2019. 15(6). 470–476

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

Динамика конструкций и сооружений
Dynamics of structures and buildings

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-470-476
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Свободные колебания анизотропной прямоугольной пластинки на неоднородно вязкоупругом основании

В.Дж. Гаджиев[1], Г.Р. Мирзоева[1]*, М.Г. Агаяров[2]

[1]*Национальная академия наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1143, Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9*
[2]*Сумгаитский государственный университет, Азербайджанская Республика, AZ 50008, Сумгаит, 43 квартал*
*gulnar.mirzayeva@gmail.com

История статьи:
Поступила в редакцию: 17 сентября 2019 г.
Доработана: 20 ноября 2019 г.
Принята к публикации: 01 декабря 2019 г.

Благодарности
Соавторы благодарны научному руководителю Вагифу Гаджиеву за ценные советы при планировании исследования.

Для цитирования
Гаджиев В.Дж., Мирзоева Г.Р., Агаяров М.Г. Свободные колебания анизотропной прямоугольной пластинки на неоднородно вязкоупругом основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 470–476. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-470-476

Аннотация

В рамках поставленной ***цели*** рассмотрены свободные и поперечные колебания, неоднородные по трем пространственным координатам прямоугольных пластин, лежащих на неоднородно вязкоупругом основании. Предполагается, что краевые условия являются однородными. В исследовании разработано замкнутое решение для задачи о свободной вибрации неоднородной прямоугольной ортотропной пластины, опирающейся на неоднородный вязкоупругий фундамент. Модули Юнга и плотность ортотропной пластины непрерывно изменяются относительно трех пространственных координат, в то время как характеристики вязкоупругого основания изменяются в зависимости от координат в плоскости. ***Методы.*** Соответствующее уравнение движения получено с использованием классической теории пластин. В решении задачи применялись метод разделения переменных и метод Бубнова – Галеркина. ***Выводы.*** Определены явные формулы основного тона частоты поперечного колебания анизотропной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Детально изучено влияние неоднородности ортотропных материалов, неоднородности вязкости неупругих и упругих оснований на безразмерных частотах пластин.

Ключевые слова: пластинка; непрерывность; неоднородность; анизотропность; плотность; основания; частота; прогиб; уравнения движения

Введение

В настоящее время при строительстве крупных инженерных комплексов, мостов, эстакад, а также в машиностроении широко используются прямоугольные пластинки, изготовленные из различных естественных и искусственных анизотропных материалов.

При расчете на устойчивость, определении частотно-амплитудных характеристик появляется необходимость учета влияния сопротивления окружающей среды при эксплуатации. Одновременный учет неоднородности, анизотропности и сопротивления внешней среды значительно осложняет математическое решение задачи. Неучет же этих факторов может привести к существенной ошибке (особенно в динамических задачах). Принимая во внимание, что в строительстве и в ряде других областей широко применяются непрерывно-неоднородные анизотропные прямоугольные пластинки, в данной

Гаджиев Вагиф Джамал Оглы, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом теории упругости и пластичности Института математики и механики.
Мирзоева Гюлнар Ровшан Кызы, доктор философии по механике, старший научный сотрудник отдела теории упругости и пластичности Института математики и механики.
Агаяров Матлаб Гусейнгулу Оглы, доктор философии по математике и механике, доцент, директор Центра дополнительного образования.

работе изучаются поперечные колебания этой же конструкции, но с учетом неоднородно вязкоупругого сопротивления.

Фундаментальная монография В.А. Ломакина посвящена теоретическим вопросам линейно неоднородных упругих тел. Здесь на основе построенной теории упругости непрерывно линейно-упругих тел решен ряд теоретических вопросов, связанных с изучением напряженно-деформированного состояния элементов конструкций [1].

Монография Г.С. Лехницкого [2], посвящена теории однородных линейно-упругих анизотропных пластин и решению конкретных задач.

Исследование ряда теоретико-экспериментальных вопросов полимерных и композиционных материалов проведено в [3], где указано, что при изготовлении полосы-пластины после определенного технологического процесса модуль упругости и плотность являются периодической функцией координаты длины, коэффициент Пуассона остается постоянной величиной.

Колебание анизотропных пластин, лежащих на основании типа Винклера – Пастернака, описано в работе [4].

В [5] исследована приближенная методика расчета на устойчивость непрерывно-неоднородных прямоугольных пластин. Обстоятельно были изучены вопросы определения критических параметров оболочек с учетом сопротивления двухконстантного основания типа Пастернака [6].

