

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-4-323-326  
УДК 624.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Решение осесимметричной задачи термоупругости радиально неоднородной цилиндрической оболочки численно-аналитическим методом и методом конечных элементов

Л.С. Полякова, В.И. Андреев\*

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26  
\*asv@mgsu.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 27 апреля 2019 г.  
Доработана: 25 июня 2019 г.  
Принята к публикации: 20 августа 2019 г.

### Аннотация

**Цель** работы заключается в сравнении двух методов расчета на примере решения осесимметричной задачи термоупругости. **Методы.** Расчет толстостенной цилиндрической оболочки на температурное воздействие проведен численно-аналитическим методом и методом конечных элементов, реализованным в программном комплексе ЛИРА-САПР. Оболочка состоит из трех слоев: два слоя жаростойкого бетона и наружный стальной слой. При расчете учитываются кусочно-линейная неоднородность оболочки, обусловленная ее трехслойной конструкцией, и непрерывная неоднородность, вызванная воздействием стационарного температурного поля. Численно-аналитический метод расчета предполагает вывод разрешающего дифференциального уравнения, которое решается методом прогонки, предусмотрена возможность учета нелинейного характера деформирования материала с использованием метода последовательных приближений. Для решения данной задачи методом конечных элементов построена аналогичная расчетная модель оболочки в программном комплексе ЛИРА-САПР. Приведены решения задачи термоупругости для бесконечного цилиндра (в условиях плоского деформированного состояния) и для цилиндра конечной длины со свободными торцами. **Результаты.** Сравнение результатов расчета проводится по полученным значениям кольцевых напряжений  $\sigma_\theta$ .

**Ключевые слова:** неоднородность; нелинейно упругий материал; бетон; термоупругость; цилиндрическая оболочка

### Для цитирования

Полякова Л.С., Андреев В.И. Решение осесимметричной задачи термоупругости радиально неоднородной цилиндрической оболочки численно-аналитическим методом и методом конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 323–326. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-323-326>

### Введение

Конструктивные элементы в виде полых цилиндров имеют широкое применение в технологическом оборудовании химической и энергетической промышленности. Такие конструкции часто работают в условиях повышенных и высоких температур. В статье предлагается решение задачи термоупругости с уче-

том изменения свойств материала (бетона) в зависимости от температуры и с учетом его физической нелинейности. В работе [1] описан численно-аналитический метод решения такого типа задач, нами выполнен сравнительный анализ результатов расчета численно-аналитическим методом и методом конечных элементов, реализованным в программном комплексе ЛИРА-САПР. Задача решается в постановке плоского деформированного состояния (ПДС) и для конечного цилиндра со свободными торцами.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача расчета трехслойной цилиндрической оболочки на температурное воздействие. Материалы оболочки: внутренний слой

Полякова Людмила Сергеевна, магистр, аспирант кафедры сопротивления материалов; eLIBRARY SPIN-код: 4913-4377.

Андреев Владимир Игоревич, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов; eLIBRARY SPIN-код: 9906-7214; ORCID iD: 0000-0002-1057-4329.

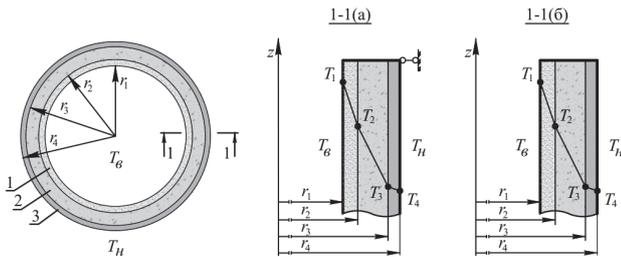
© Полякова Л.С., Андреев В.И., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

из жаростойкого бетона на глиноземистом цементе (бетон № 1) толщиной 50 мм, средний слой из жаростойкого бетона на портландцементе (бетон № 2) – 100 мм, наружный слой из стали – 40 мм. Внутри поддерживается постоянная температура 500 °С.

