

ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138
УДК 514.8:539.3:72.01

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Аналитические линейчатые поверхности и их полная классификация

С.Н. Кривошапко

Российский университет дружбы народов, *Российская Федерация*, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
krivoshapko-sn@rudn.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 22 ноября 2019 г.

Доработана: 12 января 2020 г.

Принята к публикации: 7 февраля 2020 г.

Аннотация

Цель работы – предоставить материал, способный расширить кругозор проектировщиков и архитекторов, проектирующих объекты в форме традиционных и неканонических линейчатых поверхностей. Эти поверхности имеют ряд неоспоримых преимуществ с точки зрения их формообразования, конструирования и изготовления изделий и сооружений в форме линейчатых поверхностей и методов расчета. **Методы.** При подборе линейчатых поверхностей для классификации используются способы их задания в векторной, параметрической, явной и неявной формах, предлагаемых в дифференциальной геометрии. Рассматриваются только аналитические линейчатые поверхности, которые уже описаны и представлены в научно-технической литературе. **Результаты.** Представлены в графической форме все известные на настоящее время линейчатые поверхности. Даны определения некоторых малоизвестных линейчатых поверхностей, а в списке литературы указаны источники, в которых эти поверхности исследуются, рассматриваются вопросы их применения в реальных сооружениях или изделиях, дается методика определения напряженно-деформируемого состояния оболочек с соответствующими срединными поверхностями.

Ключевые слова: аналитическая поверхность, косая линейчатая поверхность, развертывающаяся поверхность, классификация поверхностей, дифференциальная геометрия

Для цитирования

Кривошапко С.Н. Аналитические линейчатые поверхности и их полная классификация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 131–138. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138>

Введение

Поверхность называется линейчатой, если через каждую точку этой поверхности можно провести хотя бы одну прямую и эта прямая имеет с поверхностью общий отрезок. Самую полную информацию об аналитических линейчатых поверхностях можно получить из энциклопедии [1], где они выделены в отдельный класс. Линейчатые поверхности имеются практически в каждом из 38 классов

аналитических поверхностей нулевой ($K = 0$) и отрицательной ($K < 0$) гауссовых кривизн. Например, прямой геликоид можно одновременно включить в класс линейчатых поверхностей и минимальных поверхностей, однополостный гиперболоид вращения входит также в класс поверхностей вращения, цилиндрическую поверхность можно считать поверхностью прямого переноса, односторонняя линейчатая поверхность (лист Мебиуса) входит и в класс односторонних поверхностей и т. д.

В энциклопедии [1] все аналитические поверхности разделены на 38 классов. Естественно, линейчатых поверхностей нет среди поверхностей положительной ($K > 0$) гауссовой кривизны. Их нет также среди поверхностей Веронезе, Безье, Кунса и среди афинно-минимальных поверхностей.

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор департамента строительства Инженерной академии; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9385-3699>, eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966.

© Кривошапко С.Н., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Некоторые геометры считают, что все многообразие линейчатых поверхностей можно охарактеризовать, сгруппировав их в три группы: линейчатые поверхности с тремя, двумя и одной направляющими. Другие предлагают все поверхности разделить только на два класса: линейчатые и нелинейчатые поверхности.

Известны работы [2–4], где дается общая классификация известных аналитических поверхностей в графической форме, куда входят и линейчатые поверхности. Но эти классификации не полны, так как не дают всеобъемлющей информации о линейчатых поверхностях и содержат сведения только о поверхностях, нашедших применение в архитектуре, строительстве и машиностроении.

Более полные классификации только аналитических линейчатых поверхностей в графической форме приведены в работах [5–7], но их тоже нельзя назвать полными, так как здесь классифицируются подклассы или группы линейчатых поверхностей.

Как показали последние геометрические исследования, многообразие аналитических поверхностей, в том числе и линейчатых, и способов их образования увеличивается, поэтому создать строгую и полную классификацию поверхностей не представляется возможным.

