2019. 15(4). 315–322

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ
NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-4-315-322
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Варианты определяющих соотношений деформационной теории пластичности в расчете оболочки вращения на основе метода конечных элементов

Ю.В. Клочков[1]*, А.П. Николаев[1], О.В. Вахнина[1], М.Ю. Клочков[2]

[1]*Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26*
[2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1*
*klotchkov@bk.ru

История статьи:
Поступила в редакцию: 13 марта 2019 г.
Доработана: 3 июня 2019 г.
Принята к публикации: 2 июля 2019 г.

Благодарности
Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 18-41-340007 р_а.

Для цитирования
Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочков М.Ю. Варианты определяющих соотношений деформационной теории пластичности в расчете оболочки вращения на основе метода конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 315–322. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-315-322

Аннотация
Актуальность. Проблемы снижения материалоемкости объектов строительства и машиностроения диктуют необходимость рассмотрения процессов деформирования конструкций при упруго-пластическом состоянии. Широко используемой теорией учета пластических свойств материала является деформационная теория пластичности. ***Целью*** данной работы является разработка вариантов получения определяющих соотношений на шаге нагружения при деформировании материала за пределами упругости. ***Методы.*** Приводятся алгоритмы получения определяющих соотношений теории малых упругопластических деформаций на шаге нагружения в двух вариантах. В первом варианте они получаются дифференцированием выражений напряжений как функций деформаций на основе деформационной теории пластичности; во втором варианте определяющие соотношения получаются на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений напряжений компонентам девиаторов приращений деформаций. ***Результаты.*** На тестовом примере расчета защемленной цилиндрической оболочки представлена реализация полученных определяющих соотношений.

Ключевые слова: деформационная теория пластичности; девиатор приращений деформаций; девиатор приращений напряжений; матрица пластичности; метод конечных элементов

Введение

В настоящее время при определении напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочечных конструкций необходимо учитывать пластическую стадию работы применяемого материала. Соотношения между напряжениями и деформациями при этом компонуются на основе теории пластического течения или деформационной теории пластичности [1–3]. При использовании численных методов расчета оболочечных конструкций [4–10] с учетом пластического деформирования обычно используют шаговую процедуру нагружения [11; 12], предусматривающую получение соотношений между приращениями компонент тензора деформаций и приращениями компонент тензора напряжений. Если воспользоваться деформационной теорией пластичности, то вышеупомянутые соотношения на (j+1)-м шаге нагружения можно получить двумя способами. В пер-

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693; Author ID: 161677.
Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования; eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484; Author ID: 161676.
Вахнина Ольга Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: 3593-0159; Author ID: 573151.
Клочков Михаил Юрьевич, студент третьего курса физического факультета; eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955. Author ID: 971170.

вом случае можно использовать общепринятый подход, который заключается в применении процедуры дифференцирования компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений. Во втором случае можно воспользоваться гипотезой о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций [13].

В настоящей работе представлен сравнительный анализ эффективности двух способов получения матрицы пластичности на (j+1)-м шаге нагружения при применении метода конечных элементов (МКЭ) к расчету тонких оболочек при упругопластическом деформировании.

1. Матрица пластичности на (j+1)-м шаге нагружения с использованием операции дифференцирования компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений

На основании второй гипотезы деформационной теории пластичности можно записать соотношение между контравариантными компонентами девиаторов напряжений S^{ij} и деформаций E^{ij} [3]:

$$S^{ij} = (2/3)(\sigma_i/\varepsilon_i)E^{ij}, \tag{1}$$

где $\sigma_i = \sqrt{(3/2)S^{ij}S_{ij}}$; $\varepsilon_i = \sqrt{(3/2)E^{ij}E_{ij}}$ – интенсивности напряжений и деформаций.

Входящие в (1) ко- и контравариантные компоненты девиаторов напряжений и деформаций определяются по формулам [3]

$$S^{ij} = \sigma^{ij} - I_1(\sigma)g^{ij}/3; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - I_1(\sigma)g_{ij};$$
$$E^{ij} = \varepsilon^{ij} - I_1(\varepsilon)g^{ij}/3; \quad E_{ij} = \varepsilon_{ij} - I_1(\varepsilon)g_{ij}, \tag{2}$$

где $I_1(\sigma) = g^{ij}\sigma_{ij} = g_{ij}\sigma^{ij}$; $I_1(\varepsilon) = g^{ij}\varepsilon_{ij} = g_{ij}\varepsilon^{ij}$ – первые инварианты тензоров напряжений и деформаций.

