701.

тов в смешанной формулировке [14–17] приводит к выполнению условий непрерывности напряжений и деформаций не только в узловых точках, но и на контурах и гранях конечных элементов.

В настоящей работе для четырехугольного элемента представлены конечно-элементные алгоритмы в формулировке метода перемещений и в смешанной формулировке для определения НДС плоско нагруженных упругих тел. На примере расчета напряженного состояния консольной балки показано преимущество использования конечного элемента в смешанной формулировке.

1. Используемые соотношения теории упругости

При плоском нагружении упругого тела в плоскости $x0z$ деформации и перемещения связаны зависимостями Коши [1]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z};\ 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

или в матричной формулировке

$$\underset{3\times1}{\{\varepsilon\}} = \underset{3\times2}{[L]}\underset{2\times1}{\{V\}}, \tag{1}$$

где $\underset{1\times3}{\{\varepsilon\}^T} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xz}\}$ – строка деформаций; $\underset{1\times2}{\{V\}^T} = \{u, w\}$ – строка перемещений точки; $\underset{3\times2}{[L]}$ – матрица дифференциальных операторов.

При упругом деформировании напряжения и деформации связаны законом Гука

$$\underset{3\times1}{\{\sigma\}} = \underset{3\times3}{[C]}\underset{3\times1}{\{\varepsilon\}}, \tag{2}$$

где $\underset{1\times3}{\{\sigma\}^T} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}\}$ – строка напряжений.

2. Четырехугольный конечный элемент

В декартовой системе координат $0xz$ принимается четырехугольник с узлами i, j, k, l. Для выполнения численного интегрирования по площади элемента он отображается на локальный квадрат в системе координат ξ, η, которые изменяются в пределах от –1 до 1. Декартовы координаты внутренней точки четырехугольника определяются через их узловые значения с использованием билинейных функций:

$$\lambda = \underset{1\times4}{\{\varphi(\xi, \eta)\}^T}\underset{4\times1}{\{\lambda_y\}}, \tag{3}$$

где символ λ означает координату x или z; $\underset{1\times4}{\{\varphi(\xi, \eta)\}^T}$ – строка билинейных функций формы; $\underset{1\times4}{\{\lambda_y\}^T}$ – строка узловых значений координаты λ.

Дифференцированием (3) определяются производные декартовых координат в локальной системе $(x_{,\xi}, x_{,\eta}, z_{,\xi}, z_{,\eta})$ и локальных координат в декартовой системе $(\xi_{,x}, \xi_{,z}, \eta_{,x}, \eta_{,z})$.

2.1. Матрица жесткости четырехугольного конечного элемента в формулировке метода перемещений

В качестве узловых неизвестных принимаются перемещения и их первые производные по координатам x, z. Каждая координата u, w вектора перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через узловые неизвестные выражениями

$$\lambda = \underset{1\times12}{\{\psi(\xi, \eta)\}^T}\underset{12\times1}{\{\lambda_y^л\}}, \tag{4}$$

где $\underset{1\times12}{\{\lambda_y^л\}^T} = \{\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k, \lambda^l, \lambda^i_{,\xi}, \lambda^j_{,\xi}, \lambda^k_{,\xi}, \lambda^l_{,\xi}, \lambda^i_{,\eta}, \lambda^j_{,\eta}, \lambda^k_{,\eta}, \lambda^l_{,\eta}\}$ – строка узловых неизвестных в локальной системе координат; $\underset{1\times12}{\{\psi(\xi, \eta)\}^T}$ – аппроксимирующая функция, элементами которой являются произведения полиномов Эрмита от координат ξ, η в третьей степени.

Производные от перемещений по декартовым координатам определяются выражениями

$$\lambda_{,x} = \left[\underset{1\times12}{\{\psi_{,\xi}\}^T}\xi_{,x} + \underset{1\times12}{\{\psi_{,\eta}\}^T}\eta_{,x}\right]\underset{12\times1}{\{\lambda_у^л\}};$$

$$\lambda_{,z} = \left[\underset{1\times12}{\{\psi_{,\xi}\}^T}\xi_{,z} + \underset{1\times12}{\{\psi_{,\eta}\}^T}\eta_{,z}\right]\underset{12\times1}{\{\lambda_у^л\}}. \tag{5}$$

На основе (5) формируется матричное выражение

$$\underset{2\times1}{\{V\}} = \underset{2\times24}{[A]}\underset{24\times1}{\{V_у^л\}}, \tag{6}$$

где $\underset{1\times24}{\{V_y^л\}^T} = \left\{\underset{1\times12}{\{u_у^л\}^T}, \underset{1\times12}{\{w_у^л\}^T}\right\}$.