1. Цель исследования

Линейчатые поверхности благодаря множеству способов их конструирования, простоте изготовления изделий и сооружений в форме этих поверхностей, способности линейчатых поверхностей нулевой гауссовой кривизны разворачиваться на плоскость без разрывов и складок пользуются большой популярностью среди архитекторов [8; 9] и машиностроителей [10]. Особенно часто можно видеть изделия и сооружения в форме конусов [11], цилиндров, гипаров, однополостных гиперboloидов вращения [12], коноидов [13].

Значительно реже применяются невырожденные торсовые поверхности, несмотря на их ярко выраженные преимущества [5; 9; 14]. Зная это, исследователи-механики разрабатывают новые методы их статического и динамического расчета в криволинейных неортогональных координатах [14] или предлагают к применению торсовые оболочки, заданные в линиях кривизн [15].

Приведенные в статье сведения и представленный вариант полной классификации линейчатых поверхностей расширит кругозор архитекторов-строителей и машиностроителей и может привлечь их внимание к редко используемым линейчатым поверхностям. Исследователи-механики могут выбрать темы для дальнейших изысканий в области стати-

ческого и динамического расчета оболочек с линейчатыми срединными поверхностями.

2. Метод исследования

Приведем краткие сведения из дифференциальной геометрии линейчатых поверхностей.

При изучении аналитических линейчатых поверхностей считают, что векторное уравнение линейчатой поверхности можно представить в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(v) + u\mathbf{b}(v),$$

где $\mathbf{a}(v)$ – радиус-вектор направляющей кривой; $\mathbf{b}(v)$ – направляющий вектор прямолинейной образующей.

Линейчатые поверхности, за исключением плоскости и прямого геликоида, не могут иметь постоянную среднюю кривизну. Прямолинейные образующие являются асимптотическими линиями.

Невырожденные торсовые поверхности образуются касательными к своему ребру возврата, то есть это – линейчатые поверхности с одной направляющей. Поверхность касательных называют касательным торсом. Любую пространственную кривую можно принять за ребро возврата, касательные к которому будут образовывать торсовую поверхность. Торсовую поверхность, если известно уравнение ребра возврата, удобно задавать в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(v) + u\mathbf{l}(v),$$

где $\mathbf{a}(v)$ – текущий радиус-вектор ребра возврата, $\mathbf{l}(v)$ – единичный касательный вектор, заданный в каждой точке ребра возврата; координатные линии u совпадают с прямолинейными образующими.

У конуса ребро возврата вырождается в точку – вершину конуса, а у цилиндрической поверхности эта точка удаляется на бесконечность.

Уравнение торса можно получить, не определяя предварительно уравнений ребра возврата. Если задана пара направляющих кривых $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u)$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(v)$ относительно общего полюса O , то, вычислив зависимость $v = v(u)$, уравнение торса можно представить в виде

$$\mathbf{r}(u, \lambda) = \mathbf{r}_1(u) + \lambda[\mathbf{r}_2(v) - \mathbf{r}_1(u)] = \mathbf{r}_1(u) + \lambda\mathbf{m}(u),$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$, причем угол между координатными линиями u , λ не зависит от параметра λ .

Поверхности одинакового ската – это линейчатые поверхности, имеющие постоянный угол между своими прямолинейными образующими и соответствующими главными нормальными плоской направляющей кривой.