Соотношение (1) с учетом (2) можно представить в виде

$$\sigma^{ij} - I_1(\sigma)g^{ij}/3 =$$
$$= (2/3)(\sigma_i/\varepsilon_i)\left(g^{ik}g^{jl}\varepsilon_{kl} - I_1(\varepsilon)g^{ij}/3\right). \tag{3}$$

Применяя к (3) первую гипотезу деформационной теории пластичности, получим следующую зависимость:

$$\sigma^{ij} = (2/3)(\sigma_i/\varepsilon_i)g^{ik}g^{jl}\varepsilon_{kl} +$$
$$+ I_1(\varepsilon)g^{ij}\left(K/3 - (2/9)(\sigma_i/\varepsilon_i)\right), \tag{4}$$

где $K = E/(1-2\nu)$.

Для получения соотношений между приращениями контравариантных компонент тензора напряжений и ковариантных компонент тензора деформаций на (j+1)-м шаге нагружения воспользуемся зависимостями

$$\Delta\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon_{11}}\Delta\varepsilon_{11} + \frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon_{22}}\Delta\varepsilon_{22} +$$
$$+ \frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon_{12}}\Delta\varepsilon_{12} + \frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon_{33}}\Delta\varepsilon_{33}, \tag{5}$$

где греческие верхние индексы α и β последовательно принимают значения 1 и 2.

При вычислении входящих в (5) частных производных $\partial\sigma^{\alpha\beta}/\partial\varepsilon_{ij}$ необходимо предварительно выполнить следующие дифференциальные операции:

$$\frac{\partial(\sigma_i/\varepsilon_i)}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial(\sigma_i/\varepsilon_i)}{\partial\varepsilon_i}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{(E_K - E_C)}{\varepsilon_i}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_{ij}}, \tag{6}$$

где $E_K = \partial\sigma_i/\partial\varepsilon_i$; $E_C = \sigma_i/\varepsilon_i$ – касательный и секущий модули диаграммы деформирования применяемого материала.

Для получения входящих в (6) производных интенсивности деформаций по ковариантным компонентам тензора деформаций воспользуемся выражением

$$\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E^{11}}\frac{\partial E^{11}}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E^{12}}\frac{\partial E^{12}}{\partial\varepsilon_{ij}} +$$
$$+ \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E^{22}}\frac{\partial E^{22}}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E^{33}}\frac{\partial E^{33}}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E_{11}}\frac{\partial E_{11}}{\partial\varepsilon_{ij}} +$$
$$+ \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E_{12}}\frac{\partial E_{12}}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E_{22}}\frac{\partial E_{22}}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial E_{33}}\frac{\partial E_{33}}{\partial\varepsilon_{ij}}, \tag{7}$$

где $\dfrac{\partial\varepsilon_i}{\partial E^{ij}} = \dfrac{E_{ij}}{3\varepsilon_i}$; $\dfrac{\partial\varepsilon_i}{\partial E_{ij}} = \dfrac{E^{ij}}{3\varepsilon_i}$.

Представив ко- и контравариантные компоненты девиатора деформаций в развернутом виде, получим следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} = 1 - \frac{2}{3} I_1(\varepsilon) - \frac{1}{3} g_{11} \frac{\partial I_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{11}};$$

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial \varepsilon_{22}} = -\frac{1}{3} g_{11} \frac{\partial I_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{22}};$$

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial \varepsilon_{12}} = -\frac{1}{3} g_{11} \frac{\partial I_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{12}};$$

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial \varepsilon_{33}} = -\frac{1}{3} g_{11} \frac{\partial I_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{33}};$$

$$\frac{\partial E_{22}}{\partial \varepsilon_{11}} = -\frac{1}{3} g_{22} \frac{\partial I_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{11}};$$

$$\frac{\partial E_{22}}{\partial \varepsilon_{22}} = 1 - \frac{2}{3} I_1(\varepsilon) - \frac{1}{3} g_{22} \frac{\partial I_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{22}};.$$

....

$$\frac{\partial E^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} = g^{33} g^{33} + 2\varepsilon_{33} g^{33} \frac{\partial g^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} -$$

$$-\frac{1}{3} I_1(\varepsilon) \frac{\partial g^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} - \frac{1}{3} g^{33} \frac{\partial I_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{33}}. \qquad (8)$$