Распределение температуры внутри многослойной стенки, полученное при решении уравнения теплопроводности, показано на рис. 1:  $r_1 = 0,55$  м,  $r_2 = 0,6$  м,  $r_3 = 0,7$  м,  $r_4 = 0,74$  м;  $T_6 = 500$  °С,  $T_1 = 488,9$  °С,  $T_2 = 380,4$  °С,  $T_3 = 199,5$  °С,  $T_4 = 197,3$  °С,  $T_H = 20$  °С.



**Рис. 1.** Распределение температуры в трехслойной оболочке: 1 – бетон № 1; 2 – бетон № 2; 3 – сталь  
**[Figure 1.** Temperature distribution in a three-layer shell: 1 – concrete № 1; 2 – concrete № 2; 3 – steel]

Изменение начального модуля упругости бетонов в зависимости от температуры принималось по данным из [2].

При решении численно-аналитическим методом для описания нелинейного характера деформирования бетонов использовались опытные диаграммы деформирования жаростойких бетонов, приведенные в [2]. В решении используется диаграмма  $\sigma_i - \varepsilon_i$ , которая описывается зависимостью с тремя константами, предложенной в [3]:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i - A\varepsilon_i^\alpha. \quad (3)$$

Возникающая в результате воздействия повышенных температур неоднородность бетона учитывается заменой констант  $E$ ,  $A$  и  $\alpha$  на функции  $E(T)$ ,  $A(T)$  и  $\alpha(T)$ . В работе [4] приведены функции  $E(T)$ ,  $A(T)$  и  $\alpha(T)$ , позволяющие аппроксимировать опытные диаграммы деформирования бетонов, а также приведен вид этих диаграмм.

Значения коэффициента линейной температурной деформации для бетонов в зависимости от температуры применялись по таблицам из [5], в задаче принимаются значения  $\alpha_b$ , соответствующие режиму длительного нагрева при повторном воздействии температуры.

## 2. Метод расчета

В [1] описан численно-аналитический метод решения плоской осесимметричной задачи для толстостенных оболочек из физически нелинейного ради-

ально неоднородного материала при произвольных зависимостях механических характеристик от радиуса. В основу решения дифференциального уравнения относительно  $\sigma_r$  положен метод прогонки с определенным шагом, для учета физической нелинейности используется метод последовательных приближений. При решении дифференциального уравнения принят постоянный шаг  $h = 0,005$  м, то есть трехслойная оболочка общей толщиной 0,19 м разбивается при решении на 38 кольцевых слоев, каждому из которых соответствует набор параметров  $E$ ,  $\nu$  и  $\alpha$ ; при учете физической нелинейности для каждого слоя задается диаграмма  $\sigma_i - \varepsilon_i$ .

Решение при условии плоского деформированного состояния предполагает, что цилиндр является очень длинным и рассматриваются напряжения, возникающие на достаточном удалении от концов. Метод решения аналогичной задачи с учетом местных возмущений вблизи концов цилиндра подробно описан в [6].

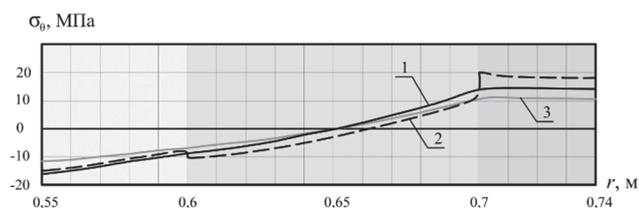
Для решения данной задачи методом конечных элементов использовался программный комплекс ЛИРА-САПР. Была создана модель цилиндра, разбитого по радиусу на 38 конечных элементов, и заданы 38 типов жесткостей и температурная нагрузка для каждого кольцевого слоя. При решении плоской задачи были ограничены перемещения вдоль оси  $z$  по торцам цилиндра. При решении задачи для конечного цилиндра освобождался от закрепления один торец, при этом общая длина цилиндра составляла 1,45 м, так как численно-аналитический расчет показал, что напряжения, возникающие вблизи свободных торцов цилиндра, быстро убывают с увеличением расстояния от конца, и на расстоянии 1,5 м их влияние незначительно.