В.А. Баженов [7] изложил теорию расчета прямоугольных пластин и круговых цилиндрических оболочек на изгиб и устойчивость, находящихся в упругой среде. Исследование вопросов колебания ортотропных неоднородных пластин с учетом сопротивления различного ряда упругой и вязкоупругой сред проведено в [8–11]. В качестве примера рассмотрены конкретные случаи характерных параметров, выполнены численные расчеты, результаты представлены в зависимости от параметра основания в виде таблиц и графиков.

В [12] проведены анализы колебаний прямоугольных пластин с учетом сопротивления неоднородной внешней среды.

В работе [13] – рассматривается задача свободного колебания упругой оболочки, лежащей на однородно вязкоупругом основании.

1. Постановка задачи

Как известно, при проектировании крупных инженерных сооружений, таких как мост, эстакада и других, широко используются прямоугольные пластинки, изготовленные из естественных и искусственных непрерывно-неоднородных анизотропных материалов.

Во многих случаях причинами появления неоднородности материалов являются технология изготовления (композитных, стеклопластиковых, армированных материалов), механическая и термическая обработка, сварка, неоднородность составов. В результате чего возможен случай, когда характеристики материала и его плотность одновременно могут быть функцией трех пространственных координат [1; 3].

Учет вышеуказанных свойств и сопротивление вязкоупругой среды осложняют математическое решение задачи. Анализ полученных результатов, а не учет, может привести к существенным погрешностям [8; 13].

В данной работе исследуется задача свободного колебания непрерывно-неоднородной анизотропной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Реакция основания R с прогибом связаны следующим образом [8; 13]:

$$R=\left(K_1(x,y)+K_2(x,y)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w(x,y,), \qquad (1)$$

где w – прогиб; t – время, $K_1(x,y)$ и $K_2(x,y)$ – непрерывные функции, которые характеризуют свойство основания.

Координатная система выбрана так, что оси X и Y находятся в срединной плоскости, Z – перпендикулярно к ней.

Характеристики материала и плотность являются функциями трех пространственных координат:

$$a_{ij}=a_{ij}^0 f_1(x,y) f_2(z);$$

$$\rho=\rho_0\psi_1(x,y)\psi_2(z), \qquad (2)$$

где a_{ij}^0 и ρ_0 – соответствует однородному анизотропному материалу; $f_1(x,y)$ со своими производными до второго порядка $f_2(z), \psi_1(x,y), \psi_2(z)$ сами являются непрерывными функциями.

Связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} записывается в следующем виде [1; 2]:

$$\sigma_{11}=f_1(x,y)f_2(z)\left(a_{11}^0\varepsilon_{11}+a_{12}^0\varepsilon_{22}+a_{13}^0\varepsilon_{12}\right),$$

$$\sigma_{22}=f_1(x,y)f_2(z)\left(a_{21}^0\varepsilon_{11}+a_{22}^0\varepsilon_{22}+a_{23}^0\varepsilon_{12}\right),$$

$$\sigma_{12}=f_1(x,y)f_2(z)\left(a_{31}^0\varepsilon_{11}+a_{32}^0\varepsilon_{22}+a_{33}^0\varepsilon_{12}\right). \qquad (3)$$

Полагая, что и для непрерывно-анизотропной пластинки гипотеза Кирхофа – Лява остается в силе, имеет место

$$\varepsilon_{11}=e_{11}-z\chi_{11},\ \varepsilon_{22}=e_{22}-z\chi_{22},\ \varepsilon_{12}=e_{12}-z\chi_{12}, \qquad (4)$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} – малые деформации и $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ – кривизны и кручения срединной поверхности с компонентами вектора перемещений (u, v, w) связаны следующим образом:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{22} = \frac{\partial u}{\partial y}; \; e_{12} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \; \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{5}$$

Учитывая (4) в (2) получим

$$\sigma_{11} = f_1(x,y) f_2(z) \begin{bmatrix} \left(a_{11}^0 e_{11} + a_{12}^0 e_{22} + a_{13}^0 e_{12}\right) - \\ -z\left(a_{11}^0 \chi_{11} + a_{12}^0 \chi_{22} + a_{13}^0 \chi_{12}\right) \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{22} = f_1(x,y) f_2(z) \begin{bmatrix} \left(a_{21}^0 e_{21} + a_{22}^0 e_{22} + a_{23}^0 e_{12}\right) - \\ -z\left(a_{21}^0 \chi_{11} + a_{22}^0 \chi_{22} + a_{23}^0 \chi_{12}\right) \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{12} = f_1(x,y) f_2(z) \begin{bmatrix} \left(a_{31}^0 e_{11} + a_{32}^0 e_{22} + a_{33}^0 e_{12}\right) - \\ -z\left(a_{31}^0 \chi_{11} + a_{32}^0 \chi_{22} + a_{33}^0 \chi_{12}\right) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Так как в плоскости пластинки внешние силы отсутствуют, естественно предположить, что результирующие силы T_{11}, T_{22}, T_{12} всюду равны нулю