Принимая во внимание (6), (7) и (8), можно определить входящие в (5) частные производные $\partial \sigma^{\alpha\beta} / \partial \varepsilon_{ij}$, например:

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} = \frac{2}{3} \left[D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{11}} C_{11} + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left(g^{11} g^{11} + 2\varepsilon_{11} g^{11} \frac{\partial g^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\varepsilon_{22} g^{12} \frac{\partial g^{12}}{\partial \varepsilon_{11}} + 2\varepsilon_{12} \left(\frac{\partial g^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{12} + \frac{\partial g^{12}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{11} \right) \right) \right] +$$

$$+M \left(g^{11} g^{11} + 2\varepsilon_{11} g^{11} \frac{\partial g^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} + \right.$$

$$+2\varepsilon_{12} \left(\frac{\partial g^{12}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{11} + \frac{\partial g^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{12} \right) +$$

$$+\varepsilon_{22} \left(\frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{11} + \frac{\partial g^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{22} \right) +$$

$$\left. + \varepsilon_{33} g^{33} \frac{\partial g^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} \right) + \left(-\frac{2}{9} \right) D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{11}} B_{11};$$

....

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{33}} = \frac{2}{3} D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{33}} C_{11} + \left(-\frac{2}{9} \right) D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{33}} B_{11} +$$

$$+M \left(g^{33} g^{11} + \varepsilon_{33} g^{11} \frac{\partial g^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} \right);$$

$$\frac{\partial \sigma^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} = \frac{2}{3} \left[D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{11}} C_{22} + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left(g^{21} g^{21} + 2\varepsilon_{11} g^{21} \frac{\partial g^{21}}{\partial \varepsilon_{11}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\varepsilon_{22} g^{22} \frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} + 2\varepsilon_{12} \left(\frac{\partial g^{21}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{22} + \frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{21} \right) \right) \right] +$$

$$+\left(-\frac{2}{9} \right) D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{11}} B_{22} +$$

$$+M \left(g^{11} g^{22} + \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial g^{11}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{22} + \frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{11} \right) + \right.$$

$$+2\varepsilon_{12} \left(\frac{\partial g^{12}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{22} + \frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} g^{12} \right) +$$

$$\left. +2\varepsilon_{22} g^{22} \frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} + \varepsilon_{33} g^{33} \frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{11}} \right);$$

....

$$\frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} = \frac{2}{3} D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{33}} C_{33} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left(g^{33} g^{33} + 2\varepsilon_{33} g^{33} \frac{\partial g^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} \right) -$$

$$-\frac{2}{9} D \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{33}} B_{33} + M \left(\varepsilon_{11} g^{11} \frac{\partial g^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} + 2\varepsilon_{12} g^{12} \frac{\partial g^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} + \right.$$

$$\left. +\varepsilon_{22} g^{22} \frac{\partial g^{22}}{\partial \varepsilon_{33}} + g^{33} g^{33} + 2\varepsilon_{33} g^{33} \frac{\partial g^{33}}{\partial \varepsilon_{33}} \right),$$

где $D = (E_K - E_C) / \varepsilon_i$; $\quad M = \dfrac{K}{3} - \dfrac{2}{9} \dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$;

$$C_{11} = g^{11} g^{11} \varepsilon_{11} + g^{12} g^{12} \varepsilon_{22} + 2 g^{11} g^{12} \varepsilon_{12};$$

$$B_{11} = \varepsilon_{11} g^{11} g^{11} + 2\varepsilon_{12} g^{12} g^{11} + \varepsilon_{22} g^{22} g^{11} + \varepsilon_{33} g^{33} g^{11};$$

$$C_{22} = g^{21} g^{21} \varepsilon_{11} + g^{22} g^{22} \varepsilon_{22} + 2 g^{21} g^{22} \varepsilon_{12};$$

$$B_{22} = \varepsilon_{11} g^{11} g^{22} + 2\varepsilon_{12} g^{12} g^{22} + \varepsilon_{22} g^{22} g^{22} + \varepsilon_{33} g^{33} g^{22};$$

$$C_{33} = g^{33} g^{33} \varepsilon_{33};$$

$$B_{33} = \varepsilon_{11} g^{11} g^{33} + 2\varepsilon_{12} g^{12} g^{33} + \varepsilon_{22} g^{22} g^{33} + \varepsilon_{33} g^{33} g^{33}.$$

Соотношения (8) представим в виде матричного произведения

$$\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}} = \underset{3\times4}{[d]} \underset{4\times1}{\{\Delta\varepsilon^*\}}, \qquad (9)$$

где $\{\Delta\varepsilon^*\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11} \ \Delta\varepsilon_{22} \ 2\Delta\varepsilon_{12} \ \Delta\varepsilon_{33}\}$;

$\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma^{11} \ \Delta\sigma^{22} \ \Delta\sigma^{12}\}$.