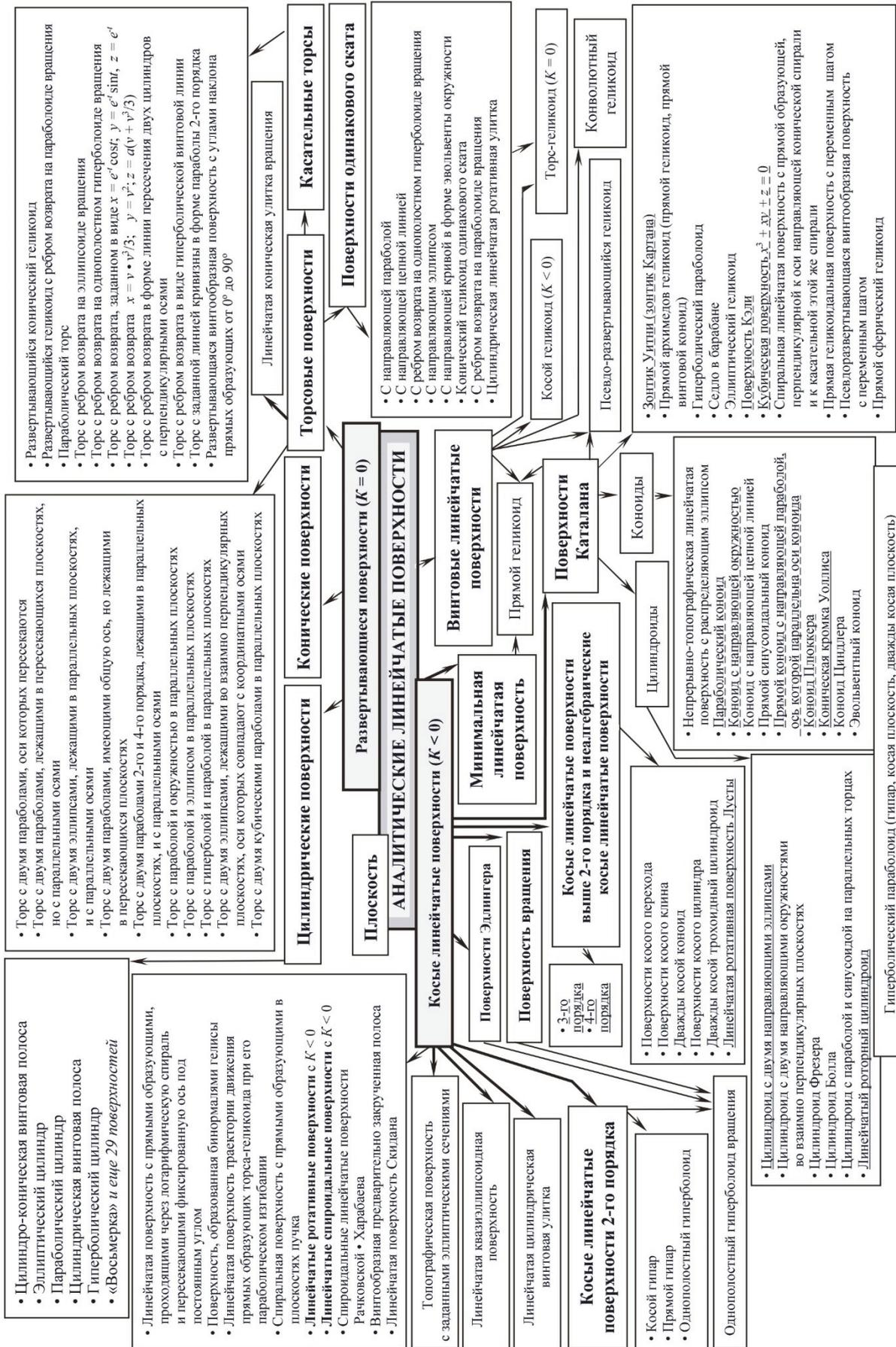


Рис. 1. Классификация аналитических линейчатых поверхностей

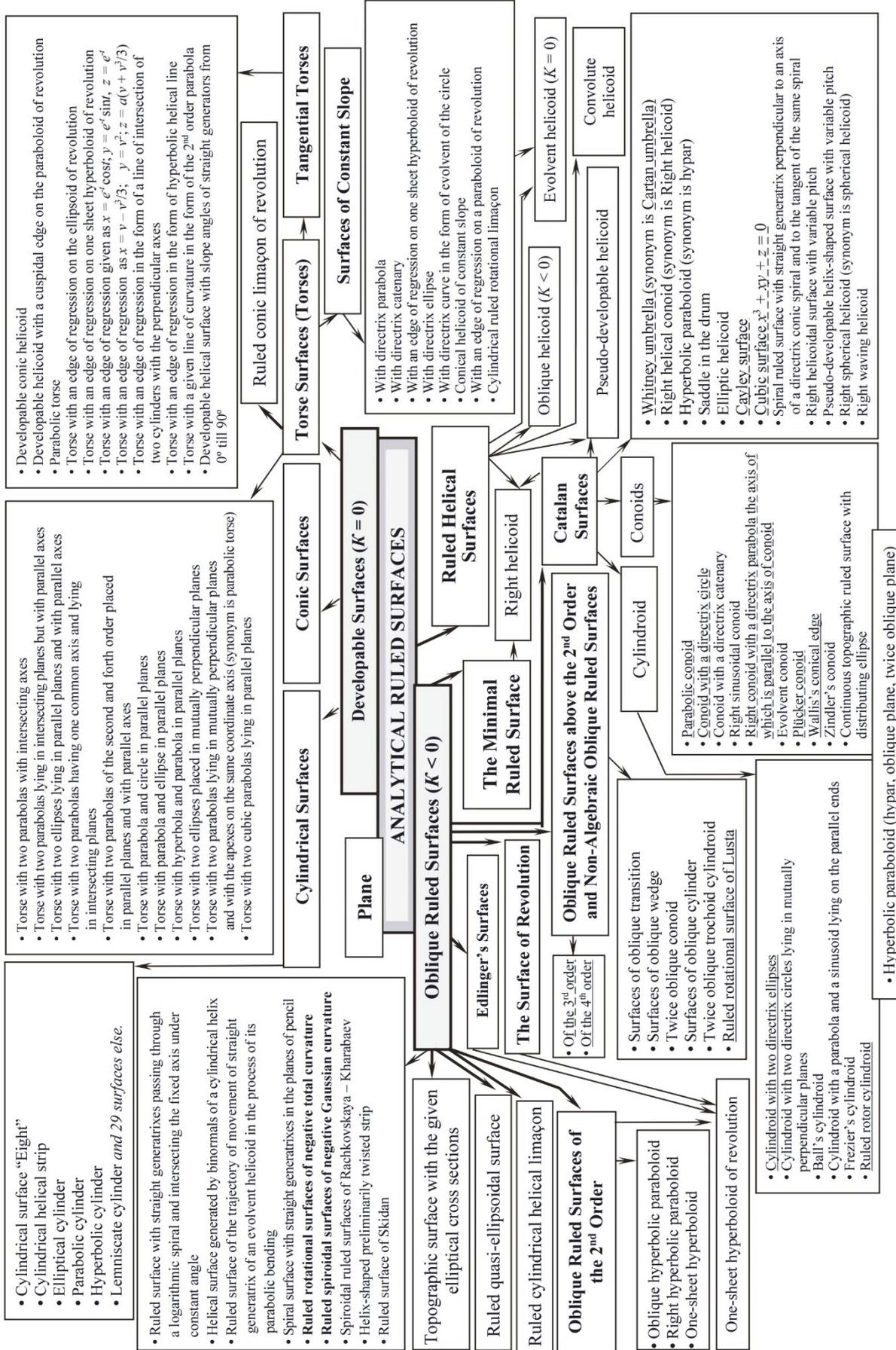


Figure 1. Classification of analytical ruled surfaces

Линейчатые поверхности отрицательной гауссовой кривизны называют также косыми линейчатыми поверхностями, или линейчатыми седловыми поверхностями, или неразвертываемыми линейчатыми поверхностями.

