

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-4-261-270  
УДК 624.012.45

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Теория «растворения» и «конденсации» физико-геометрических характеристик поперечного сечения произвольной формы при кручении стержней

Вл.И. Колчунов\*, А.И. Демьянов, Н.В. Наумов

Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94

\*vlik52@mail.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 11 июня 2019 г.  
Доработана: 29 июля 2019 г.  
Принята к публикации: 09 августа 2019 г.

### Для цитирования

Колчунов Вл.И., Демьянов А.И., Наумов Н.В. Теория «растворения» и «конденсации» физико-геометрических характеристик поперечного сечения произвольной формы при кручении стержней // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 261–270. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-261-270>

### Аннотация

**Цель** исследования заключается в продолжении разработки методики определения напряженно-деформированного состояния стержней при кручении методами сопротивления материалов. **Методы.** Предложен новый подход определения касательных напряжений кручения для стержней произвольного поперечного сечения, базирующийся на упрощенных предпосылках сопротивления материалов. Особенность подхода заключается в аппроксимации прямоугольных и любых сложных поперечных сечений железобетонных конструкций путем описывания вокруг поперечного сечения большого круга с последующим его разбиением на малые квадраты с вписанными в них кругами. **Результаты.** Сформулированы три теоремы, первая из которых связывает накопление касательных напряжений (приращения) от граней прямоугольника до середины прямоугольного сечения с формулой определения касательных напряжений для круглых сечений. Вторая теорема позволяет установить связь между касательными напряжениями, вычисленными для каждого из малых квадратов-крутов, и касательными напряжениями большого круга через их приращение. Третья теорема дает возможность найти касательные напряжения для каждого из малых квадратов-крутов. Предложенный подход позволяет снять вопрос о необходимости использования специальных таблиц для расчета и не только в упругой стадии. Он также позволяет отделить напряженно-деформированное состояние в целом наборе круглых сечений от дополнительного поля, связанного с деформацией прямоугольного сечения. Помимо этого, представленные подходы дают возможность учитывать концентрацию угловых деформаций во входящих углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах.

**Ключевые слова:** методика расчета; кручение; напряженно-деформированное состояние; сопротивление материалов; деформация; концентрация; растворение; конденсация; статико-геометрические характеристики; железобетонные стержни

## Введение

Из сопротивления материалов известно, что задачу определения напряжений и деформаций при кручении стержня некруглого поперечного сечения нельзя решить методами, базирующимися на упрощенных предпосылках этой экспериментально-тео-

ретической науки, являющейся одним из разделов строительной механики. Такая задача обычно решается с использованием методов теории упругости и пластичности [1–3]. Тем не менее использование рабочих гипотез сопротивления материалов применительно к стержневым конструкциям весьма привлекательно. В связи с этим возникает резонный вопрос о степени категоричности утверждения о том, что нельзя решить обозначенную выше задачу методами сопротивления материалов? Все ли подходы [4–12] и резервы при этом исчерпаны?

Целью настоящего исследования является продолжение разработки методики определения напряженно-деформированного состояния стержней при

Колчунов Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры уникальных зданий и сооружений.  
Демьянов Алексей Иванович, кандидат технических наук, доцент кафедры уникальных зданий и сооружений.  
Наумов Николай Валерьевич, аспирант кафедры уникальных зданий и сооружений.

© Колчунов Вл.И., Демьянов А.И., Наумов Н.В., 2019

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

кручении методами сопротивления материалов. В задачи исследования входила разработка оригинальных подходов и методик для достижения поставленной цели.

### 1. Расчетная модель. Решение основных задач

В ходе исследования попытаемся получить решение поставленных задач, оставаясь в рамках гипотез сопротивления материалов. Для решения задачи будем аппроксимировать различные сечения стержней с помощью разбивки их на малые квадраты с последующим вписыванием в эти квадраты кругов. Тогда применительно к этим малым кругам, составляющим поперечное сечение стержней любой формы, будут справедливы формулы сопротивления материалов, полученные для круглых поперечных сечений. При этом необходимо решить три сопутствующие задачи: во-первых, учесть деформацию поперечных сечений стержней некруглой произвольной формы с помощью какой-либо рекуррентной формулы; во-вторых, корректно просуммировать элементарные круги, посредством которых аппроксимируется поперечное сечение любой формы с распределением приходящихся на них крутящих моментов; в-третьих, учесть наличие концентрации деформаций в зоне входящих углов поперечного сечения произвольной формы и местной деформации в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах, а также ее «возврата» в местах, соседствующих с квадратами с нулевой жесткостью.

Решение первой из этих задач предложено нами в работах [7; 13]. При этом основные поправки будут касаться деформации некруглых поперечных сечений.

Для решения второй задачи, будем использовать следующий подход. Вокруг некруглого поперечного сечения описывается большой круг, в котором условно «растворяется» фигура поперечного сечения. При этом все поле большого круга разбивается на ряд квадратов, которые впоследствии заменяются вписанными в них малыми кругами. Малые круги, попавшие в зону, ограниченную контуром поперечного сечения стержня, служат в качестве «конденсирующих» – в них сосредотачиваются элементы жесткости и эффективные значения параметров напряженно-деформированного состояния, которые обеспечивают сопротивление поперечного сечения стержня сдвигу при кручении.

Ранее нами была рассмотрена подобная задача только с одним рядом разбивки по ширине прямоугольного сечения на малые круги [7].

Проанализировав все недостатки отмеченного разбиения, мы усовершенствовали предлагаемый подход. А именно: описываемый круг включает в себя уже не три малых круга, а целый набор таких кругов, которые аппроксимируют любое поперечное сечение, например фигура А – В – С – D для прямоугольного сечения (рис. 1).