Учитывая общепринятую в теории тонких оболочек гипотезу о приравнивании нулю нормальных напряжений в направлении нормали к срединной поверхности, запишем равенство

$$\Delta\sigma^{33} = \frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{11}}\Delta\varepsilon_{11} + \frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{22}}\Delta\varepsilon_{22} + $$

$$+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{12}}\Delta\varepsilon_{12} + \frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{33}}\Delta\varepsilon_{33} = 0. \quad (10)$$

Из соотношения (10) получим выражение

$$\Delta\varepsilon_{33} = \left(\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{11}}\Delta\varepsilon_{11} + \frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{22}}\Delta\varepsilon_{22} + \frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{12}}\Delta\varepsilon_{12}\right)\Bigg/\left(\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\varepsilon_{33}}\right), \quad (11)$$

которое можно представить в матричном виде

$$\Delta\varepsilon_{33} = \underset{1\times3}{\{b\}^T}\,\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon\}}, \quad (12)$$

где $\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}\ \Delta\varepsilon_2\ \Delta\varepsilon_{12}\}$.

С учетом (12) скомпонуем матричную зависимость

$$\underset{4\times1}{\{\Delta\varepsilon^*\}} = \underset{4\times3}{[a]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon\}}, \quad (13)$$

где $\underset{3\times4}{[a]^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}.$

С учетом (13) выражение (9) можно представить следующим образом:

$$\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}} = \underset{3\times3}{[C_I]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon\}}, \quad (14)$$

где $[C_I] = [d][a]$ – матрица пластичности на (j+1)-м шаге нагружения.

2. Матрица пластичности на (j+1)-м шаге нагружения на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций

Принимая во внимание гипотезу о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций, запишем следующее соотношение

$$\Delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}P(\Delta\varepsilon)g_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta\sigma_i}\left(\Delta\sigma_{ij} - \frac{1}{3}P(\Delta\sigma)g_{ij}\right), \quad (15)$$

где $P(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{ij}\,g^{ij} = \Delta\varepsilon^{ij}\,g_{ij}$;

$P(\Delta\sigma) = \Delta\sigma_{ij}\,g^{ij} = \Delta\sigma^{ij}\,g_{ij}$.

Между первыми инвариантами тензоров приращений деформаций и приращений напряжений может быть установлена следующая зависимость:

$$P(\Delta\varepsilon) = \frac{1-2\nu}{E}P(\Delta\sigma). \quad (16)$$

Соотношение (15) с учетом (16) запишем в виде

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{1}{E_K}\Delta\sigma_{ij} + P(\Delta\sigma)g_{ij}\cdot A, \quad (17)$$

где $A = \left(\frac{1-2\nu}{3E} - \frac{1}{2E_K}\right)$.

В развернутой форме выражения (17) примут следующий вид:

$$\Delta\varepsilon_{11} = \left(\frac{3}{2}\frac{1}{E_K} + g_{11}g^{11}A\right)\Delta\sigma_{11} +$$
$$+g_{11}g^{22}A\Delta\sigma_{22} + g_{11}2g^{12}A\Delta\sigma_{12};$$
$$\Delta\varepsilon_{22} = g_{22}g^{11}A\Delta\sigma_{11} +$$
$$+\left(\frac{3}{2}\frac{1}{E_K} + g_{22}g^{22}A\right)\Delta\sigma_{22} + g_{22}2g^{12}A\Delta\sigma_{12};$$
$$\Delta\varepsilon_{12} = g_{12}g^{11}A\Delta\sigma_{11} + g_{12}g^{22}A\Delta\sigma_{22} +$$
$$+\left(\frac{3}{2}\frac{1}{E_K} + g_{12}2g^{12}A\right)\Delta\sigma_{12}. \quad (18)$$

Соотношения (18) могут быть представлены в матричной форме

$$\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon\}} = \underset{3\times3}{[T]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}}, \quad (19)$$

где $\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma_{11}\ \Delta\sigma_{22}\ \Delta\sigma_{12}\}$.