$$\int_{h/2}^{-h/2} \sigma_{11} dz = 0; \quad \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_{22} dz = 0; \quad \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_{12} dz = 0. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7), получим

$$a_{11}^0 e_{11} + a_{12}^0 e_{22} + a_{13}^0 e_{12} = \\ = A_2 A_1^{-1}\left(a_{11}^0 \chi_{11} + a_{12}^0 \chi_{22} + a_{13}^0 \chi_{12}\right),$$

$$a_{21}^0 e_{11} + a_{22}^0 e_{22} + a_{23}^0 e_{12} = \\ = A_2 A_1^{-1}\left(a_{21}^0 \chi_{11} + a_{22}^0 \chi_{22} + a_{23}^0 \chi_{12}\right),$$

$$a_{31}^0 e_{11} + a_{32}^0 e_{22} + a_{33}^0 e_{12} = \\ = A_2 A_1^{-1}\left(a_{31}^0 \chi_{11} + a_{32}^0 \chi_{22} + a_{33}^0 \chi_{12}\right). \tag{8.1}$$

Через

$$A_1 = \int_{h/2}^{-h/2} f_2(z) dz; \quad A_2 = \int_{h/2}^{-h/2} z f_2(z) dz$$

нетрудно установить, что с учетом (7) выражение моментов

$$M_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_{ij} z dz, \qquad i, j = 1, 2. \tag{8.2}$$

Здесь χ_{11}, χ_{22} и χ_{12} выражаются в следующем виде:

$$\begin{cases} M_{11} = \mu(x,y)\left(a_{11}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{12}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{13}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right) \\ M_{22} = \mu(x,y)\left(a_{21}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{22}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{23}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right), \\ M_{12} = \mu(x,y)\left(a_{31}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{32}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{23}^0 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right) \end{cases} \tag{9}$$

где приняты обозначения $\mu(x,y) = \mu_0 f(x,y)$;

$$\mu_0 = A_2^2 A_1^{-1} - A_3; \quad A_3 = \int_{-h/2}^{-h/2} f(z) z^2 dz.$$

Уравнение движения свободного колебания пластинки с учетом (1) – (2) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + \\ + \left(K_1(x,y) + K_2(x,y)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) W(x,y) + \\ + \bar{\rho}\psi_1(x,y)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \tag{10}$$

где $\bar{\rho} = \rho_0 h \int_{-h/2}^{h/2} \psi_2(z) dz.$

Отметим, что если пластина неоднородна только по толщине, уравнение (10) принимает следующий вид:

$$a_{11}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \left(a_{12}^0 + 2a_{12}^0 + a_{32}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + a_{22}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \left(a_{13}^0 + 2a_{31}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + \\ + \left(2a_{12}^0 + a_{13}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + \\ + \mu_0^{-1}\begin{pmatrix} K_1(x,y) + K_2(x,y)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \\ + \bar{\rho}\psi_1(x,y)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \end{pmatrix} W(x,y) = 0. \tag{11}$$

В случае, когда характеристики материала и плотность являются непрерывными функциями пространственных координат, уравнение движения записывается в следующем виде:

$$L(W)+K_1(x,y)W+$$
$$+\left(K_2(x,y)+\bar{\rho}\psi_1(x,y)\right)\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial t^2}=0. \quad (12.1)$$

В случае, когда пластинка неоднородна только по толщине, $L(W)$ записывается так:

$$L(W)=a_{11}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\left(a_{12}^0+2a_{12}^0+a_{32}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+$$
$$+a_{22}^0\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+\left(a_{13}^0+2a_{31}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}+$$
$$+\left(2a_{12}^0+a_{13}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3}. \quad (13)$$

