

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44  
УДК 624

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Геометрические характеристики деформированного состояния оболочек с ортогональной системой координат срединной поверхности

В.Н. Иванов\*, А.А. Шмелева

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
\*i.v.ivn@mail.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 12 марта 2019 г.  
Доработана: 22 октября 2019 г.  
Принята к публикации: 13 декабря 2019 г.

### Аннотация

Цель исследования заключается в выводе геометрических уравнений деформаций линейной теории оболочек в ортогональной несопряженной системе координат. В большинстве статей, учебных пособий и монографий по теории и методам расчета тонких оболочек рассматриваются оболочки, координатная система срединных поверхностей которых задается в линиях главных кривизн. Вывод геометрических уравнений деформированного состояния тонких оболочек в линиях кривизны подробно описан в монографиях по теории тонких оболочек В.В. Новожилова, К.Ф. Черных, А.П. Филин и других российских и зарубежных ученых. При выводе используются стандартные методы математического анализа, векторного анализа и дифференциальной геометрии. Для вывода уравнений деформаций в произвольной неортогональной системе координат срединной поверхности тонких оболочек используется метод тензорного анализа. На основе этих уравнений как частный случай приводятся уравнения деформаций оболочек в ортогональной несопряженной системе координат (не в линиях кривизны) срединной поверхности оболочки. В статье представлен вывод геометрических уравнений деформаций тонких оболочек в ортогональной несопряженной системе координат на основе дифференциальной геометрии поверхностей и векторного анализа (без использования методов тензорного анализа). При проведении преобразований применялись векторно-матричные формы уравнений. Такой подход может использоваться в учебных пособиях, так как в большинстве технических вузов основы тензорного анализа не даются.

**Ключевые слова:** теория тонких оболочек; геометрические уравнения; деформации; векторный анализ

### Для цитирования

Иванов В.Н., Шмелева А.А. Геометрические характеристики деформированного состояния оболочек с ортогональной системой координат срединной поверхности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 38–44. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44>

### Введение

По теории и методам расчета тонких оболочек имеется обширная литература, начиная с классических трудов Г. Арона [1] и А. Лява [2]. Большой вклад в развитие теории и методов расчета внесли Российские ученые В.З. Власов, В.В. Но-

вожилов, К.Ф. Черных, А.Л. Гольденвейзер [3–8] и др.

Аналитические методы расчета тонких оболочек разработаны в основном для оболочек канонических форм: оболочек вращения, цилиндрических и конических оболочек, пологих оболочек, некоторых видов торсовых оболочек. Для оболочек неканонических (сложных) форм приходится использовать численно-аналитические, а чаще всего численные методы.

Наиболее используемым методом расчета пространственных конструкций в последнее время стал метод конечных элементов (МКЭ) [9–11]. На базе этого метода разработаны программные комплексы. В большинстве программных комплексов МКЭ

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента архитектуры и строительства Инженерной академии; ORCID iD: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, AuthorID: 634311.

Шмелева Алиса Алексеевна, аспирант департамента строительства Инженерной академии.

© Иванов В.Н., Шмелева А.А., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

геометрия оболочки заменяется системой плоских элементов с узлами на поверхности оболочки, в расчетах не используются геометрические характеристики срединных поверхностей оболочки. Для оболочек сложной формы это может приводить к потере точности расчета НДС конструкции. Альтернативу МКЭ может составить вариационно-разностный метод (ВРМ) [11–13]. Оба метода (МКЭ и ВРМ) основаны на вариационном принципе минимума полной энергии деформаций конструкции в перемещениях [14–16].

В вариационно-разностном методе производные в функционале энергии деформаций заменяются разностными производными с использованием геометрических характеристик (коэффициентов квадратичных форм). Для вычисления геометрических характеристик в программный комплекс включается библиотека кривых и поверхностей, на основе которых формируются срединные поверхности оболочек и вычисляются необходимые геометрические характеристики.