Выполняя операцию обращения из (19) можно получить матрицу пластичности на (j+1)-м шаге нагружения:

$$\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}} = \underset{3\times3}{[C_{II}]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon\}}, \quad (20)$$

где $[C_{II}] = [T]^{-1}$.

Сопоставляя между собой (14) и (20) отметим, что процедура получения $[C_{II}]$ значительно упрощается по сравнению с $[C_I]$, что в свою очередь облегчает программную реализацию вычислительного алгоритма.

3. Конечный элемент тонкой оболочки

Срединная поверхность тонкой оболочки представлена ансамблем четырехугольных конечных элементов с узлами *i, j, k, l,* расположенными в вершинах четырехугольников. При формировании матрицы жесткости конечного элемента используются две системы координат: глобальная система криволинейных координат θ^1, θ^2, связанная с геометрическими параметрами срединной поверхности, и локальная система координат $-1 \le \xi, \eta \le 1$, применяемая для реализации процедуры численного интегрирования по площади элемента с помощью квадратуры Гаусса.

Связь между глобальными θ^1, θ^2 и локальными ξ, η координатами устанавливается зависимостью

$$\theta^\alpha = \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1-\eta)}{2}\theta^{\alpha i} + \frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1-\eta)}{2}\theta^{\alpha j} + \frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1+\eta)}{2}\theta^{\alpha k} + \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1+\eta)}{2}\theta^{\alpha l}, \qquad (21)$$

где α принимает значения 1, 2.

Столбцы узловых неизвестных конечного элемента на (*j*+1)-м шаге нагружения в глобальной и локальной системах координат были выбраны в следующем виде:

$$\underset{1\times36}{\{\Delta U_y^G\}^T} = \left\{ \underset{1\times12}{\{\Delta u_y^G\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^G\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta w_y^G\}^T} \right\}; \qquad (22)$$

$$\underset{1\times36}{\{\Delta U_y^L\}^T} = \left\{ \underset{1\times12}{\{\Delta u_y^L\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^L\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta w_y^L\}^T} \right\}, \qquad (23)$$

где $\underset{1\times12}{\{\Delta q_y^G\}^T} = \left\{ q^i \, q^j \, q^k \, q^l \, q^i_{,\theta^1} \, q^j_{,\theta^1} \, q^k_{,\theta^1} \, q^l_{,\theta^1} \, q^i_{,\theta^2} \, q^j_{,\theta^2} \, q^k_{,\theta^2} \, q^l_{,\theta^2} \right\}$;

$$\underset{1\times12}{\{\Delta q_y^L\}^T} = \left\{ q^i \, q^j \, q^k \, q^l \, q^i_{,\xi} \, q^j_{,\xi} \, q^k_{,\xi} \, q^l_{,\xi} \, q^i_{,\eta} \, q^j_{,\eta} \, q^k_{,\eta} \, q^l_{,\eta} \right\}.$$

Здесь под Δq понимается приращение тангенциальных Δu, Δv или приращение нормальной компоненты Δw вектора перемещения на (*j*+1)-м шаге нагружения.

Приращение компоненты вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента интерполируется через узловые значения приращений этой же компоненты с помощью зависимостей вида

$$\Delta q = \underset{1\times12}{\{\psi\}^T} \underset{12\times1}{\{\Delta q_y^L\}}, \qquad (24)$$

где $\{\psi\}^T = \{\psi_1 \, \psi_2 \ldots \psi_{12}\}$ содержит произведения Эрмитовых полиномов третьего порядка.

Выполняя последовательное дифференцирование (24) по θ^1, θ^2, можно получить первые и вторые производные приращений компонент вектора перемещения, например:

$$\Delta q_{,\theta^1} = \left(\{\psi_{,\xi}\}^T \cdot \xi_{,\theta^1} + \{\psi_{,\eta}\}^T \cdot \eta_{,\theta^1} \right) \{\Delta q_y^L\};$$

$$\Delta q_{,\theta^1\theta^1} = \begin{pmatrix} \{\psi_{,\xi\xi}\}^T \cdot (\xi_{,\theta^1})^2 + \\ + \{\psi_{,\eta\eta}\}^T \cdot (\eta_{,\theta^1})^2 + \\ +2\{\psi_{,\xi\eta}\}^T \cdot \xi_{,\theta^1}\eta_{,\theta^1} + \\ + \{\psi_{,\xi}\}^T \cdot \xi_{,\theta^1\theta^1} + \{\psi_{,\eta}\}^T \cdot \eta_{,\theta^1\theta^1} \end{pmatrix} \{\Delta q_y^L\}. \qquad (25)$$

Дальнейшая процедура формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента и столбца узловых усилий на (*j*+1)-м шаге нагружения осуществляется стандартным для МКЭ образом [14–19].