В общем случае

$$L(W)=\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\left[a_{11}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+a_{12}^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+a_{13}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]+$$
$$+2\frac{\partial\mu}{\partial x}\left[a_{11}^0\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+a_{12}^0\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}+a_{13}^0\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right]+$$
$$+\mu\left[a_{11}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+a_{12}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+a_{13}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}\right]+$$
$$+2\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}\left[a_{31}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+a_{32}^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+a_{33}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]+$$
$$+4\frac{\partial\mu}{\partial y}\left[a_{31}^0\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+a_{32}^0\frac{\partial^3 W}{\partial y^2\partial x}+a_{33}^0\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right]+$$
$$+2\mu\left[a_{31}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+a_{32}^0\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+a_{33}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}\right]+$$
$$+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\left[a_{21}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+a_{22}^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+a_{23}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]+$$
$$+2\frac{\partial\mu}{\partial y}\left[a_{21}^0\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}+a_{22}^0\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+a_{23}^0\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right]+$$
$$+\mu\left[a_{21}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+a_{22}^0\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+a_{23}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3}\right]. \quad (12.2)$$

Как видно, (12.1) является сложным дифференциальным уравнением и определение точного решения затруднительно. Поэтому при решении уравнения (12.1) будем применять комбинированный способ: на первом этапе – метод разделения переменных, а на втором этапе – метод ортогонализации Бубнова – Галеркина.

2. Метод решения

Решение (12.1) будем искать в следующем виде:

$$W(x,y,t)=V(x,y)e^{i\omega t}, \quad (14)$$

где $V(x,y)$ – должна удовлетворять краевым условиям; ω – частота.

Подставляя (14) в (12.1) получим

$$\bar{L}(V)+K_1(x,y)V-$$
$$-\omega^2\left[K_2(x,y)+\bar{\rho}\psi_1(x,y)\right]V=0, \quad (15)$$

где

$$L(V)=\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\left[a_{11}^0\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a_{12}^0\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a_{13}^0\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right]+$$
$$+2\frac{\partial\mu}{\partial x}\left[a_{11}^0\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}+a_{12}^0\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y^2}+a_{13}^0\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}\right]+$$
$$+\mu\left[a_{11}^0\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+a_{12}^0\frac{\partial^4 V}{\partial x^2\partial y^2}+a_{13}^0\frac{\partial^4 V}{\partial x^3\partial y}\right]+$$
$$+2\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}\left[a_{31}^0\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a_{32}^0\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a_{33}^0\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right]+$$
$$+4\frac{\partial\mu}{\partial y}\left[a_{31}^0\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}+a_{32}^0\frac{\partial^3 V}{\partial y^2\partial x}+a_{33}^0\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}\right]+$$
$$+2\mu\left[a_{31}^0\frac{\partial^4 V}{\partial x^2\partial y^2}+a_{32}^0\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}+a_{33}^0\frac{\partial^4 V}{\partial x^2\partial y^2}\right]+$$
$$+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\left[a_{21}^0\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a_{22}^0\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a_{23}^0\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right]+$$
$$+2\frac{\partial\mu}{\partial y}\left[a_{21}^0\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}+a_{22}^0\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}+a_{23}^0\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y^2}\right]+$$
$$+\mu\left[a_{21}^0\frac{\partial^4 V}{\partial x^2\partial y^2}+a_{22}^0\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}+a_{23}^0\frac{\partial^4 V}{\partial x\partial y^3}\right]. \quad (16)$$

Решение (15) будем искать в виде

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\varphi_i(x)\theta_j(y), \quad (17)$$

где A_{ij} – неизвестные постоянные и каждый $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(x)$ должны удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Функция ошибки $\eta(x,y)$ в данном случае с учетом (15) и (17) записывается как

$$\eta(x,y)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\begin{bmatrix}\bar{L}(\varphi_i(x)\theta_j(y))+K_1(x,y)\varphi_i(x)\theta_j(y)-\\ \omega^2\left[K_2(x,y)+\bar{\rho}\psi(x,y)\right]\varphi_i(x)\theta_j(y)\end{bmatrix}\neq$$

$$\neq 0. \qquad (18)$$

Условия ортогонализации (17) и (18) имеют вид

$$\int_0^a\int_0^b \eta(x,y)\varphi_k(x)\,\theta_p(y)dxdy=0. \qquad (19)$$

Произвольное приближение ω^2 – определяется из системы алгебраических линейных однородных уравнений (19):

$$\left\|\omega^2\right\|=0. \qquad (20)$$

Относительно ω^2 (20) является нелинейным алгебраическим уравнением. Определение и нахождение значения ω^2 с помощью компьютерной программы не вызывает особого труда. Однако в инженерной практике обычно ограничиваются определением основного тона частоты, что и приведет к следующему уравнению:

$$\int_0^a\int_0^b\left[\begin{bmatrix}\bar{L}(\varphi_i(x)\theta_j(y))+K_1(x,y)\varphi_i(x)\theta_j(y)-\\ \omega^2\left[K_2(x,y)+\bar{\rho}\psi(x,y)\right]\varphi_k(x)\theta_p(y)\end{bmatrix}\right]dxdy=0.$$