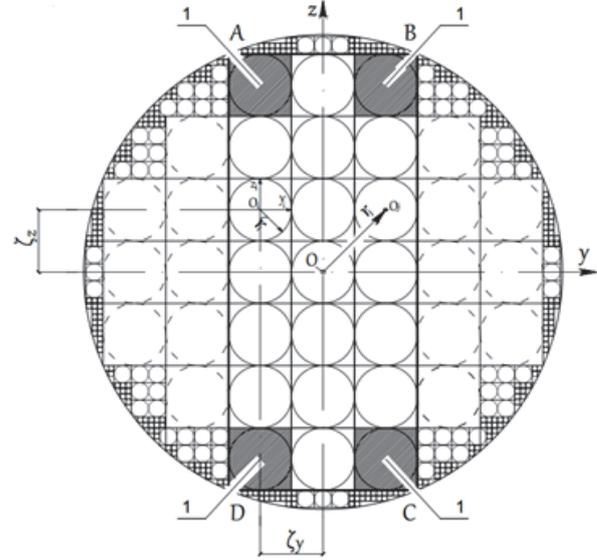


Рис. 1. Аппроксимация прямоугольного поперечного сечения стержня с помощью квадратов и вписанных в них кругов [Figure 1. Approximation of a rectangular cross-section of rods using squares and circles inscribed in them]

Теперь применительно к большому кругу, включающему в себя в том числе и поперечное сечение произвольной формы (рис. 1), можно использовать формулы сопротивления материалов для круглых стержней. Такие формулы справедливы и для каждого из малых кругов, на которые в свою очередь разбит большой круг. В результате представляется возможным записать рекуррентные формулы применительно к расчету стержней произвольного поперечного сечения с введением необходимых поправочных коэффициентов.

### 2. Введение понятий и формулировка теорем

Анализируя предложенный подход, возникает необходимость во введении понятия эквивалентности между характеристиками крутильной жесткости прямоугольного сечения и круга, описанного вокруг этого прямоугольного сечения:

$$G_{\text{equ}} = \frac{G_{\text{rec}} \cdot I_{\text{rec}}}{I_{\text{bcir}}} = \frac{G_{\text{rec}} \cdot \sum_{i=1}^n (I_{t,i} + r_j^2 \cdot A_i)}{I_{\text{bcir}}}, \quad (1)$$

где  $I_{bcir}$  – полярный момент инерции большого круга, описанного вокруг прямоугольного сечения;  $G_{rec}$  – модуль сдвига материала прямоугольного сечения;  $I_{rec}$  – полярный момент инерции прямоугольного сечения;  $I_{t,i,j}$  – полярный момент инерции малых квадратов-кругов, попадающих в контур прямоугольного сечения;  $n$  – число малых квадратов-кругов, попадающих в контур прямоугольного сечения;  $G_{equ}$  – «эквивалентный» модуль сдвига, связанный с «растворением» в большом круге поперечного сечения произвольной формы, состоящего из ряда малых кругов;  $r_j$  – расстояние между центрами большого круга  $O$  и малого круга  $O_i$ ;  $A_i$  – площадь  $i$ -того круга.

Для приведения значений полярных моментов к большому кругу будем использовать коэффициент  $\alpha$ , отыскиваемый по формуле

$$\alpha = \frac{G_{rec}}{G_{equ}}. \quad (2)$$

В предложенном подходе будем различать не только касательные напряжения  $\tau_1$ , возникающие при кручении круглых сечений, но и их приращения  $\Delta\tau$  при рассмотрении полосок (сечений), располагаемых от периметра прямоугольного сечения или сечения сложной формы («растворяемых» в описанном большом круге) к его центру, а также значения касательных напряжений, вычисленные для каждого из малых квадратов-кругов в полоске (сечении) и обозначенные как  $\tau_2$ .

Согласно определению касательных напряжений, в любом круге  $\tau_1$  находится по формуле

$$\tau_1 = \frac{M_t}{I_{bcir}} \cdot r_j = \frac{M_t}{I_{rec} \cdot \alpha} \cdot r_j = \sum \Delta\tau, \quad (3)$$

где  $M_t$  – крутящий момент, действующий на прямоугольное сечение.

Применительно к  $\Delta\tau$  для любой полоски (сечения), расположенной в пределах большого круга, формула (3) может быть преобразована к виду

$$\Delta\tau = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{bcir}} \cdot r_j = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{rec} \cdot \alpha} \cdot r_j, \quad (4)$$

где  $M_{t,i}$  – крутящий момент, приходящийся на каждый  $i$ -тый малый квадрат-круг;  $f$  – число малых квадратов-кругов в одной полоске (сечении);  $I_{t,i,j}$  – полярный момент инерции соответ-

ствующего  $i$ -того квадрата-круга относительно геометрического центра  $O$  большого круга, равный собственному полярному моменту инерции  $I_{t,i}$ , складываемому с добавочным, равным произведению квадрата расстояния  $r_j$  между центром  $O$  и центром  $i$ -того малого квадрата-круга  $O_i$  на площадь  $i$ -того малого квадрата-круга  $A_i$ .

Действительно, сумма  $M_{t,i}$ , стоящего в числителе формулы (4), равна суммарному моменту  $M_t$  в формуле (3). Таким образом, формула (4) представляет собой некое разложение формулы (3) по приращениям. При этом отдельное приращение может иметь качественно иной вид, чем сумма этих приращений. Здесь можно провести аналогию между касательными напряжениями  $\tau$  и накапливаемыми сдвигающими силами  $T$  [14].