4. Пример расчета

В качестве примера решена задача об определении НДС цилиндра, жестко защемленного по левому торцу, загруженного внутренним давлением интенсивности q. Правый торец свободен. Приняты следующие исходные данные: радиус цилиндра $R = 0{,}9$ м; длина образующей $L = 0{,}8$ м; толщина стенки $t = 0{,}01$ м; модуль упругости $E = 7{,}5 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}32$. Диаграмма деформирования задана в виде двухзвенной ломаной с пределом текучести $\sigma_T = 200$ Мпа. Кривая упрочнения задана уравнением

$$\sigma_i = (\varepsilon_i - 0{,}0023496) \cdot 18087{,}03 + 200{,}0. \qquad (26)$$

Расчеты выполнены по двум вариантам. В первом варианте при формировании матрицы жесткости конечного элемента на (*j*+1)-м шаге нагружения использована матрица пластичности в виде (14); во втором варианте применена матрица пластичности, полученная в соответствие с (20). Результаты повариантных расчетов показаны в таблице, в которой приведены численные значения нормальных напряжений на внутренней $\sigma^{\text{в}}$ и наружной $\sigma^{\text{н}}$ поверхностях цилиндра в жесткой заделке ($x = 0{,}0$ м) и на свободном торце ($x = 0{,}8$ м) в зависимости от количества шагов нагружения. Как видно из таблицы, нормальные напряжения в жесткой заделке в первом варианте имеют меньшие, примерно на 20 %, значения по сравнению со вторым вариантом. Нормальные напряжения на свободном торце в обоих вариантах практически совпадают и соответствуют условиям равновесия. Меридиональные напряжения $\sigma_{\text{м}}$ должны быть равны нулю, так как горизонтальная нагрузка отсутствует, а кольцевые напряжения на свободном торце могут быть вычислены по формуле $\sigma_{\kappa} = qR/t = 2{,}5\,\text{МПа} \cdot 0{,}9\,\text{м}/0{,}01\,\text{м} = 225{,}0\,\text{МПа}$, что и наблюдается в обоих вариантах расчета.

Таблица

Численные значения нормальных напряжений в сечениях цилиндрической оболочки
[*Table.* Numerical values of normal stresses in sections of a cylindrical shell]

Сечение [Section]	Напряжения, МПа [Stress, MPa]	Варианты расчета [Variants of calculation]					
		I			II		
		Число шагов нагружения [Number of loading steps]					
		40	60	80	40	60	80
Опорное, $x = 0{,}0$ м [Support, $x = 0{,}0$ м]	$\sigma_{\text{м}}^{\text{в}}$	322,4	322,2	322,1	399,6	399,0	399,6
	$\sigma_{\text{м}}^{\text{н}}$	–322,2	–322,1	–322,0	–399,8	–399,3	–399,5
	$\sigma_{\text{к}}^{\text{в}}$	131,3	131,2	131,1	151,1	151,1	151,5
	$\sigma_{\text{к}}^{\text{н}}$	–131,2	–131,1	–131,0	–151,2	–151,2	–151,4
Свободный торец, $x = 0{,}8$ м [Free end, $x = 0{,}8$ м]	$\sigma_{\text{м}}^{\text{в}}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\sigma_{\text{м}}^{\text{н}}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\sigma_{\text{к}}^{\text{в}}$	225,04	225,04	225,04	224,99	224,99	224,99
	$\sigma_{\text{к}}^{\text{н}}$	225,04	225,04	225,04	224,99	224,99	224,99

Вывод

Способ получения матрицы пластичности (15)–(20) на (j+1)-м шаге нагружения, основанный на гипотезе о пропорциональности компонент девиаторов приращений напряжений компонентам девиаторов приращений деформаций, является более предпочтительным по сравнению со способом (5)–(14), в котором для получения определяющих соотношений на шаге нагружения выполняется дополнительная операция дифференцирования полных напряжений по компонентам деформаций, приводящая к снижению корректности поставленной задачи.

