2019. 15 (2). 135–148

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3
DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости

Е.М. Зверяев

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., 4
Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Поступила в редакцию: 18 января 2019 г.
Доработана: 20 марта 2019 г.
Принята к публикации: 22 марта 2019 г.

Ключевые слова:
теория упругости;
согласованная теория оболочек;
метод Сен-Венана;
принцип сжатых отображений

Аннотация

Цели. Вывод согласованных уравнений теории тонких упругих оболочек без гипотез и осреднения напряжений по толщине оболочки.

Методы. С помощью итерационного метода Сен-Венана – Пикара – Банаха без каких-либо гипотез решается трехмерная задача теории упругости. В силу принципа сжатых отображений решение сходится асимптотически независимо от выбора величин начального приближения.

Результаты. Разработан метод интегрирования пространственных уравнений теории упругости в криволинейных координатах для тонкой оболочки. Наличие малого параметра позволяет провести интегрирование системы уравнений таким образом, что выходные данные первого оператора являются входными в следующий оператор и т.д., расчленяя исходный сложный оператор на последовательность простых интегрируемых операторов типа Пикара. В каждом уравнении содержатся члены только одного асимптотического порядка.

Введение

Классическая линейная теория оболочек, основана на следующих предположениях:

– толщина оболочки $2h^*$ мала по сравнению с характерным радиусом кривизны R срединной поверхности;

– компоненты тензора напряжения, нормальные к срединной поверхности оболочки, малы по сравнению с другими компонентами;

– нормали к недеформированной поверхности оболочки остаются нормалями к деформированной поверхности и не деформируются;

– тангенциальные напряжения в уравнениях равновесия и соотношениях упругости могут быть заменены равнодействующими усилиями и моментами.

Последнее предположение обычно не формулируют отдельным пунктом, предполагая возможность такой замены очевидной.

Построение теории оболочек, как правило, выполняется на основе выведенных ранее теорий изгиба стержня и пластины. Сначала Коши и Пуассон для сведения трехмерной задачи к двумерной предложили метод степенных рядов при рассмотрении статики и динамики плоских и искривленных по цилиндрической поверхности пластин. Сен-Венан отдавал предпочтение методам составления основной системы уравнений теории пластин с помощью гипотезы прямой и недеформируемой нормали, называемой также гипотезой Кирхгофа. Гипотеза Кирхгофа была впоследствии распространена Лявом на теорию оболочек [1]. В работе [2] произведена попытка оценки погрешности, вносимой в уравнения теории оболочек гипотезами Кирхгофа. Было показано, что эта погрешность имеет порядок $\varepsilon = h^*/R$, где h^* – толщина оболочки; R – некоторый характерный радиус срединной поверхности оболочки. Однако влияние данной работы на улучшение теории оказалось неконструктивным. Койтер [3] подтвердил эти оценки и ввел понятие о согласованной теории, когда все члены уравнений имеют одинаковый порядок. В теориях оболочек типа Лява [4–9] принимается условие, что отношение γ/R (γ – размерная координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности оболочки) мало по сравнению с единицей в выражениях для напряжений и деформаций. Некоторые из авторов учитывают члены порядка γ^2/R^2, другие в той или иной степени отказываются от гипотезы недеформируемости нормали. При этом считается, что различие отдельных подходов заключено именно в формулировке зависимостей между напряжениями и деформациями. Оценки [2] были дополнены оценками погрешностей в соотношениях упругости [10; 11]. Однако вопрос о погрешностях гипотез типа Кирхгофа и соотношениях упругости не нашел исчерпывающего ответа. В свою очередь, вопрос о количестве краевых условий в теории оболочек и пластин не имеет удовлетворительного объяснения и продолжает привлекать внимание [12].

Классическая теория оболочек определяет кинематику на краю оболочки через четыре обобщенных перемещения и четыре обобщенных силы. Граничные условия на лицевых поверхностях не выполняются и нетангенциальные напряжения не определяются. Деформированное состояние оболочки, построенное путем осреднения уравнений теории упругости, не удовлетворяет закону парности касательных напряжений. В результате получается шестое уравнение равновесия, смысл которого не удается объяснить, и его отбрасывают.

В настоящем исследовании на основе метода [13] в развитии работ [14; 15] разыскивается медленно меняющаяся составляющая общего решения уравнений пространственной теории упругости, удовлетворяющая граничным условиям на лицевых поверхностях.

1. Исходные трехмерные уравнения теории упругости

Положение точки тела определяется тремя криволинейными ортогональными координатами $\alpha_i, (i = 1, 2, 3)$, которые будем считать безразмерными. Примем, что сплошное упругое тело в направлении α_3 ограничено двумя равноотстоящими на величину друг от друга лицевыми поверхностями, образуя оболочку постоянной толщины, которую обозначим $2h^*$. Координаты α_1, α_2 являются криволинейными ортогональными координатами срединной поверхности оболочки и представляют собой линии главных кривизн срединной поверхности. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид $ds^2 = H_1^{*2} d\alpha_1^2 + H_2^{*2} d\alpha_2^2$, где коэффициенты H_1^*, H_2^* представляют собой функции координат α_1, α_2 и являются размерными коэффициентами Ламе[1]. Координата α_3 отмеряет расстояние по нормали к срединной поверхности до рассматриваемой точки. В квадратичной форме $ds^2 = H_1^{*2} d\alpha_1^2 + H_2^{*2} d\alpha_2^2 + H_3^{*2} d\alpha_3^2$ коэффициент H_3^* для всех точек тела имеет постоянное значение. Два других коэффициента выражаются через параметры срединной поверхности и расстояние $H_3^*\alpha_3$ по нормали от срединной поверхности до рассматриваемой точки:

$$H_1^* = A_1^* \left(1 + \frac{H_3^* \alpha_3}{R_1^*} \right) (1,2), \tag{1}$$

где $A_1^* = A_1^*(\alpha_1, \alpha_2)(1,2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, отнесенной к линиям главных кривизн; R_1^*, R_2^* – радиусы главных кривизн. Символы $(1,2)$, стоящие после определенных уравнений, указывают, что уравнений подобного вида должно быть два: второе получается круговой заменой указанных символов.