Приведем определения некоторых косых линейчатых поверхностей, которые можно увидеть в очертаниях промышленных изделий. Определения взяты из энциклопедии [1]. «Поверхность косоугольного перехода – это линейчатая поверхность с тремя направляющими, из которых две – дуги окружностей одинакового радиуса, лежащих в параллельных плоскостях, а третья – прямая линия, перпендикулярная плоскостям окружностей и проходящая через середину отрезка прямой, соединяющего центры этих дуг окружностей. Поверхность косоугольного перехода применяется в архитектуре и строительстве. Поверхность косоугольного клина образовывается движением прямолинейной образующей по трем направляющим, расположенным в параллельных плоскостях, причем две криволинейные направляющие – гладкие кривые, а третья – прямая линия. Эта поверхность используется при создании крыла летательного аппарата. Поверхность дважды косоугольного коноида содержит три направляющие, из которых одна направляющая – кривая линия, а две другие – прямые. Поверхность косоугольного цилиндра образовывается движением прямолинейной образующей по трем криволинейным направляющим. Дважды косоугольный цилиндр – линейчатая поверхность, образованная при трех направляющих, из которых две – кривые, а третья – прямая линия».

3. Результаты

На рис. 1 представлены в графической форме все известные на настоящее время линейчатые поверхности. В тексте статьи даны определения некоторых малоизвестных линейчатых поверхностей, а в списке литературы указаны источники, в которых эти поверхности исследуются, рассматриваются вопросы их применения в реальных сооружениях или изделиях, дается методика определения напряженно-деформируемого состояния оболочек с соответствующими срединными поверхностями.

Согласно энциклопедии [1] в научно-технической литературе встречаются описания 34 цилиндрических поверхностей. В некоторых работах цилиндрические поверхности разделяют на цилиндрические поверхности с пространственной направляющей кривой и с плоской направляющей кривой. Последние делят на прямые и наклонные цилиндрические поверхности. Цилиндрические поверхности по-прежнему широко используются на практике [5; 16].

Учитывая, что конические поверхности хорошо известны, конкретные конические поверхности в общую спецификацию также не включены. Например, в энциклопедии [1] перечислены и даны уравнения 20 конических поверхностей. Для сведения приведем отдельную классификацию конических поверхностей, в которой отмечены общепринятые названия конических поверхностей (рис. 2). За образец взята схема, приведенная в работе [5].



Рис. 2. Классификация конических поверхностей

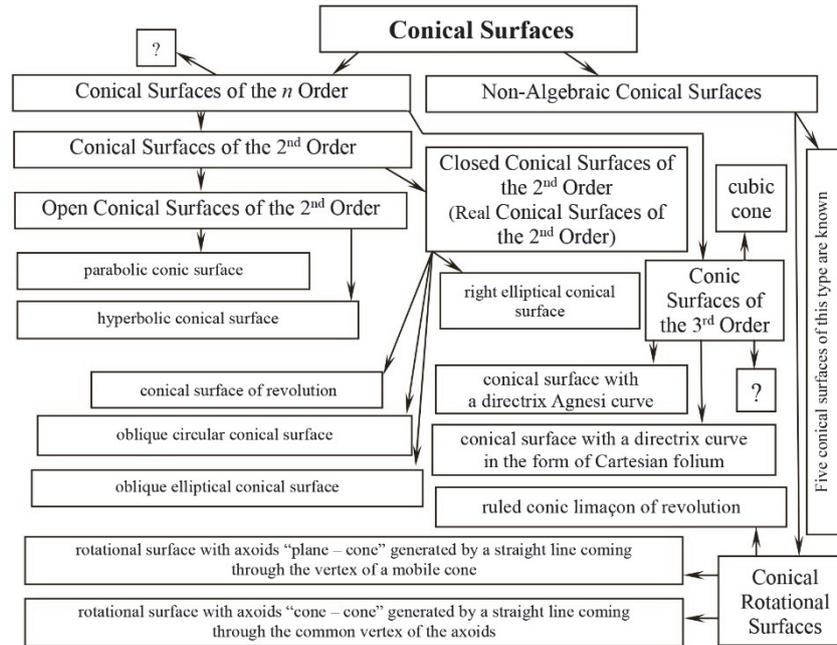


Figure 2. Classification of analytical conic surfaces

Краткую информацию о существующих методах расчета на устойчивость конических оболочек можно получить из работы [17]. Интересные результаты получены для цилиндрических и конических оболочек различной толщины при помощи программы ABACUS в статье [18].