Список литературы

1. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести: учебник для студентов втузов. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
2. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Теория пластичности. Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2011. 419 с.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 574 с.
4. *Solodovnikov A.S., Sheshenin S.V.* Numerical study of strength properties for a composite material with short reinforcing fibers // Moscow University Mechanics Bulletin. 2017. Vol. 72. No. 4. Pp. 94–100.
5. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V.* Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section // International Applied Mechanics. 2018. Vol. 54. No. 5. Pp. 559–567.
6. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Analytical-numerical solution of static problems for noncircular cylindrical shells of variable thickness // International Applied Mechanics. 2017. Vol. 53. Issue 3. Pp. 313–325.
7. *Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С., Травуш В.И.* Современные критерии прочности древесины и возможности программирования расчета комплексных конструкций при сложном напряженном состоянии // Academia. Архитектура и строительство. 2015. № 3. С. 125–131.
8. *Kayumov R.A.* Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52. No. 5. Pp. 575–580.

9. *Galishnikova V.V., Pahl P.Ja.* Constrained construction of planar Delaunay triangulations without flipping // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 154–174.

10. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. IV. Конечноэлементная реализация. Примеры решения задач // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т. 152. № 4. С. 115–126.

11. *Хайруллин Ф.С., Мингалиев Д.Д.* Расчет тонких оболочек с использованием аппроксимирующих функций различного порядка // Вестник Казанского технологического университета. 2017. Т. 20. № 14. С. 102–104.

12. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an elur-p carbon tape and XT-118 binder // Mechanics of Composite Materials. 2018. Vol. 54. No. 1. Pp. 2–12.

13. *Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П.* Определяющие соотношения для нелинейно упругих тел и их реализация в расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе смешанного МКЭ // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 157. № 2. С. 28–39.

14. *Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Якупов Н.М., Хасанова Л.И., Бикмухамметов И.И.* Эффект концентрации напряжений в стержне прямоугольного сечения в области крепления от продольных усилий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 451–458.

15. *Agapov V., Golovanov R.* Comparative analysis of the simplest finite elements of plates in bending // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. Vol. 692. Pp. 1009–1016.

16. *Nguyen Nhung, Waas Anthonym.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // ZAMP. Z. Angew. Math. and Phys. 2016. Vol. 67. No. 9. Pp. 35/1–35/24.

17. *Lei Z., Gillot F., Jezequel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // Int. J. Mech. 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.

18. *Hanslo P., Larson M.G., Larson F.* Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // Comput. Mech. 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.

19. *Yamashita Hirok, Valkeapaa Antti I., Jayakumar Paramsothy, Syqiyama Hiroyuki.* Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn. 2015. Vol. 10. № 5. Pp. 051012/1-051012/9.

RESEARCH PAPER

Variants of determining correlations of deformation theory of plasticity in the calculation of shell of rotation on the basis of finite element method

Yuriy V. Klochkov[1*], Anatoliy P. Nikolaev[1], Olga V. Vakhnina[1], Mikhail Yu. Klochkov[2]

[1]*Volgograd State Agricultural University, 26 University Ave., Volgograd, 400002, Russian Federation*
[2]*Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, Moscow, 119899, Russian Federation*
*klotchkov@bk.ru

Article history:
Received: March 13, 2019
Revised: July 3, 2019
Accepted: July 2, 2019

Acknowledgements:
The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd region as part of the research project No. 18-41-340007 p_a.

For citation
Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. (2019). Variants of determining correlations of deformation theory of plasticity in the calculation of shell of rotation on the basis of finite element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 15*(4), 315–322. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-315-322

Abstract

Relevance. The problems of decline of resource-demanding of objects of building and engineer dictate the necessity of consideration of processes of deformation of constructions at the resiliently-plastic state. The widely in-use theory of account of practical properties of material is a deformation theory of plasticity. ***The aim of the research*** is development of variants of receipt of determining correlations on the step of ladening at deformation of material outside a resiliency. ***Methods.*** Algorithms over of receipt of determining correlations of theory of small resiliently-plastic deformations are brought on the step of ladening in two variants. In the first they turn out differentiation of expressions of tensions as functions of deformations on the basis of deformation theory of plasticity; in the second determining correlations turn out on the basis of hypothesis about the proportion of components of deviators increases of tensions to components of deviators increases of deformations. ***Results.*** On the test example of calculation of the jammed cylindrical shell realization of the got determining correlations is presented.

Keywords: deformation theory of plasticity; deviator increases of deformations; deviator increases of tensions; matrix of plasticity; method of eventual elements

References

1. Malinin N.N. (1968). *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti: uchebnik dlya studentov vtuzov* [Applied theory of plasticity and creep: textbook for the students of technical colleges]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 400. (In Russ.)