Запишем формулу для определения касательных напряжений  $\tau_2$ , вычисленных для каждого из малых квадратов-кругов в полоске (сечении) вертикальной или горизонтальной аналогично формуле (3):

$$\tau_2 = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{t,i,j} \cdot \alpha} \cdot r_j. \quad (5)$$

Распределение крутящего момента, действующего в большом круге на его составляющие, приходящиеся на каждый малый  $i$ -тый квадрат-круг, определяется по формуле, вытекающей из пропорциональности сдвиговых жесткостей:

$$M_{t,i} = M_t \cdot \frac{A_i \cdot G_{rec}}{A_{rec} \cdot G_{rec}} = M_t \cdot \frac{A_i}{A_{rec}}. \quad (6)$$

Важно заметить, что для распределенного крутящего момента должно выполняться соотношение, вытекающее из условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^n M_{t,i} = M_t. \quad (7)$$

При обобщении предложенного подхода были выявлены некоторые общие закономерности, которые могут быть представлены в виде следующих теорем.

**Теорема 1.** Сумма приращений касательных напряжений  $\Delta\tau$ , накапливаемых в полосках (сечениях) от краев к середине прямоугольного сечения, вписанного в большой круг относительно центра этого большого круга, совпадающего с центром

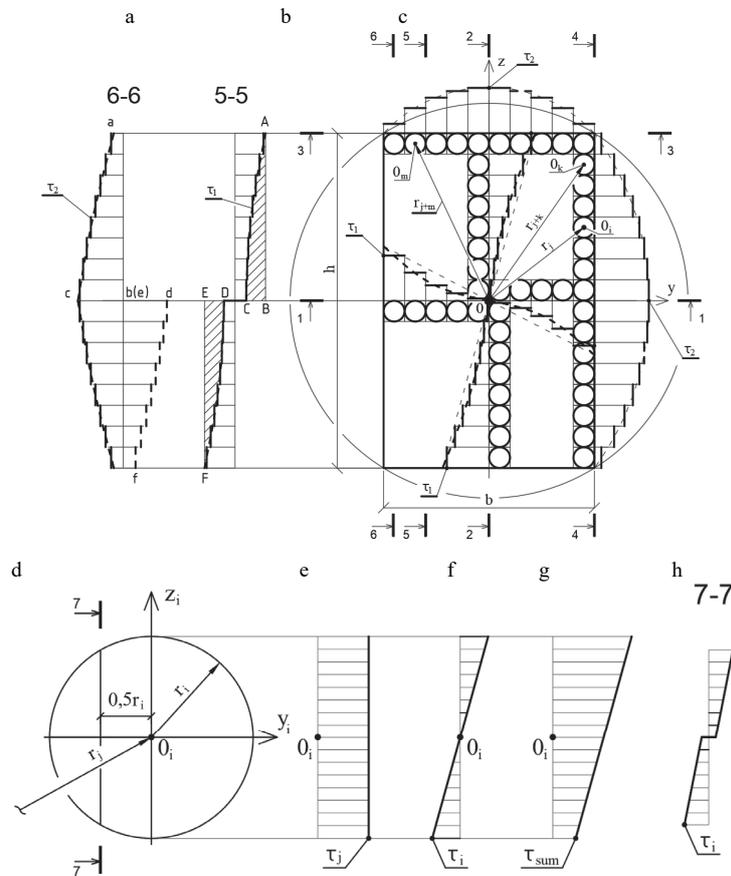
прямоугольника, равна касательным напряжениям  $\tau_1$  в любой выбранной точке этого большого круга с учетом соответствующих «эквивалентных» и «конденсируемых» характеристик.

$$\sum_{i=1}^{n/2} \Delta\tau = \sum_{m=1}^k \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{\text{rec}} \cdot \alpha} \cdot r_j = \tau_1 = \frac{M_t}{I_{\text{bcir}}} \cdot r_j, \quad (8)$$

где  $k$  – число полосок (сечений) вертикальных или горизонтальных, на которые разбивается прямоугольное поперечное сечение (рис. 2, *c*) от края сечения до сечения, в котором определяется  $\tau_1$ ;  $f$  – число малых квадратов-кругов в одной полоске (сечении).

Таким образом интегральная эпюра  $\Delta\tau$  (просуммированная) трансформируется в эпюру  $\tau_1$ , построенную для центрального сечения круга.

**Доказательство теоремы 1.** Просуммируем составляющие, стоящие в числителе формул, для определения  $\Delta\tau$  по всем полоскам (включающим набор малых квадратов-кругов вдоль выбранного сечения) от краев до середины прямоугольного сечения. Тогда в числителе получим значение полного момента  $M_t$ , а в знаменателе – значение полного момента инерции для произвольного поперечного сечения, «растворяемого» в большом круге. Полученная эпюра принимает вид, обусловленный формулой для определения касательных напряжений  $\tau_1$ .



**Рис. 2.** Эпюры приращений касательных напряжений (*a, c*) и эпюры касательных напряжений в различных сечениях (*b, c*) для прямоугольного сечения и описанного вокруг него большого круга; поперечное сечение малого  $i$ -того круга (*d*) с усредненной эпюрой касательных напряжений кручения  $\tau_{t,j,i,\text{spr}}$  в  $i$ -том круге (*e*), эпюрой местных напряжений  $\tau_{\text{loc}}$  в  $i$ -том круге (*f*) и суммарной эпюрой  $\tau_{t,j,i,\text{spr}}$  и  $\tau_{\text{loc}}$  в  $i$ -том круге (*g*), эпюрой местных напряжений на расстоянии  $0,5 r_i$  от центра  $O_i$  (*h*)

[**Figure 2.** Diagrams of increments of tangential stresses (*a, c*) and diagrams of tangential stresses in various sections (*b, c*) for a rectangular section and a large circle described around it; the cross section of the small  $i$ -th circle (*d*) with the averaged diagram of tangential torsional stresses  $\tau_{t,j,i,\text{spr}}$  in the  $i$ -th circle (*e*), the diagram of local stresses  $\tau_{\text{loc}}$  in the  $i$ -th circle (*f*) and the total diagram of  $\tau_{t,j,i,\text{spr}}$  and  $\tau_{\text{loc}}$  in the  $i$ -th circle (*g*), the diagram of local stress at a distance of  $0,5 r_i$  from the center  $O_i$  (*h*)]

**Теорема 2.** Значения касательных напряжений, вычисленные для каждого из малых квадратов-кругов  $\tau_2$ , могут быть выражены через приращения  $\Delta\tau$ .

$$\tau_2 = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{t,i,j} \cdot \alpha} \cdot r_j = \Delta\tau \cdot p, \quad (9)$$

где  $p$  – функция от  $I_{t,i,j}$ .