Уравнения равновесия в принятой системе координат имеют вид [1; 4]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1} H_2^* H_3^* \sigma_{11}^* + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} H_1^* H_3^* \sigma_{12}^* + \frac{\partial}{\partial\alpha_3} H_1^* H_2^* \sigma_{13}^* -$$

$$- H_3^* \frac{\partial H_2^*}{\partial\alpha_1} \sigma_{22}^* - H_2^* \frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_1} \sigma_{33}^* +$$

$$+ H_3^* \frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_2} \sigma_{12}^* + H_2^* \frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_3} \sigma_{13}^* = 0\,(1,2);$$

[1] Здесь и далее звездочкой отмечены те размерные величины, которые будут приведены к безразмерному виду.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}H_1^*H_2^*\sigma_{33}^*+\frac{\partial}{\partial\alpha_1}H_3^*H_2^*\sigma_{13}^*+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}H_3^*H_1^*\sigma_{23}^*-$$

$$-H_2^*\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_3}\sigma_{11}^*-H_1^*\frac{\partial H_2^*}{\partial\alpha_3}\sigma_{22}^*+$$

$$+H_2^*\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_1}\sigma_{13}^*+H_1^*\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_2}\sigma_{23}^*=0, \qquad (2)$$

где $\sigma_{ij}^*,\left(i,\,j=1,2,3\right)$ – напряжения.

Размерное перемещение некоторой точки, имеющей до деформации координаты $\alpha_i,\left(i=1,2,3\right)$, определяется проекциями $u_i^*,\left(i=1,2,3\right)$ на криволинейные оси координат. Компоненты деформации через перемещения определяются формулами:

$$e_1=\frac{1}{H_1^*}\frac{\partial u_1^*}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1^*H_2^*}\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_2}u_2^*+\frac{1}{H_1^*H_3^*}\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_3}u_3^*\left(1,2\right);$$

$$e_3=\frac{1}{H_3^*}\frac{\partial u_3^*}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{H_3^*H_1^*}\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_1}u_1^*+\frac{1}{H_3^*H_2^*}\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_2}u_2^*;$$

$$e_{12}=\frac{H_1^*}{H_2^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{H_1^*}u_1^*+\frac{H_2^*}{H_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{H_2^*}u_2^*;$$

$$e_{13}=\frac{H_3^*}{H_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{u_3^*}{H_3^*}+\frac{H_1^*}{H_3^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\frac{u_1^*}{H_1}\left(1,2\right). \qquad (3)$$

Введем безразмерные коэффициенты $H_1=$ $=H_1^*/R\ \left(1,2\right)$, $A_1=A_1^*/R\left(1,2\right)$, в которых под величиной R как единицей измерения понимается некоторый характерный радиус срединной поверхности, безразмерные перемещения $u_1=u_1^*/h^*\left(1,2\right)$, $w=u_3^*/h^*$ вдоль осей $\alpha_i,\left(i=1,2,3\right)$ соответственно, безразмерные напряжения $\sigma_i=\sigma_{ii}^*/E$, $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^*/E$, $\left(i,\,j=1\div 3, i\neq j\right)$, безразмерные радиусы главных кривизн $R_1=R_1^*/R\left(1,2\right)$, и положим $H_3^*=h^*$, $\alpha_3=z$. Подставив эти величины в соотношение (1), запишем

$$H_1=A_1\left(1+\varepsilon\frac{z}{R_1}\right),H_2=A_2\left(1+\varepsilon\frac{z}{R_2}\right), \qquad (4)$$

откуда получаем для производных по z

$$\frac{\partial H_1}{\partial z}=\varepsilon\frac{A_1}{R_1},\ \frac{\partial H_2}{\partial z}=\varepsilon\frac{A_2}{R_2}.$$

Имея в виду, как это принято в литературе, выделение двумерных уравнений из трехмерных с точностью порядка ε по сравнению с величинами порядка единицы, отбросим в формулах (4) вторые члены в скобках и будем считать $H_1=A_1$, $H_2=A_2$.

С учетом последних соотношений уравнения (2), (3) приводятся к безразмерным уравнениям следующего вида:

– уравнения равновесия:

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_{12}+\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_{13}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_2+\varepsilon\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_1}\sigma_{13}=0;$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_2+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_{12}+\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_{23}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_1+\varepsilon\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{12}+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_2}\sigma_{23}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_3+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_{13}+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_{32}-\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_1}\sigma_1-\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_2}\sigma_2=0; \qquad (5)$$

– формулы деформации-перемещения:

$$e_1=\varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2+\varepsilon\frac{1}{R_1}w;$$

$$e_2=\varepsilon\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}+\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_1+\varepsilon\frac{1}{R_2}w;$$

$$e_{12}=\varepsilon\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{u_1}{A_1}+\varepsilon\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{u_2}{A_2},\quad e_3=\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad (6)$$

и сдвигов в нормальных плоскостях:

$$e_{13}=\varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+A_1\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_1}{A_1};$$

$$e_{13}=\varepsilon\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}+A_2\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_2}{A_2}. \qquad (7)$$

Уравнения должны быть дополнены соотношениями упругости, которые в любой системе ортогональных координат имеют один и тот же вид и в принятой здесь безразмерной записи выглядят так:

$$\sigma_i = \lambda\left(e_1 + e_2 + e_3\right) + 2\mu e_i \quad \left(i = 1, 2, 3\right);$$
$$\sigma_{ij} = \mu e_{ij} \quad \left(i \neq j = 1, 2, 3\right),$$

где λ, μ – безразмерные коэффициенты Ламе, полученные делением размерных на E.

Три первых соотношения упругости, оставив формулы для сдвигов неименными, путем тождественных преобразований можно свести к такой записи:

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_3; \sigma_2 = \frac{e_2 + \nu e_1}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_3;$$
$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2(1+\nu)} e_{ij} \quad \left(i \neq j = 1, 2, 3\right);$$

$$e_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_1 + e_2) + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\sigma_3, \tag{8}$$

позволяющей организовать последовательный процесс вычисления неизвестных. Для этого перепишем систему уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{13} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1}\sigma_{13} -$$
$$-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_3 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\sigma_3\right) =$$

$$= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(\frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2}\right) + \varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(\frac{e_2 + \nu e_1}{1-\nu^2}\right) -$$
$$-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{12} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\sigma_{12}\right)\left(1, 2\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_3 - \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} A_1 A_2 \sigma_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{13} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_2 \sigma_{23} +$$
$$+\varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1}\frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2}\frac{e_2 + \nu e_1}{1-\nu^2}.$$

В левой части третьего уравнения можно отбросить одноименный с главным член σ_3 с множителем ε и переписать его так:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_3 = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{13} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{23} +$$
$$+\varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1}\frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2}\frac{e_2 + \nu e_1}{1-\nu^2}.$$

Видно, что σ_3 соизмерима с $\varepsilon\sigma_{13}$ или $\varepsilon\left(e_1 + \nu e_2\right)$. Но в левой части первого уравнения можно отбросить член с σ_{13} как малый следующего порядка малости по сравнению с главным и член с σ_3 как величину второго порядка малости, упростив его:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{13} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(\frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2}\right) +$$
$$+\varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(\frac{e_2 + \nu e_1}{1-\nu^2}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{12} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\sigma_{12}\right) \ (1,2).$$