Заключение

В некоторых работах, например [2; 5; 8; 11; 13; 19], предпринимались попытки выяснить наиболее популярные среди архитекторов аналитические поверхности, которые использовались для проектирования форм общественных, жилых и промышленных зданий. Особенно популярно использование аналитических поверхностей в параметрической архитектуре. Параметрическая архитектура – новый стиль в архитектуре, основанный на аналитических методах задания поверхностей, математическом и компьютерном моделировании. Этот стиль сформировался в начале XXI века. Самыми известными архитекторами, работавшими в этом стиле, считаются Заха Хадид и Патрик Шумахер. По-видимому, это связано с увеличивающимся интересом к проектированию объектов нетрадиционных некубических форм. Впервые это явление в архитектуре было отмечено в статье [20]. Н.В. Касьянов [21] подтверждает, что данная тенденция развивается и сегодня.

Нетрадиционные аналитические линейчатые поверхности могут найти широкое применение в прак-

тике проектирования строительных и машиностроительных объектов, поэтому составление их полной классификации расширит кругозор проектировщиков и даст импульс к наращению их применения.

При составлении классификации и в тексте статьи автор старался использовать все встречающиеся аналоги названий конкретных аналитических линейчатых поверхностей. Это вызвано тем, что геометры, архитекторы и машиностроители часто одну и ту же поверхность называют по-разному. Например, резную линейчатую поверхность Монжа с круговой цилиндрической направляющей поверхностью в некоторых работах называют цилиндрической линейчатой ротативной улиткой, иногда она встречается под названием «фрагмент поверхности развертывающегося геликоида» (эвольвентного геликоида, торса-геликоида). Псевдоразвертывающийся геликоид и открытый прямой геликоид – два названия одной и той же линейчатой поверхности отрицательной гауссовой кривизны.

В полную классификацию не включены поверхности, в названии которых имеется слово «линейчатые», но они известны только математикам и встречаются в единичных публикациях. Например, это Swallow Surface, линейчатые поверхности Л.С. Понтрягина, Г. Браунера (H. Brauner), ортоидные линейчатые поверхности с постоянным параметром распределения, алгебраическая конгруэнция 4-го порядка 2-го класса Д. Палмана (D. Palman) [1], линейчатые поверхности Петерсона [22] и некоторые другие.