Отсюда находим:

$$\omega^2=$$

$$=\frac{\int_0^a\int_0^b\left[\left[\bar{L}(\varphi_i(x)\theta_j(y))+K_1(x,y)\varphi_i(x)\theta_j(y)\right]\right]dxdy}{\int_0^a\int_0^b\left[\left[K_2(x,y)+\bar{\rho}\psi_1(x,y)\right]\varphi_i(x)\theta_j(y)\right]dxdy}. \qquad (21)$$

Из формулы (21) при условии $K_2=0$ получим решение задачи для Винклеровского неоднородного основания.

Простым случаем является цилиндрическая форма изгибного колебания которая возможна при условии $a>>b$.

В этом случае частоты определяется из (21):

$$\omega_1^2=\frac{\int_0^a\left[L_1(\varphi_1)+K_1(x)\varphi_1(x)\right]dx}{\bar{\rho}\int_0^a\psi_1(x)\varphi_1(x)dx}. \qquad (22)$$

Заключение

Определены явные формулы основного тона частоты поперечного колебания анизотропной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Влияние неоднородности ортотропных материалов, неоднородности вязкости, неупругие и упругие основания на безразмерных частотах пластин детально изучены.

Список литературы

1. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. С. 376.

2. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 625 с.

3. *Кравчук А.С., Майборода В.В., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. С. 303.

4. *Tornabene F.* Free vibrations of anisotropic doubly-curved shells and plates of revolution with a free from meridian resting on Winkler – Pasternak elastic foundations // Compos. struct. 2011. No. 94. Pp. 186–206.

5. *Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N.* On the free vibration of orthotropic and inhomogeneous with spatial coordinates plates resting on the inhomogeneous viscoelastic foundation // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2018. Vol. 26. No. 10. Pp. 1–12. DOI: 10.1080/15376494.2018.1430271

6. *Sofiyev A.H., Schnack E., Haciyev V.C., Kuruoglu N.* Effect of the two-parameter elastic, foundation on the critical parameters of non-homogeneous orthotropic shells // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2013. Vol. 12. No. 05. 24 p. DOI: 10.1142/S0219455412500411

7. *Баженов В.А.* Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде. Киев: Высшая школа, 1975. С. 168.

8. *Sofiyev A.H., Hui D., Haciyev V.C., Erdem H., Yuan G.Q., Schnack E., Guldal V.* The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation within first order shear deformation theory // Composites Part B: Engineering. 2017. Vol. 116. Pp. 170–185. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.006

9. *Haciyev V.C., Mirzeyeva G.R., Shiriyev A.I.* Effect of Winkler foundation, inhomogenecity and orthotropic on the frequency of plates // Journal of Structural Engineering Applied Mechanics. 2018. Vol. I. Issue 1. Pp. 1–15.

10. *Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N.* Free bending vibration analysis of thin bidirectional exponentially graded orthotropic rectangular plates resting on two-parameter elastic foundations // Composite Structures. 2018. Vol. 184. Pp. 372–277.

11. *Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Mirzeyev R.D.* Free vibration of non-homogeneous elastic rectangular plates // Proceedings of the Institute of Mathematics, Azerbaijan. 1996. Vol. 4. Pp. 103–108.

12. *Huang M., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C.* Free-vibration analysis of stepped rectangular plates resting on non-homogeneous elastic foundations // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 50. Pp. 180–187.

13. *Carnet H., Lielly A.* Free vibrations of reinforced elastic shells // Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36. No. 4. Pp. 835–844.

RESEARCH PAPER

Free vibrations of anisotropic rectangular plate laying on a heterogeneous viscouselastic basis

Vaqif C. Haciyev[1], Gulnar R. Mirzoeva[1]*, Matlab G. Agayarov[2]

[1]*National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Wahabzadeh St., Baku, AZ1143, Republic of Azerbaijan*
[2]*Sumgait State University, 43 quarter, Sumgait, AZ50008, Republic of Azerbaijan*
*gulnar.mirzayeva@gmail.com

Article history:
Received: September 17, 2019
Revised: November 20, 2019
Accepted: December 01, 2019

Acknowledgements
The coauthors are grateful to the scientific supervisor Vaqif Haciyev for valuable advice in the planning of the study.