**Доказательство теоремы 2.** Введем в числитель и знаменатель полярный момент инерции большого круга  $I_{bcir}$ , после заменим часть выражения на  $\Delta\tau$  по формуле (4). Часть, оставшуюся без изменений, обозначим через  $p$ .

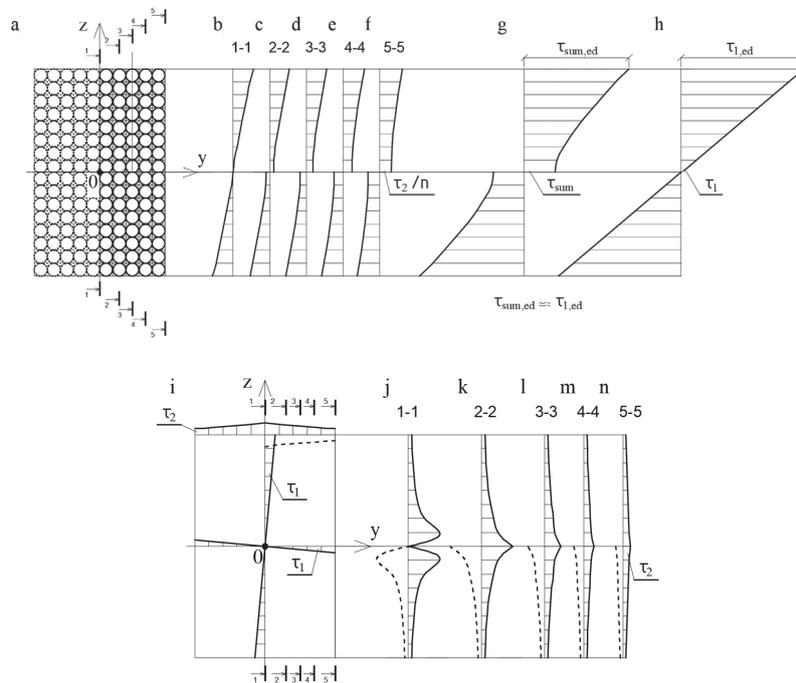
$$\tau_2 = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{t,i,j} \cdot \alpha} \cdot r_j = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{bcir}} \cdot \frac{I_{bcir}}{I_{t,i,j} \cdot \alpha} \cdot r_j = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{bcir}} \cdot r_j \cdot p = \Delta\tau \cdot p. \quad (10)$$

$$p = \frac{I_{bcir}}{I_{t,i,j} \cdot \alpha} = \frac{I_{bcir}}{(I_{t,i} + A_i \cdot r_j^2) \cdot \alpha}. \quad (11)$$

Как видно из полученного выражения, значение  $p$  имеет зависимость от  $I_{t,i,j}$ .

Теорема 2 позволяет установить связь между касательными напряжениями  $\tau_2$  и касательными напряжениями большого круга  $\tau_1$  через их приращение  $\Delta\tau$ .

**Следствие из теоремы 2.** Установленная взаимосвязь эпюр  $\tau_1$  и  $\tau_2$  через  $\Delta\tau$  позволяет сравнить их и отметить, что с учетом знаков они взаимодополняют друг друга до прямоугольника (рис. 4).



**Рис. 3.** Аппроксимация прямоугольного поперечного сечения при помощи малых квадратов-кругов (a); эпюры приращений  $\Delta\tau$  в сечениях 1-1 – 5-5 (b-f); суммарная эпюра (g); эпюра касательных напряжений  $\tau_1$  в большом круге (h); прямоугольное сечение с эпюрами  $\tau_1$  в центральных сечениях и эпюрами  $\tau_2$  на гранях сечения (i); эпюры  $\tau_2$  в сечениях 1-1 – 5-5 (j-n)

**[Figure 3.** Approximation of a rectangular cross-section using small squares-circles (a); distribution of increments  $\Delta\tau$  in sections 1-1 – 5-5 (b-f); summed distribution (g); distribution of tangential stresses in a large circle (h); rectangular cross-section with distribution of  $\tau_1$  in the central sections and distribution of  $\tau_2$  on the edges of the section (i); distribution of  $\tau_2$  in sections 1-1 – 5-5 (j-n)]

**Теорема 3.** Значения касательных напряжений, вычисленные для каждого из малых квадратов-кругов, обозначенные через  $\tau_2$ , для сечений (полосок, включающих набор малых квадратов-кругов вдоль выбранного сечения), расположенных вблизи контурных граней прямоугольника, то есть достаточно удаленных от центра  $O$ , обратно пропорциональны радиусам  $r_j$ , проведенным из центра большого круга до центра соответствующего  $i$ -того квадрата-круга.

$$\tau_2 = \frac{M_t}{A_t} \cdot \frac{1}{r_j}. \quad (12)$$

**Доказательство теоремы 3.** В соответствии с формулой (4) полярный момент инерции соответствующего  $i$ -того квадрата-круга относительно центра тяжести  $O$  большого круга  $I_{t,i,j}$  равен собственному полярному моменту инерции  $I_{t,i}$ , складыва-

емому с добавочным, равным произведению квадрата расстояния между центром  $O$  и центром  $i$ -того малого квадрата-круга  $O_i$  на площадь  $i$ -того квадрата-круга. При этом, если квадраты-круги находятся в сечениях – полосках, включающих набор малых квадратов-кругов вдоль выбранного сечения, удаленных от центра  $O$  (например, в сечениях, расположенных вблизи контурных граней прямоугольника), значениями собственных полярных моментов инерции можно пренебречь по сравнению с добавочными моментами инерции. Тогда из формулы (4) получим:

$$\tau_2 = \frac{\sum_{i=1}^f M_{t,i}}{I_{t,i,j} \cdot \alpha} \cdot r_j = \frac{M_t \cdot \sum_{i=1}^f A_i}{A_i \cdot r_j^2 \cdot \alpha} \cdot r_j = \frac{M_t \cdot f}{A_{\text{rec}} \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{r_j} \quad (13)$$

В полученной формуле (13)  $\tau_2$  обратно пропорционально  $r_j$ , что и требовалось доказать.