Список литературы

1. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010. 560 с.
2. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures // Строительство и реконструкция. 2019. № 5 (85). С. 23–34.
3. Гринько Е.А. Классификация аналитических поверхностей применительно к параметрической архитектуре и машиностроению // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2018. Т. 19. № 4. С. 438–456.
4. Мамиева И.А. О классификации аналитических поверхностей // Инженерные системы – 2011: тез. докл. международной научно-практической конференции. М.: РУДН, 2011. С. 63–65.
5. Mamieva I.A. Influence of the geometrical researches of ruled surfaces on design of unique structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 299–307.
6. Кривошапко С.Н. Классификация линейчатых поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2006. № 1. С. 10–20.
7. Белякова М.С. Повышение эффективности процессов конструкторско-технологического проектирования на основе разработки информационной системы моделирования поверхностей: автореферат дис. ... канд. техн. наук. М.: МГТУ Станкин, 2007.
8. Мамиева И.А., Разин А.Д. Параметрическая архитектура в Москве // Архитектура и строительство России. 2014. № 6. С. 24–29.
9. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Возможности применения торсов и торсовых оболочек в условиях Дагестана // Вестник Дагестанского государственного технического университета. 2011. № 3 (22). С. 118–127.
10. Кривошапко С.Н. Перспективы и преимущества торсовых поверхностей при моделировании машиностроительных и строительных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1(72). С. 20–30.
11. Мамиева И.А., Разин А.Д. Знаковые пространственные сооружения в форме конических поверхностей // Промышленное и гражданское строительство. 2017. № 10. С. 5–11.
12. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Стержневые системы в форме однополостного гиперboloида вращения // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2011. № 11. С. 19–23.
13. Кривошапко С.Н. Применение коноида и цилиндридоида при формообразовании зданий и сооружений оболочечного типа // Строительство и реконструкция. 2017. № 5 (73). С. 34–44.
14. Krivoshapko S.N. Static analysis of shells with developable middle surfaces // Applied Mechanics Reviews. 1998, December. Vol. 51. No. 12. Part 1. Pp. 731–746.
15. Алешина О.О. Исследования по геометрии и расчету торсовых оболочек одинакового ската // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 3. С. 63–70.
16. Lee Y.S. Review on the cylindrical shell research // Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers, A. 2009. Vol. 33. No. 1. Pp. 1–26.
17. Ifayefunmi O., Blachut J. Imperfection sensitivity: a review of buckling behavior of cones, cylinders, and domes // Journal of Pressure Vessel Technology. Transactions of the ASME. 2018. Vol. 140. No. 5. Pp. 050801. <https://doi.org/10.1115/1.4039695>
18. Shariyat M., Alipour M.M. Analytical bending and stress analysis of variable thickness FGM auxetic conical/cylindrical shells with general tractions // Lat. Am. J. Solids Struct. 2017, June. Vol. 14. No. 5. Pp. 805–843. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253413>
19. Гринько Е.А. Обзорные работы по геометрии, прочности, устойчивости, динамике и применению оболочек со срединными поверхностями различных классов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2012. № 2. С. 15–21.
20. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P. Special structures. Past, present, and future // Journal of Structural Engineering. 2002, June. Pp. 691–701.
21. Касьянов Н.В. К проблеме эволюции пространственных форм архитектуры в контексте научно-технологических достижений // Academia. Строительство и архитектура. 2019. № 3. С. 34–43.
22. Бланк Я.П., Загайный Н.А. Линейчатые поверхности Петерсона // Украинский геометрический сборник. Вып. 10. Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. С. 3–10.

ANALYTICAL REVIEW

Analytical ruled surfaces and their complete classification

Sergey N. Krivoshapko

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation
krivoshapko-sn@rudn.ru

Article history:

Received: November 22, 2019

Revised: January 12, 2020

Accepted: February 7, 2020

Abstract

The aim of the work – to give the possibility to expand mind of designers and architects projecting structures in the form of traditional and non-canonical ruled surfaces. These surfaces have several unquestionable advantages with a point of view of their forming, designing, and making of factory-made goods and erections in

Sergey N. Krivoshapko, DSc, Professor, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering; ORCID iD: 0000-0002-9385-3699, eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966.

For citation

Krivoshapko S.N. Analytical ruled surfaces and their complete classification. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):131–138. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138>. (In Russ.)

the form of ruled surfaces and analysis methods. **Methods.** Choosing ruled surfaces for classification, one can use methods of their determination by vector, parametrical, implicit, and in explicit equations. Only analytical ruled surfaces are considered which were examined and presented in scientific-and-technical literature. **Results.** All known at present time ruled surfaces are given in a graphic form. The determinations of some little known ruled surfaces are presented in a paper. The original sources, where these surfaces are examined or their application in real structures and erections are considered, or methods of determination of stress-strain state in thin-walled shells with ruled middle surfaces are presented, are given in references.