Более того, учитывая полученные оценки можно упростить первые три соотношения упругости (8), отбросив в них члены с напряжением σ_3 как малые более высокого порядка и получить такие соотношения упругости

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2}; \ \sigma_2 = \frac{e_2 + \nu e_1}{1-\nu^2}; e_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_1 + e_2). \tag{9}$$

Для дальнейших вычислений запишем уравнения в следующей последовательности:

– два соотношения для сдвигов (7), в которых e_{13}, e_{23} выражены через σ_{13}, σ_{23}:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_1}{A_1} = -\varepsilon \frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + 2\left(1+\nu\right)\frac{1}{A_1}\sigma_{13} \left(1, 2\right); \tag{10}$$

– формулы деформации-перемещения для компонент тангенциальной деформации:

$$e_1 = \varepsilon \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial z} w \ \left(1, 2\right);$$
$$e_{12} = \varepsilon \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{u_1}{A_1} + \varepsilon \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{u_2}{A_2}; \tag{11}$$

– три тангенциальных соотношения упругости:

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2}; \sigma_2 = \frac{e_2 + \nu e_1}{1-\nu^2}; \ \sigma_{12} = \frac{e_{12}}{2(1+\nu)}, \tag{12}$$

в которых два первых взяты упрощенными из (9);

– два первых уравнения равновесия, в которых отброшены члены $\varepsilon\sigma_{13}$ как малые по сравнению с главными:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_{13}=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_1-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_{12}+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_2-\varepsilon\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}\ (1,2); \tag{13}$$

– третье уравнение равновесия, в котором напряжения σ_1,σ_2 определены из соотношений (9) и напряжение σ_3 отброшено как малое по сравнению с одноименным главным:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_3=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_{13}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_{23}+$$

$$+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_1}\sigma_1+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_2}\sigma_2; \tag{14}$$

– формулы для поперечной деформации растяжения (сжатия) и перемещения w

$$e_3=-\frac{\nu}{1-\nu}(e_1+e_2);\quad \frac{\partial w}{\partial z}=e_3. \tag{15}$$

Погрешность записанной системы уравнений оценивается в ε по сравнению с единицей.

Решение системы уравнений (9)–(15) будем искать методом простых итераций. Предположим, что в (10) перемещение w и касательные напряжения σ_{13}, σ_{23} известны. В этом случае тангенциальные перемещения u_1, u_2 вычисляются путем прямого интегрирования по z. Подставив их и предположенное известным нормальное перемещение w в (11), вычисляем тангенциальные деформации e_1,e_2,e_{12}. Уравнения (12) позволяют определить тангенциальные напряжения $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_{12}$. Уравнения (13) дают возможность путем интегрирования по z вычислить неизвестные нетангенциальные напряжения сдвига σ_{13},σ_{23}, а уравнение (14) – нетангенциальное нормальное напряжение σ_3, которое в классической теории оболочек не вычисляется. Последние два соотношения (15) позволяют найти также отсутствующие в классической теории поперечную деформацию и перемещение. На этом нулевую итерацию можно считать законченной.

Если теперь найденные $w,\sigma_{13},\sigma_{23}$ подставить в выражения (10), можно вычислить искомые неизвестные в первой итерации и т.д. Однако здесь ограничимся вычислением только нулевой итерации, обеспечивающей асимптотическую точность ε, т.к. уравнения (9)–(15) записаны с такой же точностью.

Величины начального приближения выберем такими:

$$w=w_{(0)}=w_0(\alpha_1,\alpha_2);$$

$$\sigma_{13(0)}=\tau_{13(0)}(\alpha_1,\alpha_2);$$

$$\sigma_{23(0)}=\tau_{230(0)}(\alpha_1,\alpha_2), \tag{16}$$

считая поперечное перемещение и касательные напряжения в нулевом приближении не зависящими от поперечной координаты. Для удобства процедуру вычислений разделим в силу линейности задачи на два элементарных процесса: w и τ [13–15]. В w-процессе задаются величины начального приближения:

$$w_{(0)}=w_0,\quad \sigma_{13(0)}=\sigma_{23(0)}=0, \tag{17}$$

совпадающие с известными гипотезами Кирхгоффа и рассматриваемые в настоящей работе как величины начального приближения.

Для сведения трехмерных формул, связывающих деформации и перемещения, к двумерным В.З. Власов использует гипотезы прямой и недеформируемой нормали:

$$e_3=0;\ e_{13}=e_{23}=0. \tag{18}$$

Тогда из уравнений (6) и (7) следует:

$$w^*=w_0^*(\alpha_1,\alpha_2);$$

$$u_1^*=-\varepsilon\frac{1}{A_1^*}\frac{\partial w^*}{\partial\alpha_1}z+u_{10}^*;$$

$$u_2^*=-\varepsilon\frac{1}{A_2^*}\frac{\partial w^*}{\partial\alpha_2}z+u_{20}^*,$$

где u_{10}^*,u_{20}^* – тангенциальные перемещения точки срединной поверхности.

Затем он подставляет это в выражения (3) и, используя для коэффициентов формулы (1) и раскладывая деформации e_1,e_2,e_{12} в ряды по степеням поперечной координаты $\gamma=H_3^*z$ до второй степени, получает выражения для тангенциальных и нетангенциальных компонент деформации оболочки с точностью до ε^2. Здесь будут получены формулы для деформаций с точностью ε, т.к. в формулах (4) отбрасывается второй член в скобках, внося погрешность порядка ε во все дальнейшие вычисления.