В настоящее время на кафедре сопротивления материалов и расчета на прочность департамента строительства Инженерной академии РУДН разработан программный комплекс ВРМ на базе поверхностей с координатной системой в линиях главных кривизн, и комплекс дорабатывается для расчета оболочек с ортогональной несопряженной системой поверхностных координат.

### 1. Методика

Рассмотрим оболочки, срединная поверхность которых описывается ортогональной поверхностной системой координат, не являющихся в общем случае линиями кривизны (рис. 1).

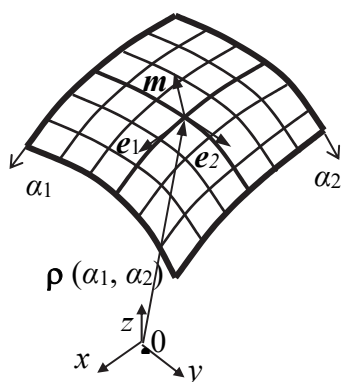


Рис. 1. Ортогональная система [Figure 1. Normal coordinate]

К данному классу поверхностей относятся, в частности, нормальные циклические поверхности – поверхности, образуемые движением окруж-

ности переменного радиуса в нормальной плоскости направляющей кривой (линии центров образующих окружностей) [13; 16–18]. Известно, что все поверхности имеют систему координат – главных линий кривизны. Однако получить уравнение поверхности в линиях кривизны не всегда удается. Для нормальных циклических поверхностей это приведет к более сложным уравнениям и формулам геометрических характеристик поверхности, так как вместо окружностей системой координатных линий будут пространственные кривые.

Единичные векторы касательных координатной сетки поверхности  $e_1, e_2$  определяются формулой  $e_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i}$ ; единичный вектор нормали к

поверхности  $m = e_3 = e_1 \times e_2$ . Здесь  $A_i = \left| \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \right|$  – коэффициенты 1-й квадратичной формы поверхности;

$\rho(\alpha_1, \alpha_2)$  – радиус-вектор поверхности.

Для системы единичных взаимно ортогональных векторов имеем  $(e_i e_i) = 1$ ;  $(e_i e_j) = 0$ , и, следовательно, дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i e_j}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_k} e_j + \frac{\partial e_j}{\partial \alpha_k} e_i = 0; \\ \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_k} e_j &= -\frac{\partial e_j}{\partial \alpha_k} e_i; \quad \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_k} e_i = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2.$

Так как порядок дифференцирования для смешанных производных по координатам  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ) не должен влиять на результат, то получаем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_j} \right)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (A_i e_i) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_j e_j),$$

откуда

$$\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} e_i + A_i \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} e_j + A_j \frac{\partial e_j}{\partial \alpha_i}.$$

Умножая полученное равенство скалярно на  $e_j$ ,  $e_i$  с учетом соотношений (1), имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_j} e_j \right) &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}; \\ \left( \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_i} e_j \right) &= -\left( \frac{\partial e_j}{\partial \alpha_i} e_i \right) = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $i, j = 1, 2$ . Вторая формула (2) получена с учетом формул (1) при  $k = i$ .

Далее получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha_j} \mathbf{e}_3 \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha_i} \right) \mathbf{e}_3 = \\ &= \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i} \mathbf{e}_3 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{1}{A_i} \right) A_i (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_3) = k_{ij} A_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $k_{ij} = \frac{1}{A_i A_j} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i} \mathbf{e}_3 \right)$  – кривизны и кручение координатных линий на поверхности;  $\left( \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i} \mathbf{e}_3 \right) = b_{ij}$  – коэффициенты 2-й квадратичной формы поверхности. Эти обозначения соответствуют:  $b_{11} = L$ ,  $b_{12} = M$ ;  $b_{22} = N$ ;  $k_{11} = L / A_1^2 = k_1$ ;  $k_{22} = N / A_2^2 = k_2$ ,  $k_{12} = M / AB$ .