Keywords: analytical surface, oblique ruled surface, developable surface, classification of surfaces, differential geometry

References

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Switzerland, Springer International Publishing; 2015. DOI: 10.1007/978-3-319-11773-7.
2. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures. *Building and Reconstruction*, 2019;5(85):23–34.
3. Grinko E.A. Classification of analytical surfaces as applied to parametrical architecture and machine building. *RUDN Journal of Engineering Researches*, 2018;19(4):438–456. (In Russ.)
4. Mamieva I.A. On classification of analytical surfaces. Engineering System – 2011: Abstracts of Papers of International Scientific-and-Practical Conference. Moscow, RUDN Publ.; 2011. pp. 63–65. (In Russ.)
5. Mamieva I.A. Influence of the geometrical researches of ruled surfaces on design of unique structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):299–307.
6. Krivoshapko S.N. The classification of ruled surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2006;(1):10–20. (In Russ.)
7. Belyakova M.S. *Povyshenie effektivnosti prozessov konstruktorsko-tehnologicheskoy proektirovaniya na osnove razrabotki informazionnoy sistemy modelirovaniya poverkhnostey* [The increasing effectiveness of processes of design-and-technological planning on the basis of informative system of surface modelling] (abstract of the dissertation of the Candidate of Technical Sciences). Moscow, MGTU Stankin Publ.; 2007. (In Russ.)
8. Mamieva I.A., Razin A.D. Parametrical architecture in Moscow. *Architecture and Construction of Russia*. 2014;(6):25–29. (In Russ.)
9. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. The opportunities of applications of torse surfaces and developable shells in Dagestan. *Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2011;3(22):118–127. (In Russ.)
10. Krivoshapko S.N. Perspectives and advantages of tangential developable surfaces in modeling machine-building and building structures. *Bulletin of Civil Engineers*. 2019;1(72):20–30. DOI: 10.23968/1999-5571-2019-16-1-20-30. (In Russ.)
11. Mamieva I.A., Razin A.D. Landmark spatial structures in the form of conic surfaces. *Industrial and Civil Engineering*. 2017;(10):5–11. (In Russ.)
12. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. Rod systems in the form of one-sheet hyperboloid of revolution. *Montazhnye i spetsialnye raboty v stroitelstve*. 2011;(11):19–23. (In Russ.)
13. Krivoshapko S.N. The application of conoid and cylindroid in forming of buildings and structures of shell type. *Building and Reconstruction*. 2017;5(73):34–44. (In Russ.)
14. Krivoshapko S.N. Static analysis of shells with developable middle surfaces. *Applied Mechanics Reviews*. 1998;51(12, Part 1):731–746.
15. Aleshina O.O. Studies of geometry and calculation of torso shells of an equal slope. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2019;(3):63–70 (In Russ.)
16. Lee Y.S. Review on the cylindrical shell research. *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers*, A. 2009;33(1):1–26.
17. Ifayefunmi O., Błachut J. Imperfection sensitivity: a review of buckling behavior of cones, cylinders, and domes. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*. 2018;140(5):050801. <https://doi.org/10.1115/1.4039695>
18. Shariyat M., Alipour M.M. Analytical bending and stress analysis of variable thickness FGM auxetic conical/cylindrical shells with general tractions. *Lat. Am. J. Solids Struct*. 2017;14(5):805–843. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253413>
19. Grinko E.A. Survey works on geometry, durability, stability, dynamics, and application of environments with middle surfaces of various classes. *Montazhnye i spetsialnye raboty v stroitelstve*. 2012;(2):15–21. (In Russ.)
20. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P. Special structures. Past, present, and future. *Journal of Structural Engineering*. 2002:691–701.
21. Kasyanov N.V. To the problem of the evolution of architectural spatial forms in the context of scientific and technological achievements. *Academia. Architecture and Construction*. 2019;(3):34–43. <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2019-3-34-43>. (In Russ.)
22. Blank Ya.P., Zagayniy N.A. Linejchatye poverkhnosti Petersona [Ruled surfaces of Peterson]. *Ukrainskiy geometricheskij sbornik [Ukraine geometrical collection]*. 1971;(10):3–10. (In Russ.)