В настоящем исследовании гипотезы (18) можно рассматривать как величины начального приближения w-процесса, заданные выражениями (17). Вычислять неизвестные будем в следующем порядке. Исходя из величин начального приближения, из уравнений $\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_1}{A_1} = -\varepsilon\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha_1}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_1}{A_1} = -\varepsilon\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha_1}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_2}{A_2} = -\varepsilon\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha_2}$ получаем выражения для перемещений $u_{1(0)}, u_{2(0)}$:

$$u_{1(0)} = -\varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha_1}z + u_{10};$$

$$u_{2(0)} = -\varepsilon\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha_2}z + u_{20}. \qquad (19)$$

Подставив их в правые части формул деформации-перемещения (11), получим:

$$e_{1(0)} = \varepsilon^2\kappa_{1(0)}z + \varepsilon\varepsilon_{1(0)}\ (1,2);$$

$$e_{12(0)} = \varepsilon^2\tau_{(0)}z + \varepsilon\omega_{(0)}.$$

Здесь использованы компоненты:

– нетангенциальной деформации:

$$\kappa_{1(0)} = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial\alpha_2}\ (1,2);$$

$$\tau_{(0)} = -\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial\alpha_1} - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial\alpha_2}; \qquad (20)$$

– и тангенциальной деформации:

$$\varepsilon_{1(0)} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_{10}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_{20} + \frac{1}{R_1}w_0\ (1,2);$$

$$\omega_{(0)} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{u_{10}}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{u_{20}}{A_2}. \qquad (21)$$

Величина w_0 является решением уравнения $e_3 = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. С помощью первых двух соотношений упругости (12) вычисляем, учитывая последнее равенство в (19), тангенциальные напряжения:

$$\sigma_{1(0)} = \varepsilon^2 m_{1(0)}z + \varepsilon t_{1(0)};$$

$$\sigma_{2(0)} = \varepsilon^2 m_{2(0)}z + \varepsilon t_{2(0)};$$

$$\sigma_{12(0)} = \varepsilon^2 h_{(0)}z + \varepsilon s_{(0)}, \qquad (22)$$

в которых

$$t_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{1(0)} + \nu\varepsilon_{2(0)}\right);$$

$$t_{2(0)} = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{2(0)} + \nu\varepsilon_{1(0)}\right);$$

$$s_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\omega_{(0)};$$

$$m_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\kappa_{1(0)} + \nu\kappa_{2(0)}\right);$$

$$m_{2(0)} = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\kappa_{2(0)} + \nu\kappa_{1(0)}\right);$$

$$h_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\tau_{(0)}.$$

Полученные напряжения подставим в уравнения (13), что даст следующие выражения для касательных напряжений:

$$\sigma_{13(1)} = \varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\varepsilon^2 m_{1(0)}\frac{z^2}{2} + \varepsilon t_{1(0)}z\right) - \right.$$
$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\varepsilon^2 h_{(0)}\frac{z^2}{2} + \varepsilon s_{(0)}z\right) + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\varepsilon^2 m_{2(0)}\frac{z^2}{2} + \varepsilon t_{2(0)}z\right) -$$
$$\left. -\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\varepsilon^2 h_{(0)}\frac{z^2}{2} + \varepsilon s_{(0)}z\right)\right] + \tau_{130}\ (1\leftrightarrow 2). \qquad (23)$$

Здесь $\tau_{130} = \tau_{130}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\tau_{230} = \tau_{230}(\alpha_1, \alpha_2)$ – произволы интегрирования, определяющие постоянные по толщине составляющие напряжений.

Подставляя эти напряжения вместе с нормальными тангенциальными напряжениями в третье уравнение системы (14), вычисляем нормальное нетангенциальное напряжение $\sigma_{3(1)}$ в первом приближении:

$$\sigma_{3(1)} = \frac{1}{A_1A_2}\left\{-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\varepsilon^4 m_{1(0)}\frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 t_{1(0)}\frac{z^2}{2}\right) - \right.\right.$$
$$-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\varepsilon^4 h_{(0)}\frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 s_{(0)}\frac{z^2}{2}\right) +$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\varepsilon^4 m_{2(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{2(0)}\frac{z^2}{2}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\varepsilon^4 h_{(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 s_{(0)}\frac{z^2}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\varepsilon^4 m_{1(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{1(0)}\frac{z^2}{2}\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\varepsilon^4 h_{(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 s_{(0)}\frac{z^2}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{A_1A_2}{R_1}\left(\varepsilon^4 m_{1(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{1(0)}\frac{z^2}{2}\right)+$$
$$\left.+\frac{A_1A_2}{R_2}\left(\varepsilon^4 m_{2(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{2(0)}\frac{z^2}{2}\right)\right\}-$$
$$-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{130}z-$$
$$-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{230}z+\sigma_{30}. \qquad (24)$$

Здесь $\sigma_{30}=\sigma_{30}(\alpha_1,\alpha_2)$ – произвол интегрирования, определяющий постоянную по толщине составляющую напряжения.

С помощью последнего уравнения из (15) находим поперечное перемещение в первом приближении:

$$w=w_{(0)}+w_{(1)}=$$
$$=w_0-\frac{\nu}{1-\nu}\left[\varepsilon^2\left(\kappa_{1(0)}+\kappa_{2(0)}\right)\frac{z^2}{2}+\varepsilon\left(\varepsilon_{1(0)}+\varepsilon_{2(0)}\right)z\right]. \qquad (25)$$

Поскольку поправка $w_{(1)}$ является величиной ε по сравнению с w_0, она может быть отброшена, и поперечное перемещение будет состоять только из прогиба срединной поверхности.

Соотношения (19)–(25) дают выражения всех девяти неизвестных трехмерной задачи теории упругости $u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_3, w$ при начальном выборе нетангенциальных касательных напряжений, отсутствующих в нулевом приближении, через 15 неизвестных теории оболочек: перемещения срединной поверхности u_1, u_2, w, нетангенциальные деформации κ_1, κ_2, τ, тангенциальные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$, параметры изгибающих m_1, m_2 и крутящего h моментов и параметры тангенциальных напряжений t_1, t_2, s. Также вычислены поперечное нормальное σ_3, касательные σ_{13}, σ_{23} напряжения и установлена зависимость поперечного перемещения w от координаты z, которыми в классической теории пренебрегают. Видно, что напряжение σ_3 имеет порядок ε^4 относительно $m_{1(0)}$, тогда как тангенциальное напряжение – порядок ε^2 относительно той же величины. Это оправдывает пренебрежение величиной σ_3 в первых двух формулах в (9) и при выборе величин начального приближения (19).

Отметим, что в схеме последовательного вычисления неизвестных

$$\left(w_{(0)},\sigma_{13(0)},\sigma_{23(0)}\right)\Rightarrow\left(u_{1(0)},u_{2(0)}\right)\Rightarrow$$
$$\left(e_{1(0)},e_{2(0)},e_{12(0)},\varepsilon_{1(0)},\varepsilon_{2(0)},\ \omega_{(0)},\kappa_{1(0)},\ \kappa_{2(0)},\right.$$
$$\left.\tau_{(0)}\right)\Rightarrow\left(\sigma_{1(0)},\sigma_{2(0)},\sigma_{12(0)}\right)\Rightarrow$$
$$\left(\sigma_{13(1)},\sigma_{23(1)},\sigma_{3(1)},w_{(1)}\right)\Rightarrow\cdots \qquad (26)$$

можно любую совокупность величин выбрать в качестве величин нулевого приближения и продолжить процесс вычисления остальных.