For citation
Haciyev V.C., Mirzoeva G.R., Agayarov M.G. (2019). Free vibrations of anisotropic rectangular plate laying on a heterogeneous viscouselastic basis. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 15*(6), 470–476. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-470-476. (In Russ.)

Abstract

The aim of the work. Free, transverse vibrations are considered heterogeneous along the three spatial coordinates of rectangular plates lying on an inhomogeneous viscoelastic base. It is assumed that the boundary conditions are homogeneous. A closed solution for the problem of free vibration of an inhomogeneous rectangular orthotropic plate based on an inhomogeneous viscoelastic foundation is developed in the article. Young's moduli and the density of the orthotropic plate continuously change with respect to three spatial coordinates, while the characteristics of a viscoelastic base change depending on the coordinates in the plane. ***Methods.*** The corresponding equation of motion is obtained using the classical theory of plates. The solution to the problem was constructed using the method of separation of variables and the Bubnov – Galerkin method. ***Results.*** Explicit formulas of the fundamental tone of the frequency of the transverse vibration of an anisotropic plate lying on an inhomogeneous viscoelastic base are determined. The influence of heterogeneity of orthotropic materials, viscosity inhomogeneities, inelastic and elastic substrates at dimensionless plate frequencies have been studied in detail.

Keywords: plate; continuity; anisotropy; density; bases; frequency; deflection; equations of motion

References

1. Lomakin V.A. (1976). *Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel [The theory of elasticity of inhomogeneous walked].* Moscow, Publishing House of Moscow State University. (In Russ.)

2. Lehnitsky S.G. (1957). *Anizotropnye plastinki [Anisotropic plates].* Gostekhizdat Publ. (In Russ.)

3. Kravchuk A.S., Mayboroda V.V., Urzhumtsev Yu.S. (1985). *Mekhanika polimernyh i kompozicionnyh materialov [Mechanics of polymer and composite materials].* Moscow, Nauka Publ. (In Russ.)

4. Tornabene F. (2011). Free vibrations of anisotropic doubly-curved shells and plates of revolution with a free from meridian resting on Winkler – Pasternak elastic foundations. *Compos. struct.,* (94), 186–206.

5. Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. (2018). On the free vibration of orthotropic and inhomogeneous with spatial coordinates plates resting on the inhomogeneous viscoelastic foundation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures, 26*(10), 1–12. DOI: 10.1080/15376494.2018.1430271

6. Sofiyev A.H., Schnack E., Haciyev V.C., Kuruoglu N. (2013). Effect of the two-parameter elastic, foundation on the critical parameters of non-homogeneous orthotropic shells. *International Journal of Structural Stability and Dynamics, 12*(05), 24. DOI: 10.1142/S0219455412500411

Vaqif C. Haciyev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mathematics and Mechanics.

Gulnar R. Mirzoeva, Doctor of Philosophy in Mechanics, senior researcher of Department of Theory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mathematics and Mechanics.

Matlab G. Agayarov, Doctor of Philosophy in Mathematics and Mechanics Sciences, Associate Professor, Head of Additional Education Center.

7. Bajenov V.A. (1975). *Izgib cilindricheskih obolochek v uprugoj srede [The Benching of the Cylindrical Shells in Elastic Medium]*. Kiev, Vysshaya shkola Publ. (In Russ.)

8. Sofiyev A.H., Hui D., Haciyev V.C., Erdem H., Yuan G.Q., Schnack E., Guldal V. (2017). The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation within first order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering, 116*, 170–185. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.006

9. Haciyev V.C., Mirzeyeva G.R., Shiriyev A.I. (2018). Effect of Winkler foundation, inhomogenecity and orthotropic on the frequency of plates. *Journal of Structural Engineering Applied Mechanics, I*(1), 1–15.

10. Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. (2018). Free bending vibration analysis of thin bidirectional exponentially graded orthotropic rectangular plates resting on two-parameter elastic foundations. *Composite Structures, 184*, 372–277.

11. Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Mirzeyev R.D. (1996). Free vibration of non-homogeneous elastic rectangular plates. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* (4), 103–108.

12. Huang M., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C. (2015). Free-vibration analysis of stepped rectangular plates resting on non-homogeneous elastic foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 50*, 180–187.

13. Carnet H., Lielly A. (1969). Free vibrations of reinforced elastic shells. *Journal of Applied Mechanics*, *36*(4), 835–844.