С учетом (5) и (6) матричное выражение для деформаций (1) может быть представлено в виде

$$\underset{3\times1}{\{\varepsilon\}} = \underset{3\times2}{[L]}\underset{2\times24}{[A]}\underset{24\times1}{\{V_y\}} = \underset{3\times24}{[B]}\underset{24\times1}{\{V_y\}}. \tag{7}$$

Для формирования матрицы жесткости конечного элемента используется функционал, отражающий равенство действительных работ внешних и внутренних сил:

$$\Pi_L = \frac{1}{2}\int_F \left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}\right) dF -$$

$$-\frac{1}{2}\int_l \left(q_{xx}u + q_{zz}w\right) dl, \tag{8}$$

где F – площадь конечного элемента; l – длина контура элемента.

Принимая во внимание соотношения (2) и (7), функционал (8) можно представить в матричном виде

$$\Pi_L = \frac{1}{2}\underset{1\times24}{\{V_y^{л}\}^T}\int_F \underset{24\times3}{[B]^T}\underset{3\times3}{[C]}\underset{3\times24}{[B]}dF\,\underset{24\times1}{\{V_y^{л}\}} -$$

$$-\frac{1}{2}\underset{1\times24}{\{V_y^{л}\}^T}\int_l \underset{24\times2}{[A]^T}\underset{2\times1}{\{q\}}\,dl. \tag{9}$$

Производные от перемещений в локальной системе координат определяются через производные в глобальной системе соотношениями

$$\lambda_{,\xi} = \lambda_{,x}x_{,\xi} + \lambda_{,z}z_{,\xi};$$

$$\lambda_{,\eta} = \lambda_{,x}x_{,\eta} + \lambda_{,z}z_{,\eta}. \tag{10}$$

На основании (10) выполняется преобразование вектора узловых неизвестных в локальной системе через вектор узловых неизвестных в декартовой системе в матричном виде:

$$\underset{24\times1}{\{V_{у}^{л}\}} = \underset{24\times24}{[T]}\underset{24\times1}{\{V_{у}^{г}\}}. \tag{11}$$

После минимизации преобразованного функционала (9) на основании (11) по узловым неизвестным $\{V_{у}^{г}\}^T$ получается матрица жесткости конечного элемента:

$$\underset{24\times24}{[K_1]}\underset{24\times1}{\{V_{у}^{г}\}} = \underset{24\times1}{\{f_y\}}, \tag{12}$$

где $\underset{24\times24}{[K_1]} = \underset{24\times24}{[T]^T}\int_F \underset{24\times3}{[B]^T}\underset{3\times3}{[C]}\underset{3\times24}{[B]}dF\,\underset{24\times24}{[T]}$ – матрица жесткости конечного элемента; $\underset{24\times1}{\{f_y\}} = \underset{24\times24}{[T]^T}\int_l \underset{24\times2}{[A]^T}\underset{2\times1}{\{q\}}\,dl$ – вектор узловых усилий конечного элемента.

При минимизации функционала (9) принято во внимание, что нагрузка и перемещения связаны линейной зависимостью, поэтому при дифференцировании координатной функции сократился коэффициент $1/2$ перед вектором сил.

2.2 Матрица деформирования конечного элемента в смешанной формулировке

В качестве узловых неизвестных четырехугольного конечного элемента принимаются перемещения и напряжения.

Перемещения внутренней точки конечного элемента u, w аппроксимируются через узловые неизвестные выражениями (4).

Матричное выражение для деформаций запишется в виде

$$\underset{3\times1}{\{\varepsilon\}} = \underset{3\times2}{[L]}\underset{2\times1}{\{V\}} = \underset{3\times2}{[L]}\underset{2\times8}{[A]}\underset{8\times1}{\{v_y\}} = \underset{3\times8}{[B]}\underset{8\times1}{\{v_y\}}, \tag{13}$$

где $\underset{1\times8}{\{v_y\}^T} = \{u^i, u^j, u^k, u^l, w^i, w^j, w^k, w^l\}.$

Каждая компонента тензора напряжений аппроксимируется через узловые неизвестные также билинейными выражениями:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \underset{1\times4}{\{\varphi(\xi,\eta)\}^T}\underset{4\times1}{\{\sigma_{\alpha\beta\, y}\}};\ (\alpha,\beta = 1,2). \tag{14}$$

где $\underset{4\times1}{\{\sigma_{\alpha\beta\, y}\}^T} = \{\sigma^i_{\alpha\beta}, \sigma^j_{\alpha\beta}, \sigma^k_{\alpha\beta}, \sigma^l_{\alpha\beta}\}$ – строка узловых неизвестных напряжений.