2. Выполнение граничных условий на лицевых поверхностях оболочки

На лицевых поверхностях оболочки надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются так:

$$\sigma_3=Z_+;\quad \sigma_{13}=X_{1+};\quad \sigma_{23}=X_{2+}\quad \text{при } z=1;$$
$$\sigma_3=Z_-;\ \sigma_{13}=X_{1-};\ \sigma_{23}=X_{2-}\quad \text{при } z=-1, \qquad (27)$$

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на модуль упругости E.

Посмотрим, можно ли выполнить эти граничные условия величинами (22) и (23), считая, что они аппроксимируют искомые величины в первом приближении с достаточной точностью:

$$\sigma_{13}=\varepsilon^3\frac{1}{A_1A_2}E^w_{1m}\frac{z^2}{2}+\varepsilon^2\frac{1}{A_1A_2}E^w_{1t}z+\tau_{130}(1,2);$$

$$\sigma_3 = -\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} B \times$$

$$\times\left(\varepsilon^3 \frac{1}{A_1 A_2} E_{1m}^w \frac{z^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{1}{A_1 A_2} E_{1t}^w \frac{z^2}{2} + \tau_{130(0)} z \right) -$$

$$-\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A \times$$

$$\times\left(\varepsilon^3 \frac{1}{A_1 A_2} E_{2m}^w \frac{z^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{1}{A_1 A_2} E_{2t}^w \frac{z^2}{2} + \tau_{230(0)} z \right) +$$

$$+\varepsilon^3 \left(\frac{m_{1(0)}}{R_1} + \frac{m_{2(0)}}{R_2} \right) \frac{z^2}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) z + \sigma_{30}. \quad (28)$$

Здесь введены обозначения:

$$E_{1m}^w = -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h_{(0)} +$$

$$+\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h_{(0)} \left(1,2\right);$$

$$E_{1t}^w = -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 t_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_2 s_{(0)} +$$

$$+\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s_{(0)} \left(1,2\right). \quad (29)$$

Подчинение напряжений граничным условиям (27) дает пять уравнений с шестью неизвестными $E_{1t}^w, E_{1m}^w, \tau_{130}, E_{2t}^w, E_{2m}^w, \tau_{230}$:

$$\varepsilon^2 2 E_{1t}^w = A_1 A_2 \left(X_{1+} - X_{1-} \right) \left(1,2\right);$$

$$-\varepsilon^4 \frac{1}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} E_{1m}^w + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} E_{2m}^w \right) -$$

$$-2\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230(0)} \right) +$$

$$+\varepsilon^2 2 \left(\frac{t_{1(0)}^w}{R_1} + \frac{t_{2(0)}^w}{R_2} \right) = Z_+ - Z_-$$

$$\varepsilon^3 E_{1m}^w + 2 A_1 A_2 \tau_{130} = A_1 A_2 \left(X_{1+} + X_{1-} \right) \left(1,2\right). \quad (30)$$

Или с учетом обозначений (29) и последних двух уравнений равновесия – с неизвестными $m_{1(0)}, t_{1(0)}, h_{(0)}, s_{(0)}, \tau_{130} \left(1,2\right)$:

$$\varepsilon^2 2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 t_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_{2\,1}} s_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s_{(0)} \right) =$$

$$= A_1 A_2 \left(X_{1+} - X_{1-} \right);$$

$$-\varepsilon \frac{4}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230(0)} \right) +$$

$$+\varepsilon^2 2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) = Z_+ - Z_- + \varepsilon \frac{1}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(X_{1+} + X_{1-} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(X_{2+} + X_{2-} \right) \right];$$

$$\varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h_{(0)} \right) +$$

$$+2 A_1 A_2 \tau_{130} = A_1 A_2 \left(X_{1+} + X_{1-} \right) \left(1,2\right). \quad (31)$$

А также шестое уравнение:

$$-\frac{1}{A_1 B_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \varepsilon^3 \frac{1}{A_1} E_{1t}^w - \frac{1}{A_1 B_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \varepsilon^3 \frac{1}{A_2} E_{2t}^w +$$

$$+\varepsilon^3 \left(\frac{m_{10}}{R_1} + \frac{m_{20}}{R_2} \right) + 2\sigma_{30} = Z_+ + Z_-,$$

сводящееся к уравнению, определяющему $\sigma_{30} = \sigma_{30}\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$:

$$2\sigma_{30} = Z_+ + Z_- + \varepsilon^3 \frac{1}{2 A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(X_{1+} - X_{1-} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(X_{2+} - X_{2-} \right) \right] - \varepsilon^3 \left(\frac{m_{1(0)}}{R_1} + \frac{m_{2(0)}}{R_2} \right).$$

Напряжениям σ_{13} и σ_3 из (28) можно придать более простой вид, преобразовав их с помощью уравнений (30):

$$\sigma_{13} = \left(X_{1+} + X_{1-} \right) \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \left(X_{1+} - X_{1-} \right) z +$$

$$+\tau_{130} \left(1 - z^2 \right) \left(1,2\right);$$

$$\sigma_3 = -\frac{1}{2} \left(Z_+ + Z_- \right) -$$

$$\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(X_+ + X_- \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(Y_+ + Y_- \right) \right] \frac{z^3}{6} +$$

$$+\varepsilon\frac{1}{2}\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_{1+}-X_{1-}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(X_{2+}-X_{2-}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{1-z^2}{2}-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{130(0)}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{230(0)}\right)\times$$
$$\times\left(z-\frac{z^3}{3}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{t_{1(0)}}{R_1}+\frac{t_{2(0)}}{R_2}\right)z+$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{t_{1(0)}}{R_1}+\frac{t_{2(0)}}{R_2}\right)z+\varepsilon^3\left(\frac{m_{1(0)}}{R_1}+\frac{m_{2(0)}}{R_2}\right)\frac{z^2-1}{2}. \quad (32)$$

Отсюда хорошо виден закон распределения нетангенциальных напряжений по толщине оболочки. Легко проверить, что напряжения удовлетворяют условиям нагружения на лицевых поверхностях.