Коэффициенты квадратичных форм отвечают условиям Гаусса – Кодаци [10]:

$$\begin{aligned} k_i \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial k_j A_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (k_{12} A_i^2), \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \right) &= A_i A_j (k_i k_j + k_{12}^2), \end{aligned} \quad (4)$$

$i, j = 1, 2, i \neq j$ .

Для общей ортогональной системы координат  $k_{12} \neq 0$  кривизны координатных линий  $k_1, k_2$  не являются главными кривизнами поверхности. Для поверхности в линиях кривизны  $k_{12} = 0$ .

Обозначим:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha_j} \mathbf{e}_j \right) &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} = p_i; \\ \left( \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_j \right) &= - \left( \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_i \right) = -p_j; \\ \left( \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_1} \mathbf{m} \right) &= - \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_1} \mathbf{e}_1 \right) = k_1 A_1 = q_1; \\ \left( \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_2} \mathbf{m} \right) &= - \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_2} \mathbf{e}_1 \right) = k_{12} A_2 = t_1; \\ \left( \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1} \mathbf{m} \right) &= - \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_1} \mathbf{e}_2 \right) = k_{12} A_1 = t_2; \\ \left( \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_2} \mathbf{m} \right) &= - \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_2} \mathbf{e}_2 \right) = k_2 A_2 = q_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, введены обозначения

$$p_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}; \quad q_i = k_i A_i; \quad t_i = k_{12} A_j; \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \quad (6)$$

Введем вектор орт поверхностной системы координат  $\{\mathbf{e}\}^* = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ; \* – транспонирование вектора (матрицы).

С учетом формул (1), (2), (5), (6), получим векторно-матричную формулу дифференцирования орт поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\mathbf{e}\}^*}{\partial \alpha_i} &= [d_i] \{\mathbf{e}\}^*, \quad i = 1, 2; \\ [d_1] &= \begin{bmatrix} 0 & -p_2 & q_1 \\ p_2 & 0 & t_2 \\ -q_1 & -t_2 & 0 \end{bmatrix}; \\ [d_2] &= \begin{bmatrix} 0 & p_1 & t_1 \\ -p_1 & 0 & q_2 \\ -t_1 & -q_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

## 2. Вывод компонентов деформаций оболочки

Рассмотрим деформированную срединную поверхность оболочки. Обозначим через  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2)$  вектор упругого смещения срединной поверхности оболочки. Развернув его по осям основного триэдра (рис. 2), запишем

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \{u\}^* \{\mathbf{e}\}^*, \quad (8)$$

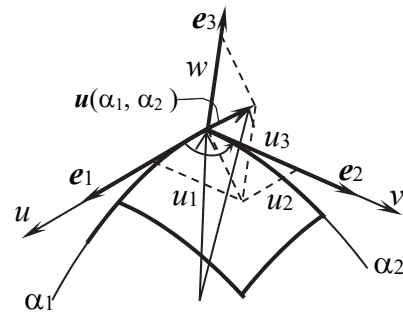


Рис. 2. Перемещения точки срединной поверхности [Figure 2. Development of a point of middle surface]

Радиус-вектор точки деформированной поверхности

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{u}. \quad (9)$$

С учетом формул (1) – (6) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \alpha_i} &= \mathbf{e}_i + \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial \{u\}^*}{\partial \alpha_i} \{\mathbf{e}\}^* + \{u\}^* [d_i] \{\mathbf{e}\}^* \right) = \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^i] \right) \right] \mathbf{e}_i + \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^j] \right) \mathbf{e}_j + \\ &+ \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^3] \right) \mathbf{e}_3 = (1 + \varepsilon_i) \mathbf{e}_i + \gamma_i \mathbf{e}_j - \vartheta_i \mathbf{e}_3; \end{aligned} \quad (10)$$