Использование эпюр таких напряжений  $\tau_2$  позволяет выполнить аппроксимацию распределения касательных напряжений кручения прямоугольников как в центральных сечениях, так и в сечениях, расположенных по его периметру (рис. 2,  $a-c$  и 3,  $a-h$ ).

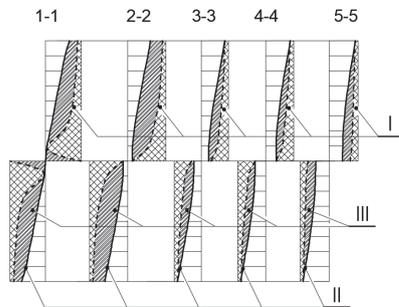


Рис. 4. Дополнение эпюр  $\Delta\tau(I)$  до прямоугольников эпюрами  $\tau_2(II)$  и  $\tau_{\text{dep}}(III)$  в сечениях 1-1 – 5-5

[Figure 4. Adding diagrams  $\Delta\tau(I)$  to rectangles with diagrams  $\tau_2(II)$  and  $\tau_{\text{dep}}(III)$  in sections 1-1 – 5-5]

### 3. Методика для учета деформации и концентрации угловых деформаций

Теперь остановимся на таких аспектах решения задачи, как учет концентрации напряженно-деформированного состояния (решение третьей задачи) и учет местной деформации. Для простоты рассмотрим эти аспекты на стержнях, состоящих из одно-

го материала, для поперечных сечений произвольной формы (для составных стержней отмеченные аспекты учитываются аналогично).

Картина распределения деформаций на участках стержней, прилегающих к нормальным сечениям, вырезающим узел [7; 13], напоминает, еще до появления трещин, картину, аналогичную выявленной В.И. Мурашевым в стадии трещинообразования. Поэтому представляется наиболее приемлемым учитывать такую концентрацию деформаций с помощью коэффициента  $\psi_{b,\tau}$  по физическому смыслу, аналогичному коэффициенту  $\psi_s$ , введенному в теорию железобетона В.И. Мурашевым [14]. Это позволяет оперировать в проведенных сечениях средними значениями деформаций, для которых уже справедлива гипотеза плоских поворотов. В стадии, когда сопротивление железобетонного стержня близко к упругому, коэффициент  $\psi_{b,\tau}$  определяется с привлечением коэффициента концентрации деформаций  $k$  [7, 13]:

$$\psi_{b,\tau} = 1 - \omega_\gamma \frac{k-1}{k}, \quad (14)$$

где  $\omega_\gamma$  – коэффициент заполнения эпюры деформаций растянутой арматуры (или сжатого бетона) на участках, отстоящих на  $h$  от центра узла.

При этом значения коэффициента  $k$  определяются по справочным данным или могут быть получены с использованием метода конечных элементов (МКЭ).

Важным элементом предлагаемого подхода является также предоставляемая возможность (из-за разбиения сечения на малые квадраты-круги) учета местной деформации в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах, а также ее «возврата» в местах, соседствующих с квадратами с нулевой жесткостью.

При учете местной деформации получим:

$$w = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot f(y, z) \cdot f_2(x) = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot y \cdot z \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) + w_{\text{loc}}, \quad (15)$$

где  $w_{\text{loc}}$  – местная деформация.

Ее целесообразно выразить сразу через составляющие относительных угловых деформаций  $\gamma_{\text{dep},yx,\text{loc}}$  и  $\gamma_{\text{dep},zx,\text{loc}}$ , которые отсчитываются в предлагаемой методике относительно плоскости большого круга.

$$\gamma_{\text{dep},yx} \pm \gamma_{\text{dep},yx,\text{loc}} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot z \pm \pm \left( \frac{M_t}{I_t \cdot \alpha \cdot G_{\text{equ}}} \cdot r_{j,A^*} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i} \cdot \alpha \cdot G} \cdot r_{i,A^*} \right)_{yx} \leq \gamma_{\text{dep},yx,ul}, \quad (16)$$

$$\gamma_{\text{dep},zx} \pm \gamma_{\text{dep},zx,\text{loc}} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot y \pm \pm \left( \frac{M_t}{I_t \cdot \alpha \cdot G_{\text{equ}}} \cdot r_{j,A^*} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i} \cdot \alpha \cdot G} \cdot r_{i,A^*} \right)_{zx} \leq \gamma_{\text{dep},zx,ul}, \quad (17)$$

где  $\gamma_{\text{dep},yx,ul}$  и  $\gamma_{\text{dep},zx,ul}$  – составляющие предельных относительных угловых деформаций депланации;  $\gamma_{\text{dep},yx}$  и  $\gamma_{\text{dep},zx}$  – составляющие относительных угловых деформаций депланации;  $\gamma_{\text{dep},yx,\text{loc}}$  и  $\gamma_{\text{dep},zx,\text{loc}}$  – составляющие относительных угловых деформаций местной депланации, возникающих в малых квадратах-кругах, расположенных на гранях сечения и в других местах с резко изменяющимися геометрическими параметрами, точках  $A^*$ , переходящих из плоскости поперечного сечения  $YOZ$  во взаимно перпендикулярные плоскости  $XOZ$  и  $YOX$ .