3. Сравнение с уравнениями классической теории

В классической теории оболочек в качестве неизвестных вводятся усилия и моменты, определяемые через соответствующие им напряжения интегралами следующего вида:

$$T_1^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_1^*H_2^*d\gamma\left(1,2\right);$$
$$S^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^*H_2^*d\gamma;$$
$$N_1^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_{13}^*H_2^*d\gamma\left(1,2\right);$$
$$M_1^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_1^*H_2^*\gamma d\gamma\left(1,2\right);$$
$$M_{12}^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^*H_2^*\gamma d\gamma.$$

Учитывая, что в настоящей работе все вычисления ведутся с точностью ε, последние определения можно переписать так:

$$T_1^*=\int_{-h}^{h}\sigma_1^*d\gamma\left(1,2\right);$$
$$S^*=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^*d\gamma;$$
$$N_1^*=\int_{-h}^{h}\sigma_{13}^*d\gamma\left(1,2\right);$$
$$M_1^*=\int_{-h}^{h}\sigma_1^*\gamma d\gamma\left(1,2\right);$$
$$M_{12}^*=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^*\gamma d\gamma. \quad (33)$$

Введенные таким образом величины должны удовлетворять уравнениям равновесия [6]:

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2^*T_1^*-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1^*S_2^*+\frac{\partial A_2^*}{\partial\alpha_1}T_2^*-$$
$$-\frac{\partial A_1^*}{\partial\alpha_2}S_1^*-A_1^*A_2^*\frac{N_1^*}{R_1^*}=A_1^*A_2^*X_1^*\left(1,2\right);$$
$$\frac{T_1^*}{R_1^*}+\frac{T_2^*}{R_2^*}-\frac{1}{A_1^*A_2^*}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2^*N_1^*+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1^*N_2^*\right)=$$
$$=Z_+^*-Z_-^*;$$
$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2^*M_1^*-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1^*M_{12}^*+\frac{\partial A_2^*}{\partial\alpha_1}M_2^*-$$
$$-\frac{\partial A_1^*}{\partial\alpha_2}M_{12}^*-A_1^*A_2^*N_1^*=0\left(1,2\right). \quad (34)$$

Усилия и моменты связаны с деформациями соотношениями упругости:

$$T_1^*=\frac{2Eh^*}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2\right)\left(1,2\right);$$
$$S^*=\frac{2Eh^*}{2\left(1+\nu\right)}\omega;$$
$$M_1^*=\frac{2Eh^{*3}}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(\kappa_1^*+\nu\kappa_2^*\right)\left(1,2\right);$$
$$M_{12}^*=\frac{3Eh^{*3}}{3\left(1+\nu\right)}\tau^*. \quad (35)$$

Компоненты деформации определяются выражениями:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A_1^*}\frac{\partial u_1^*}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1^*A_2^*}\frac{\partial u_2^*}{\partial\alpha_2}+\frac{w^*}{R_1^*}\left(1,2\right);$$
$$\omega=\frac{A_1^*}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{u_1^*}{A_1^*}+\frac{A_2^*}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{u_2^*}{A_2^*};$$

$$\kappa_1^* = \frac{1}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_1^*}\frac{\partial w^*}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^{*2}}\frac{\partial A_1^*}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w^*}{\partial\alpha_2} -$$

$$\frac{u_1^*}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{R_1^*} - \frac{u_2^*}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{R_1^*} + \frac{w^*}{R_1^{*2}}(1,2);$$

$$\tau^* = -\frac{1}{A_1^* A_2^*}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1^*}\frac{\partial A_1^*}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w^*}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_2^*}\frac{\partial A_2^*}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w^*}{\partial\alpha_2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^*} - \frac{1}{R_2^*}\right)\left(\frac{A_1^*}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{u_1^*}{A_1^*} - \frac{A_2^*}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{u_2^*}{B^*}\right)$$

либо несущественно отличающимися от этих. Общепризнанно, что тангенциальные перемещения в формулах для нетангенциальных деформаций могут быть отброшены.

Поскольку выведенные в работе уравнения имеют точность ε и записаны в безразмерном виде, приведем уравнения классической теории к безразмерному виду и такой же точности, выразив размерные усилия и моменты через безразмерные параметры. Умножим напряжения (22) и (32) на модуль упругости E, сделав их размерными, и подставим в (33). После интегрирования получаем связь между размерными усилиями и моментами и безразмерными параметрами усилий и моментов, являющимися коэффициентами в законах распределения напряжений (22)–(24):

$$T_1^* = 2Eh^*\varepsilon t_{1(0)}(1,2);\ S^* = 2Eh^*\varepsilon s_{(0)};$$

$$M_1^* = \frac{2}{3}Eh^{*2}\varepsilon^2 m_{1(0)}(1,2);$$

$$M_{12}^* = \frac{2}{3}Eh^{*2}\varepsilon^2 h_{(0)}(1,2);$$

$$N_1^* = \frac{2}{3}Eh^*(X_+ + X_-) + \frac{4}{3}Eh^*\tau_{130}. \quad (36)$$

Если заменить безразмерные параметры в уравнениях (31) в соответствии с этими выражениями, получим расхождение только в первых двух уравнениях равновесия в силу наличия в классических уравнениях (34) членов $A_1^*A_2^*N_1^*/R_1^*$, $A_1^*A_2^*N_2^*/R_2^*$, которые являются малыми порядка ε по сравнению с остальными. При использовании уравнений теории оболочек их принято отбрасывать, т.к. в расчетах они всегда являются пренебрежимо малыми.

Легко проверить совпадение приведенных к размерным величинам формул для компонент деформации (20), (21) с формулами (36), где в формулах компонент нетангенциальной деформации отброшены члены с тангенциальными перемещениями. Соответствие соотношений упругости (22) и (35) устанавливается с помощью (36) тем же путем. Таким образом, выведенные в настоящей работе в результате применения w-процесса выражения искомых неизвестных в первом приближении и выполнения ими граничных условий на лицевых поверхностях оболочки дают уравнения классической теории с точностью до величин порядка ε по сравнению с единицей.

Приведем сводку уравнений и формулы для напряжений и перемещений, выведенной здесь теории, опустив указывающие на процесс и приближение индексы:

– уравнения равновесия:

$$\varepsilon^2 2\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2 t_1 - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1 s + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}t_2 - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}s\right) =$$

$$= A_1A_2(X_{1+} - X_{1-})(1,2);$$

$$-\varepsilon\frac{4}{3}\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{13} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{23}\right) +$$

$$+\varepsilon^2 2\left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2}\right) = Z_+ - Z_- + \varepsilon\frac{1}{3}\frac{1}{A_1A_2}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2(X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1(X_{2+} + X_{2-})\right],$$

$$\varepsilon^3\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2 m_1 - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1 h + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}m_2 - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}h\right) +$$

$$+2A_1A_2\tau_{13} = A_1A_2(X_{1+} + X_{1-})(1,2); \quad (37)$$

– соотношения упругости:

$$t_1 = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)(1,2);\ \ s = \frac{1}{2(1+\nu)}\omega;$$

$$m_1 = \frac{1}{1-\nu^2}(\kappa_1 + \nu\kappa_2)(1,2);\ \ h = \frac{1}{2(1+\nu)}\tau;$$