$\tilde{\rho}$ 

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^i] \right) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - k_i u_3; \\ \omega_i &= \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^j] \right) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - k_{12} u_3; \\ \vartheta_i &= -\frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^k] \right) = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} - k_i u_i - k_{12} u_j;\end{aligned}\quad (11)$$

$$i, j = 1, 2; i \neq j; k = 3,$$

где  $\varepsilon_i$  – относительные деформации растяжения (сжатия) срединной поверхности оболочки в направлении координаты  $\alpha_i$ . Параметр  $\omega_i$  определяет поворот касательной координатной линии (вектора  $e_i$ ) деформированной срединной поверхности вокруг нормали по направлению к вектору  $e_j$  относительно начального положения (недеформированной поверхности). Параметр  $\vartheta_i$  определяет вращение векторов  $e_i, e_3$  в нормальной плоскости к вектору  $e_j$ .

Суммируя  $\omega_1, \omega_2$ , получаем деформацию сдвига деформированной срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = \varepsilon_3 = \omega_1 + \omega_2 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 + \\ &+ \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 - 2k_{12} u_3 = \\ &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right) - 2k_{12} u_3.\end{aligned}\quad (12)$$

Полуразность параметров  $\omega_1, \omega_2$  определяет угол поворота орт деформированной срединной поверхности оболочки вокруг нормали  $e_3$  (положительный угол вращения против часовой стрелки):

$$\omega_3 = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2 A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2 u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 u_1}{\partial \alpha_2} \right).\quad (13)$$

По аналогии с вектором перемещений введем вектор углов поворота координатной системы деформированной срединной поверхности оболочки относительно начальной координатной системы срединной поверхности (положительное вращение против часовой стрелки).

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 = \{\theta\}^* \{e\}, \\ \{\theta\}^* &= \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \},\end{aligned}\quad (14)$$

где  $\theta_1 = -\vartheta_2; \theta_2 = \vartheta_1$  или  $\omega_i = (-1)^i \vartheta_j, i, j = 1, 2; i \neq j; \theta_3 = \omega_3$ .

Учитывая параметры вращения векторов исходной координатной системы срединной поверхности при деформировании, получим векторы касательных и нормали к деформированной срединной поверхности:

$$\tilde{e}_i = e_i + \omega_i e_j - \vartheta_i e_3, \quad i, j = 1, 2;$$

$$\tilde{e}_3 = \vartheta_1 e_1 + \vartheta_2 e_2 + e_3.\quad (15)$$

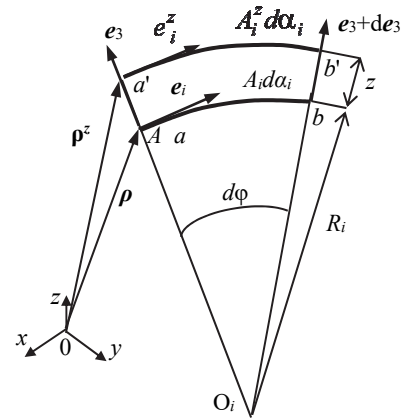


Рис. 3. Геометрия срединной и параллельной поверхностей [Figure 3. Geometry of middle and parallel surfaces]

Формулы (11), (12) определяют деформации срединной поверхности оболочки. Отметим, что формулы деформаций срединной поверхности оболочки с произвольной ортогональной системой координат отличаются от формул оболочки в линиях кривизны только в деформациях сдвига – учитывается влияние кривизны кручения срединной поверхности  $k_{12}$ .