На основе (14) формируется матричное соотношение

$$\underset{3\times1}{\{\sigma\}} = \underset{3\times12}{[G]}\underset{12\times1}{\{\sigma_y\}}, \tag{15}$$

где $\underset{1\times12}{\{\sigma_y\}^T} = \left\{\underset{1\times4}{\{\sigma_{xx\,y}\}}, \underset{1\times4}{\{\sigma_{zz\,y}\}}, \underset{1\times4}{\{\sigma_{xz\,y}\}}\right\}.$

Для формирования матрицы деформирования конечного элемента выполняется преобразование функционала (8) путем замены действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работ при нагружении деформируемого тела:

$$\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} = \underset{1\times3}{\{\sigma\}^T}\underset{3\times2}{[L]}\underset{2\times1}{\{V\}} - \frac{1}{2}\underset{1\times3}{\{\sigma\}^T}\underset{3\times3}{[C]^{-1}}\underset{3\times1}{\{\sigma\}}. \tag{16}$$

С учетом (16) функционал (8) запишется матричным выражением

$$\Pi = \underset{1\times12}{\left\{\sigma_y\right\}^T} \int_F \underset{12\times3}{\left[G\right]^T} \underset{3\times8}{\left[B\right]} dF \underset{8\times1}{\left\{v_y\right\}} -$$

$$-\frac{1}{2}\underset{1\times12}{\left\{\sigma_y\right\}^T} \int_F \underset{12\times3}{\left[G\right]^T} \underset{3\times3}{\left[C\right]} \underset{3\times12}{\left[G\right]} dF \underset{12\times1}{\left\{\sigma_y\right\}} -$$

$$-\frac{1}{2}\underset{1\times8}{\left\{v_y\right\}^T} \int_l \underset{8\times2}{\left[A\right]^T} \underset{2\times1}{\left\{q\right\}} dl\,. \quad (17)$$

После выполнения варьирования функционала (17) по узловым неизвестным $\left\{\sigma_y\right\}^T$ и $\left\{v_y\right\}^T$ конечного элемента получается система уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\left\{\sigma_y\right\}^T} \equiv -\underset{12\times12}{\left[H\right]}\underset{12\times1}{\left\{\sigma_y\right\}} + \underset{12\times8}{\left[Q\right]}\underset{8\times1}{\left\{v_y\right\}} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\left\{v_y\right\}^T} \equiv \underset{8\times12}{\left[Q\right]^T}\underset{12\times1}{\left\{\sigma_y\right\}} - \underset{8\times1}{\left\{f_y\right\}} = 0, \quad (18)$$

где $\underset{12\times8}{\left[Q\right]} = \int_F \underset{12\times3}{\left[G\right]^T}\underset{3\times8}{\left[B\right]} dF$; $\underset{12\times12}{\left[H\right]} = \int_F \underset{12\times3}{\left[G\right]^T}\underset{3\times3}{\left[C\right]}\underset{3\times12}{\left[G\right]} dF$;

$\underset{8\times1}{\left\{f_y\right\}} = \int_l \underset{8\times2}{\left[A\right]^T}\underset{2\times1}{\left\{q\right\}} dl$.

Системы уравнений (18) представляются в традиционной для метода конечных элементов форме:

$$\underset{20\times20}{\left[K_2\right]}\underset{20\times1}{\left\{Z_y\right\}} = \underset{20\times1}{\left\{F_y\right\}}, \quad (19)$$

где $\underset{20\times20}{\left[K_2\right]} = \begin{bmatrix} -\underset{12\times12}{\left[H\right]} & \underset{12\times8}{\left[Q\right]} \\ \underset{8\times12}{\left[Q\right]^T} & \underset{8\times8}{\left[0\right]} \end{bmatrix}$ − матрица деформирования конечного элемента; $\underset{1\times20}{\left\{F_y\right\}^T} = \left\{\underset{1\times12}{\left\{0\right\}^T}, \underset{1\times8}{\left\{f_y\right\}^T}\right\}$ − вектор узловых усилий конечного элемента; $\underset{1\times20}{\left\{Z_y\right\}^T} = \left\{\underset{1\times12}{\left\{\sigma_y\right\}^T}, \underset{1\times8}{\left\{S_y\right\}^T}\right\}$ − вектор узловых неизвестных конечного элемента.