– компоненты тангенциальной деформации:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2 + \frac{1}{R_1}w(1,2);$$

$$\omega = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{u_2}{A_2};$$

– компоненты нетангенциальной деформации:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}(1,2);$$

$$\tau = -\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2};$$

– формулы для перемещений:

$$u_1 = -\varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}z + u_{10}\left(1,2\right);$$

$$u_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}\left[\varepsilon^2\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\frac{z^2}{2} + \varepsilon\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)z\right] + w_0;$$

– тангенциальные напряжения:

$$\sigma_1 = \varepsilon^2 m_1 z + \varepsilon t_1\left(1,2\right);\quad \sigma_{12} = \varepsilon^2 hz + \varepsilon s;$$

– нетангенциальные касательные напряжения:

$$\sigma_{13} = \left(X_{1+} + X_{1-}\right)\frac{z^2}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(X_{1+} - X_{1-}\right)z + \tau_{13}\left(1-z^2\right)\left(1,2\right); \tag{38}$$

– нетангенциальное нормальное напряжение:

$$\sigma_3 = -\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{13} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{23}\right)\left(z - \frac{z^3}{3}\right) +$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2}\right)z + \varepsilon^3\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_1}\right)\frac{z^2-1}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(Z_+ + Z_-\right) - \varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_{1+} + X_{1-}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(X_{2+} + X_{2-}\right)\right]\frac{z^3}{6} +$$

$$+\varepsilon\frac{1}{2}\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_{1+} - X_{1-}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(X_{2+} - X_{2-}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{1-z^2}{2}.$$

Эти уравнения соответствуют классическим гипотезам Кирхгоффа при выборе величин начального приближения и выделены из общих уравнений теории упругости путем отбрасывания величин порядка ε по сравнению с главными и выполнения граничных условий на лицевых поверхностях оболочки. В отличие от классической теории здесь определены все искомые неизвестные исходной задачи в напряжениях и перемещениях, без введения понятия об осредненных по толщине усилиях и моментах. Однако известно, что для выполнения граничных условий на торцевых поверхностях, необходимо дополнительно учитывать поправку на сдвиг [7; 8; 13–22].

Заключение

Выведенные уравнения теории оболочек позволяют оценить погрешность классической теории. Для этого в записанных в безразмерной форме уравнениях выделен малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки и позволивший отбросить малые по сравнению с главными величины в исходных уравнениях трехмерной теории упругости. В выводимых ранее теориях в силу использования размерных уравнений такая возможность представляется сомнительной. Классические уравнения содержат в первых двух уравнениях равновесия перерезывающие усилия, а в формулах – компоненты нетангенциальной деформации-перемещения и члены с тангенциальными перемещениями, которые в практических задачах и учебниках отбрасываются как малые, что объясняется или отсутствием влияния на расчеты, или пологой оболочкой. Подобное имеет место по причине различной степени точности написания уравнений классической теории.

Рассматривая схему вычисления (26) как процесс, в котором слева вначале задается величина нулевого приближения, а справа вычисляется поправка к нему в виде величины первого приближения, можно заметить, что последняя имеет множитель ε^2, т.е. поправка мала и убывает асимптотически вместе с малым параметром. Однако установить однозначно вид асимптотических разложений искомых неизвестных не представляется возможным без априорных соображений об изменяемости искомого НДС.

Легко заметить, что классические гипотезы используются при выборе величин начального приближения (17), и дальше к ним вычисляется поправка. Она, как правило, мала. Однако сам вывод методом простых итераций требует кроме начального приближения о недеформируемости нормали (чему соответствует w-процесс) задания начальной величины сдвига, соответствующего дополнению по Тимошенко – Рейсснеру. Трактовка классических гипотез и поправок Тимошенко – Рейсснера в качестве величин начального приближения (16) позволяет процесс вычислений неизвестных отнести к полуобратному методу Сен-Венана, модифицируя его до итерационного, и опереться на принцип сжатых отображений Банаха.

Отказ от использования классической гипотезы осреднения и вывод уравнений на основе принципа сжатых отображений приводят в случае сведения двумерной задачи к одномерной для полосы и трехмерной задачи к двумерной для пластины из композиционного материала к другим по сравнению с традиционными эффективным коэффициентам жесткости [21; 22]. Таким образом, в результате применения модифицированного полуобратного метода Сен-Венана – Пикара – Банаха дано приближенное решение пространственной задачи теории упругости путем сведения к двумерным разрешающим уравнениям для медленно меняющихся переменных, совпадающее с уравнениями равновесия классической теории оболочек.

Список литературы

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.

2. *Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М.* О погрешности гипотез Кирхгофа – Лява в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 323–330.

3. *Koiter W.T.* A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells // Proc. IUTAM Symp. on the theory of thin elastic shells (Delft. 1959). Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960. Pp. 12–33.

4. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.

5. *Лурье А.И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.

6. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судопромгиз, 1962. 432 с.

7. *Гольденвейзер А.Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

8. *Reissner E.* On consistent first approximations in the general linear theory of thin elastic shells // Ing. arch. 1971. Vol. 40. Issue 6. Pp 402–419.

9. *Başar Y., Krätzig W.B.* Theory of shell structures, 2nd ed. Düsseldorf: VDI Verlag, 2001.

10. *Зверяев Е.М.* О соотношениях упругости в линейной теории тонких упругих оболочек // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 6. С. 1136–1138.

11. *Рогачева Н.Н.* О соотношениях упругости Рейсснера – Нахди // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1063–1071.

12. *Васильев В.В.* О преобразованиях Томсона – Тэта в классической теории пластин // МТТ. 2012. № 5. С. 98–107

13. *Зверяев Е.М.* Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2018. № 83. 19 с. doi:10.20948/prepr-2018-83. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-83

14. *Зверяев Е.М.* Непротиворечивая теория оболочек // ПММ. 2016. Т. 80. Вып.5. С. 590–596.

15. *Зверяев Е.М.* Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2016. № 33. 25 с. doi:10.20948/prepr-2016-33. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33

16. *Зверяев Е.М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.

17. *Зверяев Е.М., Макаров Г.И.* Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321.

18. *Зверяев Е.М.* Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 1–22. URL: http://www.mai.ru/upload/iblock/8b4/8b4dff2e41bb50a03dfe08744877a2cf.pdf

19. *Friedrichs K.O.* Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates // Poc. Symp. Appl. Math. 1950. 3. Pp. 117–124.

20. *Friedrichs K.O., Dressler R.F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure Appl. Math. 1961. 14. Pp. 1–33.