Составляющие  $\gamma_{\text{dep},yx,\text{loc}}$  и  $\gamma_{\text{dep},zx,\text{loc}}$  определяются с использованием закона парности касательных напряжений, при этом выбор знака перед ними выполняется в зависимости от того, в каком квадранте прямоугольников (на которые разбивается поперечное сечение любой формы) расположена точка  $A^*$ .

Наконец, необходимо учесть наличие концентрации угловых деформаций в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах, а также в направлении оси  $x$ , то есть применительно к местной депланации. При этом коэффициент концентрации  $\psi_{b,\tau,\text{loc}}$  вдоль продольной оси стержня  $x$  определяется по аналогии с зависимостью (14) с привлечением коэффициента концентрации деформаций  $k_{1\text{loc}}$ :

$$\psi_{b,\tau,\text{loc}} = 1 - \omega_{\gamma,\text{loc}} \frac{k_{1\text{loc}} - 1}{k_{1\text{loc}}}, \quad (18)$$

где параметры  $\omega_{\gamma,\text{loc}}$  и  $k_{1\text{loc}}$  по смыслу аналогичны параметрам, используемым в формуле (14), с той только разницей, что они характеризуют местное, а не общее поле угловых деформаций.

При этом значения коэффициента  $k_{1\text{loc}}$  легко могут быть получены с использованием МКЭ и

с учетом особенностей работы зоны сопряжения как плосконапряженного (или объемного) элемента при его упругом сопротивлении.

В итоге касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения произвольной формы с учетом предлагаемых подходов складываются из следующих составляющих:

$$\begin{aligned} \tau_{t,A} &= \tau_{t,j,A,\text{cond}} + \tau_{t,i,A,\text{cond}} + \tau_{\text{loc}} + \tau_{\text{conc}} \pm \tau_{\text{conc},\text{loc}} = \\ &= \frac{M_t}{I_t \cdot \alpha} \cdot r_{j,A} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i} \cdot \alpha} \cdot r_{i,A} + \tau_{\text{loc}} + \tau_{\text{conc}} \pm \tau_{\text{conc},\text{loc}} = \\ &= \frac{M_t}{I_t \cdot \alpha} \cdot \sqrt{y_{j,A}^2 + z_{j,A}^2} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i} \cdot \alpha} \cdot \sqrt{y_{i,A}^2 + z_{i,A}^2} + \\ &+ \tau_{\text{loc}} + \tau_{\text{conc}} \pm \tau_{\text{conc},\text{loc}} \leq \tau_{t,u}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\tau_{t,j,A,\text{cond}}$  и  $\tau_{t,i,A,\text{cond}}$  – касательные напряжения в произвольной точке  $A$  большого круга, описанного вокруг произвольного поперечного сечения после «конденсации» статико-геометрических характеристик сечения, «растворенного» по этому кругу, и касательные напряжения в произвольной точке  $A$  малого квадрата-круга после «конденсации» соответственно, эквивалентные касательным напряжениям  $\tau_1$ , вычисленным по формуле для круглого сечения (рис. 2,  $d, e, f, g$ );

$r_{j,A}$ ,  $y_{j,A}$ ,  $z_{j,A}$  – расстояния от центра большого круга, описанного вокруг поперечного сечения стержня, до произвольной точки  $A$ , находящейся в малом  $j$ -том круге, в которой определяются значения касательных напряжений кручения  $\tau_t$  и ее координаты в общей системе координат  $YOZ$ ;  $M_t$  – крутящий момент, действующий в поперечном сечении стержня;  $I_t$  – площадь и полярный момент инерции поперечного сечения стержня, аппроксимированного малыми квадратами-кругами;  $\tau_{\text{conc}}$ ,  $\tau_{\text{conc},\text{loc}}$  – касательные напряжения, обусловленные силовой, геометрической и межсредовой концентрацией деформаций, а также составляющие, вызванные местной концентрацией, находятся путем умножения касательных напряжений в зонах концентрации на коэффициенты, полученные из формул (14) и (18) соответственно;  $r_{i,A}$ ,  $y_{i,A}$ ,  $z_{i,A}$  – расстояния от центра малого  $i$ -того круга до произвольной точки  $A$ , находящейся в малом  $i$ -том круге, в которой определяются значения касательных напряжений кручения  $\tau_t$  и ее координаты в местной системе координат  $Y_iO_iZ_i$ ;  $M_{t,i}$  – крутящий

момент, приходящийся на  $i$ -тый малый круг, на которые разбито поперечное сечение стержня;  $I_{t,i}$  – полярный момент инерции  $i$ -того малого круга, на которые разбито поперечное сечение стержня (складывается из собственного полярного момента инерции и добавочного, равного  $r_j^2 \cdot A_i$ );  $\tau_{t,u}$  – предельные значения касательных напряжений кручения.

Дополнительно к равнодействующим  $\tau_{t,A}$ , отыскиваемым по формуле (19), для соответствующих кругов необходимо учитывать составляющие, связанные с деформацией прямоугольного сечения [7].

Тогда, складывая составляющие касательных напряжений при кручении  $\tau_{t,A,xy}$ ,  $\tau_{t,A,xz}$ ,  $\tau_{\text{dep},yx}$  и  $\tau_{\text{dep},zx}$ , получим результирующее напряжение  $\tau_{\text{sum},A}$ .

$$\tau_{\text{sum},A} = \sqrt{(\tau_{t,A,xy} + \tau_{\text{dep},\text{sum},xy})^2 + (\tau_{t,A,xz} + \tau_{\text{dep},\text{sum},xz})^2}, \quad (20)$$

где  $\tau_{\text{dep},\text{sum},xy}$ , и  $\tau_{\text{dep},\text{sum},xz}$  – суммарные составляющие касательных напряжений деформации, общей и местной, усредненные в  $i$ -том круге.