3. Результаты исследований и их анализ

Пример. Рассматривалась консольная балка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой, при следующих исходных данных: длина $L = 0{,}5$ *м*, высота поперечного сечения $h = 0{,}05$ *м*, ширина $t = 0{,}01$ *м*, модуль упругости материала $E = 2{,}0\times10^5$ *МПа*, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$, интенсивность давления $q = 10{,}0$ *кН/м²*.

Результаты вычислительного процесса показаны в табл. 1 (на основе функционала, базирующегося на разности действительных работ внешних и внутренних сил) и 2 (на основе смешанного функционала), где приведены значения нормальных напряжений в крайних волокнах поперечного сечения заделки (так называемая точка *a*) и сечения, расположенного на расстоянии 5 см от заделки (так называемая точка *b*), в зависимости от числа конечных элементов при дискретизации консольной балки. В последних колонках таблиц представлены перемещения на свободном конце балки (так называемая точка *c*) в зависимости от числа конечных элементов.

Количество конечных элементов по толщине балки принимались равными 1, 2, 3, 4 и 5. По длине балки число конечных элементов в каждом случае было равным 10, 20, 30, 50 и 100.

Таблица 1

Численные значения параметров напряженно-деформированного состояния при использовании элементов в формулировке метода перемещений
[*Table 1.* Numerical values of stress-strain state parameters when using elements in the formulation of the displacement method]

Дискретизация [Sampling]	Элемент [Element] 24×24		
	Напряжение σ_{xx}, кПа (точка *a*) [Stress σ_{xx}, kPa (point *a*)]	Напряжение σ_{xx}, кПа (точка *b*) [Stress σ_{xx}, kPa (point *b*)]	Перемещение *w*, см (точка *c*) [Displacement *w*, cm (point *c*)]
10×1	2330	2013	0,377
20×1	2454	2019	0,378
30×1	2478	2023	0,378
50×1	2487	2024	0,378
100×1	2490	2024	0,378
10×2	2735	2248	0,376
20×2	2802	2282	0,377
30×2	2815	2290	0,377
50×2	2821	2294	0,377
100×2	2823	2295	0,378
10×3	2805	2278	0,376
20×3	2886	2319	0,377
30×3	2904	2327	0,378
50×3	2913	2331	0,378
100×3	2914	2332	0,378
10×4	2839	2293	0,376
20×4	2935	2340	0,377
30×4	2957	2350	0,378
50×4	2969	2355	0,378
100×4	2973	2357	0,378

Таблица 2

Численные значения параметров напряженно-деформированного состояния при использовании элементов в смешанной формулировке
[*Table 2.* The numerical values of the parameters of the stress-strain state when using elements in a mixed formulation]

Дискретизация [Sampling]	Элемент [Element] 20×20		
	Напряжение σ_{xx}, кПа (точка *a*) [Stress σ_{xx}, kPa (point *a*)]	Напряжение σ_{xx}, кПа (точка *b*) [Stress σ_{xx}, kPa (point *b*)]	Перемещение *w*, см (точка *c*) [Displacement *w*, cm (point *c*)]
10×1	2820	2554	0,377
20×1	2952	2395	0,377
30×1	2978	2444	0,378
50×1	2992	2435	0,378
100×1	2998	**2428**	0,378
10×2	2836	2554	0,377
20×2	2955	2395	0,377
30×2	2978	2444	0,378
50×2	2989	2435	0,378
100×2	2994	**2428**	0,378
10×3	2863	2562	0,376
20×3	3007	2386	0,377
30×3	3045	2445	0,378
50×3	3070	2434	0,378
100×3	3082	**2426**	0,378
10×4	2862	2561	0,377
20×4	3009	2384	0,378
30×4	3050	2445	0,378
50×4	3080	2434	0,378
100×4	3096	**2426**	0,378

Анализ результатов показывает, что сходимость вычислительного процесса при использовании конечного элемента в смешанной формулировке происходит значительно быстрее. Для сравнения принимались приближенные результата расчета балки по технической теории (с учетом гипотезы прямой нормали): $\sigma_{xx} = 3000$ кПа (точка *a*), $\sigma_{xx} = 2430$ кПа (точка *b*), $w = 0{,}375$ см (точка *c*).