21. *Зверяев Е.М. Олехова Л.В.* Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. С. 1–27. URL: http://www.mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b71d2763cd0.pdf

22. *Зверяев Е.М. Олехова Л.В.* Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2014. № 95. 29 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf

Об авторе

Зверяев Евгений Михайлович – доктор технических наук, профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Московский авиационный институт. *Область научных интересов*: статика, динамика, устойчивость тонкостенных систем, уравнения с малым параметром в частных производных. *Контактная информация:* e-mail – zveriaev@mail.ru

Для цитирования

Зверяев Е.М. Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 135–148. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148

RESEARCH PAPER

Extraction of consistent shell theory equations from 3D theory of elasticity

Evgeny M. Zveryaev

Keldysh Institute of Applied Mathematics, 4 Miusskaya Sq., Moscow, 125047, Russian Federation
Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation

Received: January 18, 2019
Revised: March 20, 2019
Accepted: March 22, 2019

Keywords:
theory of elasticity;
consistent theory of shells;
Saint-Venant method;
principle of compressed mappings

Abstract

Aims of research. Derivation of consistent equations of the theory of thin elastic shells without hypotheses and stress averaging over the shell thickness.

Methods. Using the iterative method of Saint-Venant – Picard – Banach, the three-dimensional problem of the theory of elasticity is solved without any hypotheses. By the principle of compressed mappings, the solution converges asymptotically, regardless of the choice of the values of the initial approximation.

Results. A method has been developed for integrating the spatial equations of the theory of elasticity in curvilinear coordinates for a thin shell. The presence of a small parameter allows the integration of the system of equations in such a way that the output data of the first operator is input to the next operator, etc., dividing the original complex operator into a sequence of simple integrable Picard type operators. Each equation contains terms of only one asymptotic order.

References

1. Love A.E.H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Cambridge: Univ. Press., 674.

2. Novozhilov V.V., Finkel'shtejn R.M. (1943). O pogreshnosti gipotez Kirhgofa – Lyava v teorii obolochek [On the error of Kirchhoff – Love hypotheses in the theory of shells]. *PMM, 7*(5), 323–330. (In Russ.)

3. Koiter W.T. (1960). A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. *Proc. IUTAM Symp. On the theory of thin elastic shells (Delft. 1959).* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 12–33.

4. Vlasov V.Z. (1949). *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike* [*The General Shells Theory and its Application in Technology*]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 784. (In Russ.)

5. Lur'e A.I. (1947). *Statika tonkostennyh uprugih obolochek* [*Statics of thin-walled elastic shells*]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 252. (In Russ.)

6. Novozhilov V.V. (1964). Thin shell theory. 2nd ed. The Netherlands, 432.

7. Gol'denvejzer A.L. (1976). *Teoriya tonkih uprugih obolochek* [*Theory of Elastic Thin Shells*]. Moscow: Nauka Publ., 512.

8. Reissner E. (1971). On consistent first approximations in the general linear theory of thin elastic shells. *Ing. arch, 40*(6), 402–419. doi.org/10.1007/BF00533975

9. Başar Y., Krätzig W.B. (2001). *Theory of shell structures.* 2nd ed. Düsseldorf: VDI Verlag.

10. Zveriaev E.M. (1970). On elasticity relationships in the linear theory of thin elastic shells. *Prikl. Mat. Mekh*., *34*(6), 1136–1138.

11. Rogachova N.N. (1974). On the Reissner – Naghdi elasticity relationship. *Prikl. Mat. Mekh., 38*(6), 1063–1071.

12. Vasil'ev V.V. (2012). O preobrazovaniyah Tomsona – Tehta v klassicheskoj teorii plastin [Kirchhoff and Thomson – Tait Transformations in the Classical Theory of Plates]. *MTT,* (5), 98–107. (In Russ.)

13. Zveryaev E.M. (2018). Metod Sen-Venana – Pikara – Banaha integrirovaniya uravnenij v chastnyh proizvodnyh s malym parametrom [The Saint-Venant – Picard – Banach method of integrating equations in partial derivatives with a small parameter]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha*, (83), 19. doi:10.20948/prepr-2018-83. (In Russ.)

14. Zveryaev Ye.M. (2016). Neprotivorechivaya teoriya obolochek [A consistent theory of thin elastic shells]. *Prikl. Mat. Mekh., 80*(5), 580–596. (In Russ.)

15. Zveryaev E.M. (2016). Konstruktivnaya teoriya tonkih uprugih obolochek [Constructive theory of thin elastic shell]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha*, (33), 25. doi:10.20948/prepr-2016-33. (In Russ.)

16. Zveryayev Ye.M. (2008). Analiz gipotez, ispol'zuemykh pri postroenii teorii balok i plit [Analysis of hypotheses used when constricting the theory of beams and plates]. *Prikl. Mat. Mekh., 67*(3), 472–481. (In Russ.)

17. Zveryayev Ye.M., Makarov G.I. (2008). Obshchii metod postroeniya teorii tipa Timoshenko [A general method for constructing Timoshenko-type theories]. *Prikl. Mat. Mekh., 72*(2) 308–321. (In Russ.)

18. Zveryaev E.M. (2014). Vydelenie uravnenij tipa Timoshenko iz prostranstvennyh uravnenij teorii uprugosti dlya plastiny na osnove principa szhatyh otobrazhenij [Isolation of type Timoshenko equations from spatial theory elasticity plate equations on the base contraction mapping principle]. *Trudy MAI,* (78), 1–22. http://www.mai.ru/upload/iblock/8b4/8b4dff2e41bb50a03dfe08744877a2cf.pdf. (In Russ.)

19. Friedrichs K.O. (1950). Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. *Poc. Symp. Appl. Math.,* (3), 117–124.

20. Friedrichs K.O., Dressler R.F. (1961). A boundary-layer theory for elastic plates. *Comm. Pure Appl. Math.,* (14), 1–33.

21. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. (2015). Iteracionnaya traktovka poluobratnogo metoda Sen-Venana pri postroenii uravnenij tonkostennyh ehlementov konstrukcij iz kompozicionnogo materiala [Iterative interpretation of Saint-Venant semi-inverse method for construction of composite material thin-walled structural elements equations]. *Trudy MAI,* (79), 1–27. http://www.mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b71d2763cd0.pdf. (In Russ.)

22. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. (2014). Svedenie trekhmernyh uravnenij NDS plastiny iz kompozicionnogo materiala k dvumernym na baze principa szhatyh otobrazhenij [Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha,* (95), 29. http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf. (In Russ.)

About the author

Evgeny M. Zveryaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University). *Research interests*: statics, dynamics, stability of thin-walled systems, equations with a small parameter in partial derivatives. *Contact*: e-mail – zveriaev@mail.ru

For citation

Zveryaev E.M. (2019). Extraction of consistent shell theory equations from 3D theory of elasticity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 15*(2), 135–148. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148