Разработанную методику также можно применять для стержней составного сечения, но при этом необходимо принимать во внимание, что распределение действующего в поперечном сечении крутящего момента выполняется пропорционально соотношениям между общей сдвиговой жесткостью поперечного сечения и сдвиговой жесткостью каждого из приведенных малых кругов (на которые разбито поперечное сечение) относительно общего геометрического центра поперечного сечения:

$$\begin{aligned} M_{t,1} &= M_t \frac{A_{t,1} \cdot G_1}{A_t \cdot G_1} = M_t \frac{A_{t,1}}{A_t}, \\ M_{t,2} &= M_t \frac{A_{t,2} \cdot G_2}{A_t \cdot G_1}, \dots \\ M_{t,i} &= M_t \frac{A_{t,i} \cdot G_i}{A_t \cdot G_1}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_i$  – модули сдвига для 1, 2 и  $i$ -того малых кругов соответственно (для кругов, попадающих в большой круг, но выходящих за контуры поперечного сечения стержня произвольной формы, принимаются равным нулю).

## Выводы

По результатам проведенного исследования предложен новый подход в виде разработанной методики для определения касательных напряжений кручения для стержней произвольного поперечного сечения, базирующийся на упрощенных предположениях сопротивления материалов. Его особенность заключается в аппроксимации прямоугольных и любых сложных поперечных сечений конструкций (в том числе железобетонных) с помощью их разбивки на квадраты с вписанными в них кругами.

При этом для определения касательных напряжений кручения в произвольной точке  $A$  в соответствующем круге поперечного сечения, расположенном на расстоянии  $x$  от опоры, вначале отыскиваются касательные напряжения для этой точки в большом круге после «растворения» его статико-геометрических характеристик по этому кругу, которые затем суммируются с касательными напряжениями малого круга для этой же точки  $A$ .

В пределах большого и каждого  $i$ -ого круга становится справедливой зависимость касательных напряжений кручения от расстояния до центра рассматриваемого круга, до произвольной точки  $A$ , расположенной в большом круге, в  $i$ -том малом круге. Максимальные напряжения, согласно предлагаемой методике, достигаются в серединах длинных сторон прямоугольника, что соответствует их действительному распределению. При этом такая модель позволяет снять вопрос о необходимости использования специальных таблиц для расчета и не только в упругой стадии.

Предлагаемый подход также позволяет отделить напряженно-деформированное состояние в целом наборе круглых сечений от дополнительного поля, связанного с деформацией прямоугольного сечения. Нами откорректированы и существенно дополнены зависимости для учета деформации стержня прямоугольного поперечного сечения, введено понятие и предложены зависимости для учета местной деформации. Акцентируется внимание на физической сути продольных перемещений, обусловленных деформацией, проводится аналогия с элементарными перемещениями, вызываемыми сдвиговыми усилиями.

Предложенная методика позволяет учитывать концентрацию угловых деформаций во входящих углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах как относительно плоскости поперечного сечения, так и в направлении продольной оси стержня. При этом используется прием, аналогичный введенному в теорию железобетона В.И. Мурашевым [14], который применим и после появления трещин в железобетонных стержнях.

### Список литературы

1. Гольшиев А.Б. Сопротивление железобетона. К.: Основа, 2009. 432 с.
2. Бондаренко В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: АСВ, 2004. 472 с.
3. Iakovenko I., Kolchunov V., Lymar I. Rigidity of reinforced concrete structures in the presence of different cracks // MATEC Web of Conferences. 6<sup>th</sup> International Scientific Conference “Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings”. Transbud–2017. Vol. 116. Article 02016. Pp. 1–12.
4. Demyanov A., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending // Journal of Applied Engineering Science. 2017. Vol. 15. Article 456. Pp. 377–382.
5. Jariwalaa V.H., Patel P.V., Purohit S.P. Strengthening of RC Beams Subjected to Combined Torsion and Bending with GFRP Composites // Procedia Engineering. 2013. Vol. 51. Pp. 282–289.
6. Rahal K.N., Collins M.P. Compatibility Torsion in Spandrel Beams Using Modified Compression Field Theory // ACI Structural Journal. 2006. Vol. 103. No. 3. Pp. 328–338.
7. Demyanov A.I., Kolchunov V.I.I. To the approximation of rectangular and complex cross-sections of reinforced concrete structures under the action torsion with bending // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456. Article 012104. Pp. 1–12.
8. David A.E., Thomas L.H., Simon A.N., Jonathan E.C. Veering and nonlinear interactions of a clamped beam in bending and torsion // Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 416. Pp. 1–16.
9. Loïc B., Guilhem M., Rached F., Bruno C. Static and dynamic analysis of bending–torsion coupling of a CFRP sandwich beam // Composite Structures. 2016. Vol. 145. Pp. 26–36.
10. Ogawa Y., Kawasaki Y., Okamoto T. Fracture behavior of RC members subjected to bending shear and torsion using acoustic emission method // Construction and Building Materials. 2014. Vol. 67. Pp. 165–169.
11. Lukina A.A., Kholopova I.S., Alpatova V.Y., Solovieva A.V. Beams with corrugated web: calculation peculiarities of bending torsion analysis // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153. Pp. 414–418.
12. Kashani M.T., Hashemi S.M. A finite element formulation for bending-torsion coupled vibration analysis of delaminated beams under combined axial load and end moment // Shock and Vibration. 2018. Vol. 2018. Article 1348970. Pp. 1–13.
13. Колчунов Вл.И., Демьянов А.И. К определению напряженно-деформированного состояния стержней произвольного поперечного сечения при кручении методами сопротивления материалов // Строительство и реконструкция. 2019. № 1 (81). С. 10–22.
14. Мурашев В.И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона. М.: Машстройиздат, 1950. 268 с.