В точке *b*, отстоящей на расстоянии *h* от заделки, сходимость вычислительного процесса по нормальным напряжениям σ_{xx} (в табл. 2 отмечены жирным шрифтом) гораздо лучше в варианте расчета смешанным методом конечных элементов.

В точке *a* на сходимость вычислительного процесса воздействуют граничные условия в виде линейных связей. Поэтому сравнение методов по численным значениям нормальных напряжений целесообразнее выполнять в точке, находящейся на расстоянии *h* от заделки.

При каждой дискретизации балки конечными элементами перемещения оказались практически одинаковыми в обеих формулировках метода конечных элементов.

Заключение

Для конечного элемента в формулировке метода перемещений выполняются условия совместности по перемещениям и их производным только в узловых точках, на контурах смежных конечных элементов такие условия отсутствуют. В конечном элементе в варианте смешанной формулировки условия совместности по напряжениям выполняются не только в узловых точках, но и на контурах элемента. Поэтому сходимость вычислительного процесса при вычислении параметров напряженного состояния существенно лучше.

Список литературы

1. *Галимов К.З., Паймушин В.Н.* Теория оболочек сложной геометрии. Казань: Изд-во Казанского университета, 1985. 164 с.

2. *Петров В.В.* Нелинейная инкреметальная строительная механика. Вологда: Инфра-Инженерия, 2014. 479 с.

3. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов / под ред. Л.И. Турчака. М.: Физматлит, 2010. 1024 с.

4. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

5. *Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З.* Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента // Известия ВолгГТУ. 2010. Т. 4. № 4. С. 125–128.

6. *Каюмов Р.А.* К решению задач неоднородной теории упругости методом конечных элементов // Труды Второй Всероссийской научной конференции (1–3 июня 2005 г.). Ч. 1. Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. Самара: СамГТУ, 2005. С. 143–145. (Серия «Математическое моделирование и краевые задачи»).

7. *Киселев А.П., Киселева Р.З., Николаев А.П.* Учет смещения как жесткого целого осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 59–64.

8. *Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р.* Конечно-элементный анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 5. С. 48–56.

9. *Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю.* Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 459–466.

10. *Гуреева Н.А., Арьков Д.П.* Решение плоской задачи теории пластичности на основе МКЭ в смешанной формулировке // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 4. С. 32–36.

11. *Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D.* A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2015. Vol. 295. Pp. 327–346.

12. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A.* Stress-strain analysis of a thin-shell part of fuselage using a triangular finite element with Lagrange multipliers // Russian Aeronautics. 2016. Vol. 59. No. 3. Pp. 316–323.

13. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V.* Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. Vol. 45. No. 1. Pp. 51–58.

14. *Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M.* An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018. Vol. 113. Issue 4. Pp. 634–655.

15. *Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П.* Расчет осесимметрично нагруженной оболочки вращения с учетом геометрической нелинейности на основе смешанного МКЭ // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 4. С. 14–19.

16. *Бандурин Н.Г., Гуреева Н.А.* Определение плоского напряженного состояния оболочек на основе смешанной формулировки метода конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Космонавтика и ракетостроение. 2013. Т. 1. № 70. С. 69–75.

17. *Игнатьев В.А., Игнатьев А.В.* Решение плоской задачи теории упругости по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2013. Вып. 31–2 (50). С. 337–343.

RESEARCH PAPER

Comparative analysis of finite element formulations at plane loading of an elastic body

Natalia A. Gureeva[1], Anatoly P. Nikolaev[2], Vladislav N. Yushkin[2]*

[1]Financial University under the Government of the Russian Federation, *49 Leningradsky Ave, GSP-3, Moscow, 125993, Russian Federation*
[2]Volgograd State Agrarian University, *26 Universitetskii Ave, Volgograd, 400002, Russian Federation*
*aup-volgau@yandex.ru

Article history:
Received: December 13, 2019
Revised: February 12, 2020
Accepted: February 25, 2020

Acknowledgements:
The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as part of the research project No. 19-41-340004 p_a.

For citation
Gureeva N.A., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Comparative analysis of finite element formulations at plane loading of an elastic body. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2020;16(2):139–145. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145. (In Russ.)