Для получения деформаций в произвольной точке оболочки рассмотрим геометрию и перемещения точек поверхности параллельной срединной поверхности оболочки, отстоящей от срединной поверхности на величину  $z$  ( $z = \{-h/2 \div h/2\}$ ) (рис. 3).

$$\rho^z(\alpha_1, \alpha_2) = \rho(\alpha_1, \alpha_2) + z \cdot e_3;\quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho^z}{\partial \alpha_i} = A_i e_i - z(q_i e_i + t_j e_j) = A_i [(1 - z k_i) e_i - z k_{12} e_j];$$

$$A_i^z \approx A_i (1 - z k_i);\quad (17)$$

$$F^z = -z k_{12} A_i A_j [(1 - z k_1) + (1 - z k_2)] \approx -2z k_{12} A_i A_j \neq 0;$$

$$e_i^z = \frac{A_i}{A_i^z} [(1 - z k_1) e_i - z k_{12} e_j] \approx e_i - z k_{12} e_j;\quad (18)$$

$(e_i^z e_j^z) = -2zk_{12}^2 \neq 0$  – координатная система поверхности параллельной срединной поверхности оболочки не в линиях кривизны, не ортогональна.

$$e_m^z = e_3^z = (e_i - zk_{12}e_j) \times (e_j - zk_{12}e_i) = e_m.$$

Кривизна параллельной поверхности определяется формулой

$$R_i^z = R_i + z, \quad k_i^z = \frac{1}{R_i^z} = \frac{1}{R_i + z} = \frac{k_i}{1 + k_i z}. \quad (19)$$

Пусть смещение точки параллельной поверхности определяется вектором

$$u^z = u_1^z e_1 + u_2^z e_2 + u_3^z e_3. \quad (20)$$

Согласно теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява, точка оболочки, находящаяся на расстоянии  $z$  по нормали от точки  $a$  срединной поверхности оболочки, остается на том же расстоянии  $z$  от точки перемещения срединной поверхности  $a_u$  по направлению нормали к деформированной срединной поверхности (рис. 4).

Из рис. 4 следует  $z \cdot e_3 + u^z = u + z \cdot \tilde{e}_3$ , откуда  $u^z = u + z \cdot (\tilde{e}_3 - e_3)$  или с учетом формулы (15)

$$u^z = u + z \cdot (\vartheta_1 e_1 + \vartheta_2 e_2). \quad (21)$$

С учетом гипотез Кирхгофа – Лява деформации поверхности параллельной срединной поверхности изменяются по линейному закону:

$$\varepsilon_i^z = \frac{A_i}{A_i^z} (\varepsilon_i + z\chi_i); \quad i = 1, 2;$$

$$\varepsilon_3^z = \omega_1^z + \omega_2^z = \frac{A_1}{A_1^z} (\omega_1 + z\tau_1) + \frac{A_2}{A_2^z} (\omega_2 + z\tau_2). \quad (22)$$

Здесь параметры  $\chi_i$  характеризуют приращение углов поворота  $\theta_i$  нормали к деформированной срединной поверхности вдоль координаты, перпендикулярной вектору вращения  $\theta_i$ , – параметры изменения кривизн координатных линий при деформировании срединной поверхности:

$$\chi_i = (-1)^j \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i} e_j = (-1)^j \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \omega_i - k_{12} \omega_3 \right) =$$

$$= (-1)^j \left( \frac{(-1)^j}{A_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \alpha_i} - \frac{(-1)^i}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \vartheta_j - k_{12} \omega_3 \right);$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \vartheta_2 - k_{12} \omega_3;$$

$$\chi_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \vartheta_1 + k_{12} \omega_3. \quad (23)$$

Параметры  $\tau_1, \tau_2$  характеризуют кручение ординатных линий при деформировании оболочки. Проводя дифференцирование перемещений параллельной поверхности (21) по аналогии с перемещениями срединной поверхности (10), получим:

$$\tau_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \vartheta_j, \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (24)$$

Учитывая формулы Гаусса – Кодацци (11), можно показать, что

$$\tau_1 - k_1 \omega_2 + k_{12} \varepsilon_1 = \tau_2 - k_2 \omega_1 + k_{12} \varepsilon_2 = \tau. \quad (25)$$

## Выводы

Сравнивая формулы (11) – (13), (23) – (25) функций, характеризующих деформированное состояние тонких оболочек, с сопоставимыми формулами для оболочек с ортогональной несопряженной системой координат, полученными на основе методов тензорного анализа в монографиях [6–8], отмечаем их аналогию. Отличия обнаруживаются только в принятых обозначениях.