## 3. Результаты

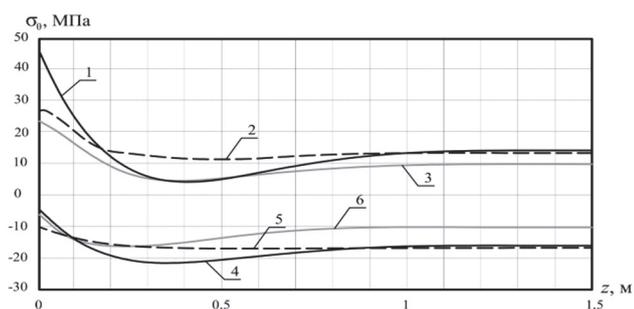
На рис. 2 представлена деформированная под воздействием температуры КЭ-модель цилиндрической оболочки.



**Рис. 2.** Деформированная цилиндрическая оболочка, полученная в программе ЛИРА-САПР  
**[Figure 2.** Deformed cylindrical shell obtained in the program LIRA-CAD]



**Рис. 3.** Распределение напряжений  $\sigma_\theta$  по толщине оболочки:  
 1 – линейный расчет численно-аналитическим методом;  
 2 – линейный расчет методом КЭ;  
 3 – нелинейный расчет численно-аналитическим методом  
**[Figure 3.** The distribution of stresses across the shell thickness:  
 1 – linear calculation by numerical-analytical method;  
 2 – linear calculation by the FE method;  
 3 – non-linear calculation by numerical-analytical method]



**Рис. 4.** Напряжения  $\sigma_\theta$  вблизи свободного торца цилиндра при  $r = 0,55$  м и  $r = 0,7$  м:  
 1 – линейный расчет численно-аналитическим методом, м;  
 2 – линейный расчет методом КЭ в программе ЛИРА-САПР, м;  
 3 – нелинейный расчет численно-аналитическим методом, м;  
 4 – линейный расчет численно-аналитическим методом, м;  
 5 – линейный расчет методом КЭ в программе ЛИРА-САПР, м;  
 6 – нелинейный расчет численно-аналитическим методом, м  
**[Figure 4.** Stresses near the free end of the cylinder at  $r = 0,55$  m and  $r = 0,7$  m:  
 1 – linear calculation by numerical-analytical method, m;  
 2 – linear calculation by the FE method in the LIRA-CAD software program, m;  
 3 – non-linear calculation by numerical-analytical method, m;  
 4 – linear calculation by numerical-analytical method, m;  
 5 – linear calculation by the FE method in the LIRA-CAD software program, m;  
 6 – non-linear calculation by numerical-analytical method, m]

На рис. 3 показаны напряжения  $\sigma_\theta$ , распределенные по толщине оболочки при  $z \geq 1,5$  м. На рис. 4 показаны напряжения  $\sigma_\theta$  вблизи свободного торца

цилиндра в наиболее напряженных кольцевых слоях бетона  $r = 0,55$  м и  $r = 0,7$  м.

## Выводы

Результаты решения плоской задачи (рис. 3) методом КЭ в программе ЛИРА-САПР показывают резкие перепады напряжений в местах смены материала, обусловленные перераспределением напряжений в пользу материалов с большим модулем упругости, которых нет при численно-аналитическом расчете и не должно быть в плоской задаче при отсутствии деформаций по  $z$ .

Результаты решения задачи термоупругости цилиндра конечной длины показывают значительное расхождение максимальных напряжений вблизи свободного торца цилиндра.