2. Trusov P.V. Shveikin A.I. (2011). *Teoriya plastichnosti* [*Theory of plasticity*]. Perm, PNIPU Publ., 419. (In Russ.)

3. Sedov L.I. (1976). *Mehanika sploshnoi sredi* [*Mechanics of continuous environment*]. Moscow, Nauka Publ., 574.

4. Solodovnikov A.S., Sheshenin S.V. (2017). Numerical study of strength properties for a composite material with short reinforcing fibers. *Moscow University Mechanics Bulletin, 72*(4), 94–100.

5. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V. (2018). Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section. *International Applied Mechanics, 54*(5), 559–567.

6. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. (2017). Analytical-numerical solution of static problems for noncircular cylindrical shells of variable thickness. *International Applied Mechanics, 53*(3), 313–325.

7. Pyatikrestovskii K.P., Sokolov B.S., Travush V.I. (2015). Sovremennie kriterii prochnosti drevesini i vozmojnosti programmirovaniya rascheta kompleksnih konstrukcii pri slojnom napryajennom sostoyanii [Modern criteria of durability of wood and possibility of programming of calculation of complex constructions at the difficult tense state]. *Academia. Arhitektura i stroitelstvo*, (3), 125–131. (In Russ.)

8. Kayumov R.A. (2017). Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium. *Mechanics of Solids, 52*(5), 575–580.

9. Galishnikova V.V., Pahl P.Ja. (2018). Constrained construction of planar Delaunay triangulations without flipping. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 14*(2), 154–174.

10. Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U. (2010). Chislennoe issledovanie konechnih deformacii giperuprugih tel. IV. Konechnoelementnaya realizaciya. Primeri resheniya zadach [Numeral research of eventual deformations of hyperresilient bodies. IV. Finite-elements realization. Examples of decision of tasks]. *Uchenie zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, 152*(4), 115–126. (In Russ.)

11. Hairullin F.S., Mingaliev D.D. (2017). Raschet tonkih obolochek s ispolzovaniem approksimiruyuschih funkcii razlichnogo poryadka [Calculation of thin shells with the use of approximating functions of different order]. *Vestnik Kazanskogo tehnologicheskogo universiteta, 20*(14), 102–104. (In Russ.)

12. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. (2018). Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an elur-p carbon tape and XT-118 binder. *Mechanics of Composite Materials*, *54*(1), 2–12.

13. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. (2015). Opredelyayuschie sootnosheniya dlya nelineino uprugih tel i ih realizaciya v raschete osesimmetrichno nagrujennih obolochek vrascheniya na osnove smeshannogo MKE [Determining correlations for nonlinear resilient bodies and their realization in the calculation of axesymmetrical of the loaded shells of rotation on the basis of mixed FEM]. *Uchenie zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, 157*(2), 28–39. (In Russ.)

14. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M., Hasanova L.I., Bikmuhammetov I.I. (2018). Effekt koncentracii napryajenii v sterjne pryamougolnogo secheniya v oblasti krepleniya ot prodolnih usilii [Effect of concentration of tensions in the bar of rectangular section in area of fastening from longitudinal efforts]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 14*(6), 451–458. (In Russ.)

15. Agapov V., Golovanov R. (2018). Comparative analysis of the simplest finite elements of plates in bending. *Advances in Intelligent Systems and Computing, 692*, 1009–1016.

16. Nguyen Nhung, Waas Anthonym. (2016). Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *ZAMP. Z. Angew. Math. and Phys., 67*(9), 35/1–35/24.

17. Lei Z., Gillot F., Jezequel L. (2015). Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *Int. J. Mech., 54*, 105–119.

18. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. (2015). Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Comput. Mech., 56*(1), 87–95.

19. Yamashita Hirok, Valkeapaa Antti I., Jayakumar Paramsothy, Syqiyama Hiroyuki. (2015) Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn., 10*(5), 051012,1–051012,9.

Yuriy V. Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Higher Mathematics Department; eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693; Author ID: 161677.

Anatoliy P. Nikolaev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department; eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484; Author ID: 161676.

Olga V. Vakhnina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Higher Mathematics Department; eLIBRARY SPIN-code: 3593-0159; Author ID: 573151.

Mikhail Yu. Klochkov, a third-year student of the Faculty of Physics; eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955; Author ID: 971170.