Таким образом, в статье получены формулы деформаций тонких оболочек со срединной поверхностью с ортогональной несопряженной системой координат. При выводе уравнений использовались матрично-векторные формы дифференцирования уравнения поверхности (7), что позволяет более компактно и удобно провести необходимые преобразования. Матрично-векторная форма обоснована в работе [19] при выводе уравнений равновесия тонких оболочек со срединными поверхностями в ортогональной несопряженной системе координат. Полученные формулы деформаций срединной поверхности справедливы для оболочек со срединной поверхностью в линиях кривизны –  $k_{12} = 0$ . Приведенные преобразования могут использоваться в учебных пособиях по теории оболочек.

## Список литературы

1. Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dunnen beliebig gekrummten elastischen Schale // J. fur reine und angew, Math. 1874. Bd. 78. Pp. 136–174.
2. Love A. The small free vibrations and deformation of thin elastic shell // Pfill. Transs Roy. Soc. 1888. Vol. 179 (A). Pp. 491–546.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.;Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: ГСИСП, 1962. 432 с.
5. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Общая теория оболочек. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1962. 274 с.

6. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1964. 296 с.
7. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек: монография. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ицанов Т.Р. Сравнительный анализ скалярной и векторной форм аппроксимации в МКЭ и на примере соотношений В.В. Новожилова для эллиптического цилиндра // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 2. С. 51–57.
10. Клочков Ю.В., Вахнина О.В., Киселева Т.А. Расчет тонких оболочек на основе треугольного конечного элемента с корректирующим множителем Лагранжа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 5. С. 55–59.
11. Иванов В.Н. Основы метода конечных элементов и вариационно-разностного метода: учебное пособие. М.: Изд-во РУДН, 2008. 170 с.
12. Иванов В.Н., Кривошапка С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: монография. М.: Изд-во РУДН, 2010. 542 с.
13. Иванов В.Н., Наср Юнес Аббуши. Расчет оболочек сложной геометрии вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 9. М.: АСВ, 2000. С. 25–34.
14. Абовский А.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
15. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1968. 4512 p.
16. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.
17. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 4. С. 6–14.
18. Иванов В.Н., Шмелева А.А. Геометрия и формообразование тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 3–8.
19. Иванов В.Н. Расчет оболочек неканонической формы: учебно-методический комплекс. М.: РУДН, 2013. 108 с.

RESEARCH PAPER

## Geometric characteristics of the deformation state of the shells with orthogonal coordinate system of the middle surfaces

Vyacheslav N. Ivanov\*, Alisa A. Shmeleva

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation  
\*i.v.ivn@mail.ru

### Article history:

Received: March 12, 2019

Revised: October 22, 2019

Accepted: December 13, 2019

### Abstract

The aim of this work is to receive the geometrical equations of strains of shells at the common orthogonal not conjugated coordinate system. At the most articles, textbooks and monographs on the theory and analysis of the thin shell there are considered the shells the coordinate system of which is given at the lines of main curvatures. Derivation of the geometric equations of the deformed state of the thin shells in the lines of main curvatures is given, specifically, at monographs of the theory of the thin shells of V.V. Novozhilov, K.F. Chernih, A.P. Filin and other Russian and foreign scientists. The standard methods of mathematic analyses, vector analysis and differential geometry are used to receive them. The method of tensor analysis is used for receiving the common equations of deformation of non orthogonal coordinate system of the middle shell surface of thin shell. The equations of deformation of the shells in common orthogonal coordinate system (not in the lines of main curvatures) are received on the base of this equation. Derivation of the geometric equations of deformations of thin shells in orthogonal not conjugated coordinate system on the base of differential geometry and vector analysis (without using of tensor analysis) is given at the article. This access may be used at textbooks as far as at most technical institutes the base of tensor analysis is not given.