RESEARCH PAPER

## Theory of “dissolution” and “condensation” of the physical geometric characteristics of an arbitrary cross-section under the action of torsion with bending

Vladimir I. Kolchunov\*, Aleksey I. Demyanov, Nikolay V. Naumov

South-West State University, 94 50 Let Oktyabrya St., Kursk, 305040, Russian Federation

\*vlik52@mail.ru

### Article history:

Received: June 11, 2019

Revised: July 29, 2019

Accepted: August 09, 2019

### Abstract

**Aim of research** – to continue the development of methods for determining the stress-strain state of rods during torsion using materials resistance methods. **Methods.** A new approach for determining tangential torsional stresses for arbitrary cross sectional rods, based on simplified assumptions of material resistance, is proposed. The main feature of this approach is the approximation of rectangular or any complex cross section of reinforced concrete structures by describing a large circle around the cross section and splitting it into small squares with circles inscribed into them. **Results.** Three theorems have been formulated, the first of which relates the accumulation of tangential stresses (increments) from the edges of a rectangle to the middle of a rectangular section with the formula for determining tangent stresses for round sections. The second theorem allows to establish a connection between the tangential stresses calculated for each of the small squares-circles and the tangent stresses of the large circle through their increments. The third theorem makes it possible to find tangential stresses for each of the small square circles. The proposed

*For citation*

Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Naumov N.V. (2019). Theory of “dissolution” and “condensation” of the physical geometric characteristics of an arbitrary cross-section under the action of torsion with bending. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(4), 261–270. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-261-270>

approach allows to remove the need to use special tables for the calculation and not only in the elastic stage. It also makes it possible to separate the stress-strain state in the whole set of round cross-sections from the additional field caused by the deplanation of the rectangular cross-section. In addition, the proposed approach makes it possible to take into account the concentration of angular deformations in the incoming angles and other places with changing geometric parameters.

*Keywords:* calculation methodics; torsion; stress-strain state; resistance of materials; deplanation; concentration; dissolution; condensation; static geometric characteristics; reinforced concrete rods

## References

1. Golyshev A.B. (2009). *Soprotivlenie zhelezobetona [The resistance of reinforced concrete]*. Kiev, Osnova Publ., 432. (In Russ.)
2. Bondarenko V.M. (2004). *Raschetnye modeli silovogo soprotivleniya zhelezobetona [The computational model of a power resistance of reinforced concrete]*. Moscow, ASV Publ., 472. (In Russ.)
3. Iakovenko I., Kolchunov V., Lyar I. (2017). Rigidity of reinforced concrete structures in the presence of different cracks. *MATEC Web of Conferences. 6th International Scientific Conference “Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings”*. *Transbud–2017*, 116, 02016, 1–12. doi: 10.1051/mateconf/201711602016
4. Demyanov A., Kolchunov V.I. (2017). The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending. *Journal of Applied Engineering Science*, 15, 456, 377–382. doi: 10.5937/jaes15-14663
5. Jariwalaa V.H., Patel P.V., Purohit S.P. (2013). Strengthening of RC Beams Subjected to Combined Torsion and Bending with GFRP Composites. *Procedia Engineering*, 51, 282–289.
6. Rahal K.N., Collins M.P. (2006). Compatibility Torsion in Spandrel Beams Using Modified Compression Field Theory. *ACI Structural Journal*, 103(3), 328–338.
7. Demyanov A.I., Kolchunov V.I. (2018). To the approximation of rectangular and complex cross-sections of reinforced concrete structures under the action torsion with bending. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 456, 012104, 1–12. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012104
8. David A.E., Thomas L.H., Simon A.N., Jonathan E.C. (2018). Veering and nonlinear interactions of a clamped beam in bending and torsion. *Journal of Sound and Vibration*, 416, 1–16.
9. Loïc B., Guilhem M., Rached F., Bruno C. (2016). Static and dynamic analysis of bending-torsion coupling of a CFRP sandwich beam. *Composite Structures*, 145, 26–36. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.02.055
10. Ogawa Y., Kawasaki Y., Okamoto T. (2014). Fracture behavior of RC members subjected to bending shear and torsion using acoustic emission method. *Construction and Building Materials*, 67, 165–169. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2014.05.100
11. Lukina A.A., Kholopova I.S., Alpatova V.Y., Solovieva A.V. (2016). Beams with corrugated web: calculation peculiarities of bending torsion analysis. *Procedia Engineering*, 153, 414–418. doi: 10.1016/j.proeng.2016.08.143
12. Kashani M.T., Hashemi S.M. (2018). A finite element formulation for bending-torsion coupled vibration analysis of delaminated beams under combined axial load and end moment. *Shock and Vibration*, 2018, 1348970, 1–13.
13. Kolchunov V.I., Demyanov A.I. (2019). K opredeleniyu napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sterzhney proizvodnogo poperechnogo secheniya pri kruchenii metodami soprotivleniya materialov [To determination of stress-strain state for a rod of arbitrary cross-section under torsion using resistance of materials]. *Buildings and Reconstruction*, 81(1), 10–22. (In Russ.)
14. Murashev V.I. (1950) *Treshchinoustoychivost, zhestkost i prochnost zhelezobetona [Crack resistance, stiffness and strength of reinforced concrete]*. Moscow, Mashstroyizdat Publ., 268. (In Russ.)

*Vladimir I. Kolchunov*, DSc. in Technical Sciences, Professor of the Department of Unique Buildings and Structures.

*Aleksej I. Demyanov*, PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Unique Buildings and Structures.

*Nikolay V. Naumov*, graduate student of the Department of Unique Buildings and Structures.