Abstract

The aim of the work – comparison of the results of determining the parameters of the stress-strain state of plane-loaded elastic bodies based on the finite element method in the formulation of the displacement method and in the mixed formulation. ***Methods.*** Algorithms of the finite element method in various formulations have been developed and applied. ***Results.*** In the Cartesian coordinate system, to determine the stress-strain state of an elastic body under plane loading, a finite element of a quadrangular shape is used in two formulations: in the formulation of the method of displacements with nodal unknowns in the form of displacements and their derivatives, and in a mixed formulation with nodal unknowns in the form of displacements and stresses. The approximation of displacements through the nodal unknowns when obtaining the stiffness matrix of the finite element was carried out using the form function, whose elements were adopted Hermite polynomials of the third degree. Upon receipt of the deformation matrix, the displacements and stresses of the internal points of the finite element were approximated through nodal unknowns using bilinear functions. The stiffness matrix of the quadrangular finite element in the formulation of the displacement method is obtained on the basis of a functional based on the difference between the actual workings of external and internal forces under loading of a solid. The matrix of deformation of the finite element was formed on the basis of a mixed functional obtained from the proposed functional by replacing the actual work of internal forces with the difference between the total and additional work of internal forces when loading the body. The calculation example shows a significant advantage of using a finite element in a mixed formulation.

Keywords: stiffness matrix, deformation matrix, quadrangular finite element, mixed functional

Natalia A. Gureeva, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Data Analysis, Decision Making and Financial Technologies; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3496-2008, eLIBRARY SPIN-code: 8393-5900.
Anatoly P. Nikolaev, Doctor Of Technical Sciences, Professor, Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7098-5998, eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484.
Vladislav N. Yushkin, Candidate Of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3965-4397, eLIBRARY SPIN-code: 4833-4701.

References

1. Galimov K.Z., Paimushin V.N. *Teoriya obolochek slozhnoj geometrii* [*The theory of shells of complex geometry*]. Kazan, Kazan University Publ.; 1985. (In Russ.)

2. Petrov V.V. *Nelinejnaya inkremetal'naya stroitel'naya mekhanika* [*Nonlinear incremental structural mechanics*]. Vologda, Infra-Inzheneriya Publ.; 2014. (In Russ.)

3. Bate K.-U. *Metody konechnyh elementov* [*Finite Element Methods*]. Moscow, Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.)

4. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnyh elementov v statike i dinamike tonkostennyh konstrukcij* [*Finite element method in the statics and dynamics of thin-walled structures*]. Moscow, Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)

5. Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z. Raschet mnogoslojnoj obolochki s ispol'zovaniem ob"emnogo konechnogo elementa [Calculation of a multilayer shell using a volumetric finite element]. *Izvestia VSTU* [*Bulletin of the Volgograd State Technical University*]. 2010;4(4):125–128. (In Russ.)

6. Kayumov R.A. K resheniyu zadach neodnorodnoi teorii uprugosti metodom konechnykh elementov [To the solution of problems of the heterogeneous theory of elasticity by the finite element method]. *Trudy Vtoroi Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii (1–3 iyunya 2005 g.). Ch. 1. Matematicheskie modeli mekhaniki, prochnost' i nadezhnost' konstruktsii* [*Proceedings of the Second All-Russian Scientific Conference (1–3 June 2005). Part 1. Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structures*]. Samara, SamGTU Publ.; 2005. p. 143–145. (In Russ.)

7. Kiselev A.P., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P. Account of the shift as rigid body of shell of revolution axially symmetric loaded on the base of FEM. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2014;(6):59–64. (In Russ.)

8. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ischanov T.R. Finite element analysis of stress-strain state of shells of revolution with taking into account the strain of transversal shearing. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2016;(5):48–56. (In Russ.)

9. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2018;14(6): 459–466. (In Russ.)

10. Gureeva N.A., Arkov D.P. Flat problem of theory of jump in base method of final elements in mixed understanding in account physical nonlinearity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2010;(4): 32–36. (In Russ.)

11. Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Computer methods in applied mechanics and engineering.* 2015;(295):327–346.

12. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Stress-strain analysis of a thin-shell part of fuselage using a triangular finite element with Lagrange multipliers. *Russian Aeronautics*. 2016;59(3):316–323.

13. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45(1):51–58.

14. Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 2018;113(4):634–655.

15. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Analysis of a shell of revolution subjected to axisymmetric loading taking into account geometric nonlinearity on the basis of the mixed finite element method. *Russian Aeronautics.* 2014;57(3):232–239.

16. Bandurin N.G., Gureeva N.A. Determination of plain stress condition of shells applying mixed formulation of finite-element method in terms of geometrical nonlinearity. *Cosmonautics and rocket engineering*. 2013;(1):69–75. (In Russ.)

17. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Plane problem solution of elasticity theory by the finite element method in the form of classical mixed method. *Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture.* 2013;31–2(50):337–343. (In Russ.)