## Список литературы

1. Андреев В.И., Полякова Л.С. Физически нелинейные задачи для неоднородных толстостенных оболочек // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Vol. 12. Issue 4. Pp. 36–40.
2. Ушаков А.В. Основные закономерности деформирования обычного и жаростойких бетонов при нагреве: дис. ... канд. техн. наук. Волгоград, 2006. 212 с.
3. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 208 с.
4. Polyakova L.S., Andreev V.I. Calculation of a non-linearly elastic three-layer cylindrical shell taking into account the continuous inhomogeneity caused by the temperature field // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. 012124.
5. СП 27.13330.2011. Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур. М., 2011. 116 с.
6. Andreev V.I., Polyakova L.S. Calculation of non-linear elastic three-layer cylindrical shell of finite length with taking into account the continuous inhomogeneity caused by the temperature field // E3s Web of Conferences. 2019. Vol. 91. 02018.

RESEARCH PAPER

## Solution of the axisymmetric problem of thermoelasticity of a radially inhomogeneous cylindrical shell by numerical-analytical method and the finite element method

Lyudmila S. Polyakova, Vladimir I. Andreev\*

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation  
 \*asv@mgsu.ru

### Article history:

Received: April 27, 2019

Revised: July 25, 2019

Accepted: August 20, 2019

### Abstract

**The aim of research** is to compare two calculation methods using the example of solving the axisymmetric thermoelasticity problem. **Methods.** The calculation of a thick-walled cylindrical shell on the temperature effect was carried out by the numerical-analytical method and the finite element method, implemented in the LIRA-CAD software package. The shell consists of three layers:

*For citation*

Polyakova L.S., Andreev V.I. (2019). Solution of the axisymmetric problem of thermoelasticity of a radially inhomogeneous cylindrical shell by numerical-analytical method and the finite element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(4), 323–326. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-323-326>

two layers of heat-resistant concrete and an outer steel layer. In the calculation, a piecewise linear inhomogeneity of the shell due to its three-layer structure and continuous inhomogeneity caused by the influence of a stationary temperature field is taken into account. The numerical-analytical method of calculation involves the derivation of a resolving differential equation, which is solved by the sweep method, it is possible to take into account the nonlinear nature of the deformation of the material using the method of successive approximations. To solve this problem by the finite element method, a similar computational model of the shell was constructed in the LIRA-CAD software package. The solution of the problem of thermoelasticity for an infinite cylinder (under conditions of a plane deformed state) and for a cylinder of finite length with free ends is given. **Results.** Comparison of the calculation results is carried out according to the obtained values of ring stresses  $\sigma_\theta$ .

**Keywords:** inhomogeneity; nonlinearity; concrete; thermoelasticity; cylindrical shell

### References

1. Andreev V.I., Polyakova L.S. (2016). Physically nonlinear problems for inhomogeneous thick-walled shells. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 12(4), 36–40. (In Russ.)
2. Ushakov A.V. (2006). Osnovnye zakonomernosti deformirovaniya obychnogo i zharostojkih betonov pri nagreve [The basic laws of deformation of conventional and heat-resistant concrete during heating]. (PhD dissertation, Volgograd). 212. (In Russ.)
3. Lucas P.A. (1978). Osnovy nelineinoi stroitel'noi mekhaniki [The foundations of nonlinear structural mechanics]. Moscow: Stroizdat Publ., 208. (In Russ.)
4. Polyakova L.S., Andreev V.I. (2018). Calculation of a nonlinearly elastic three-layer cylindrical shell taking

into account the continuous inhomogeneity caused by the temperature field. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 456, 012124.

5. SP 27.13330.2011. (2011). *Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii, prednaznachennye dlya raboty v usloviyah vozdeystviya povyshennyh i vysokih temperatur* [Concrete and reinforced concrete structures designed to work in conditions of exposure to high and high temperatures]. Moscow, 116. (In Russ.)

6. Andreev V.I., Polyakova L.S. (2019). Calculation of nonlinear elastic three-layer cylindrical shell of finite length with taking into account the continuous inhomogeneity caused by the temperature field. *E3S Web of Conferences*, 91, 02018.

*Lyudmila S. Polyakova*, master, graduate student, Department of Strength of Materials; eLIBRARY SPIN-code: 4913-4377.

*Vladimir I. Andreev*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Strength of Materials; eLIBRARY SPIN-code: 9906-7214; ORCID iD: 0000-0002-1057-4329.