**Keywords:** theory of thin shells; geometric equations; deformations; vector analysis

### For citation

Ivanov V.N., Shmeleva A.A. Geometric characteristics of the deformation state of the shells with orthogonal coordinate system of the middle surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1): 38–44. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44>. (In Russ.)

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Civil Engineering, Engineering Academy; ORCID iD: 0000-0003-4023-156X, ELIBRARY SPIN-code: 3110-9909.

Alisa A. Shmeleva, graduate student of Department of Civil Engineering, Engineering Academy.

## References

1. Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dunnen beliebig gekrummten elastischen Schale. *J. fur reine und angew, Math.* 1874;78:136–174.
2. Love A. The small free vibrations and deformation of thin elastic shell. *Pfill. Transs Roy. Soc.* 1888;179(A): 491–546.
3. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike* [General theory of shells and its application at technology]. Moscow; Leningrad: Gostehizdat Publ.; 1949. (In Russ.)
4. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkih obolochek* [Theory of thin shells]. Leningrad: GSIPS Publ.; 1962. (In Russ.)
5. Chernih C.F. *Linejnaya teoriya obolochek. Chast' 1. Obshchaya teoriya obolochek* [Linear theory of shells. Part 1. Total theory of shells]. Leningrad: Leningrad University; 1962. (In Russ.)
6. Chernih C.F. *Linejnaya teoriya obolochek. Chast' 2. Nekotorye voprosy teorii* [Linear theory of shells. Part 2. Some question of theory]. Leningrad: Leningrad University; 1964. (In Russ.)
7. Goldeveizer A.L. *Teoriya uprugih tonkih obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
8. Novozhilov V.V., Chernih K.F., Michailovskiy E.I. *Linejnaya teoriya tonkih obolochek* [Linear theory of thin shells]; monograph. Leningrad: Politehnika Publ.; 1991. (In Russ.)
9. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.H., Ishchanov T.R. Comparative analysis of scalar and vector forms of approximations in a FEM after the V.V. Novozhilov's relations for elliptic cylinders. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2015;(2):51–57. (In Russ.)
10. Klochkov Yu.V., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Calculation of thin shells on the basis of the triangular final element with the correcting Lagrange's coefficients. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2015;(5):55–59. (In Russ.)
11. Ivanov V.N. *The base of finite element method and variation-difference method*: textbook. Moscow: RUDN University Publ.; 2008. (In Russ.)
12. Ivanov V.N., Krivoshapko S.N. *Analiticheskie metody rascheta obolochek nekanonicheskoy formy* [Analytical methods for calculating shells of non-canonical form]: textbook. Moscow: RUDN Publ.; 2010. (In Russ.)
13. Ivanov V.N., Abbushy N.U. Raschet obolochek slozhnoj geometrii variacionno-raznostnym metodom [Analysis of the complex geometry using the variational-difference method]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings: Intercollegiate collection of scientific papers.* 2000;(9):25–34. (In Russ.)
14. Abovskiy A.P., Andreev N.P., Deruga A.P. *Variacionnye principy teorii uprugosti i teorii obolochek* [Variation principle of the theory of elasticity and theory of the shells]. Moscow: Nauka Publ.; 1978. (In Russ.)
15. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity.* Oxford: Pergamon Press; 1968.
16. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces.* Switzerland: Springer International Publishing; 2015.
17. Ivanov V.N. Geometry and forming of the normal surfaces with system of plane coordinate lines. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2011;(4):6–14. (In Russ.)
18. Ivanov V.N., Shmeleva A.A. Geometry and formation of the thin-walled space shell structures on the base of normal cyclic surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2016;(6):3–8. (In Russ.)
19. Ivanov V.N. *Raschet obolochek nekanonicheskoy formy* [Analyses of the shells of noncanonic forms]: textbook complex. Moscow: RUDN Publ.; 2013. (In Russ.)