

ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

УДК 539.3
DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-1-69-74

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Асимптотический анализ собственных частот осесимметрических колебаний ортотропных цилиндрических оболочек в бесконечной упругой среде, заполненной жидкостью**Ф.А. Сейфуллаев, Г.Р. Мирзоева, Ш.А. Керимова***Национальная академия наук Азербайджана
Азербайджанская Республика, AZ1143, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9

*shusha_az@rambler.ru

(поступила в редакцию: 30 октября 2018 г.; доработана: 29 ноября 2018 г.; принята к публикации: 16 января 2019 г.)

Цель. Исследование свободного осесимметричного колебания цилиндрической ортотропной оболочки бесконечной длины, контактирующей с бесконечной упругой средой и заполненной жидкостью.

Методы. При проектировании тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в авиационной, ракетно-космической технике и различных областях промышленности, важной задачей является динамический расчет их напряженно-деформированного состояния. Изучая динамику оболочек, необходимо определять собственные частоты и формы малых колебаний, причем наибольший интерес представляют частоты из нижней части спектра. Предполагается, что жесткость материала оболочки немного больше жесткости материала среды. Решение уравнений движений среды рассматривается в двух вариантах.

Результаты. В результате проделанной работы выведено частотное уравнение. Проведен анализ частоты и формы колебаний оболочки. Построен график зависимости частоты собственных осесимметричных колебаний системы от волнообразования в продольном направлении. С помощью асимптотического метода получены частотные уравнения ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, а также приближенные частоты уравнения и простые расчетные формулы, позволяющие находить значения минимальных собственных частот колебаний рассмотренной системы, исследованы вынужденные колебания подкрепленной оболочки, заполненной жидкостью, определены амплитудно-частотные характеристики рассмотренных колебательных процессов.

Ключевые слова: ортотропная оболочка, свободные колебания, собственные частоты колебания, волнообразование, упругая среда

Введение¹

Статья посвящена осесимметричному колебанию цилиндрической ортотропной оболочки бесконечной длины, контактирующей с бесконечной упругой средой и заполненной жидкостью.

Предполагая, что жесткость материала оболочки немного больше жесткости материала среды проведен анализ частоты и формы колебаний

оболочки. Ввод параметра, определяющего оптимальность подкрепления, привел к оптимизации параметров оболочек, усиленных перекрестной системой ребер и заполненных жидкостью. Исследовано влияние степени сжимаемости жидкости на частоты свободных осесимметричных колебаний ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью [1–6].

Постановка задачи

Система уравнений свободных осесимметричных колебаний тонкой упругой ортотропной оболочки по моментной теории имеет вид [7]

¹ © Сейфуллаев Ф.А., Мирзоева Г.Р., Керимова Ш.А., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_{12} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{XR^2}{G_{12}h},$$

$$a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} - a_2 w - b^2 \left[a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] + \frac{ZR^2}{G_{12}h} = 0, \quad (1)$$

где $X = q_x - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$; $Z = q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, q_x, q_z – компоненты контактного давления со стороны упругой среды и жидкости на оболочку; R, h – радиус и толщина оболочки соответственно; $a_i = \frac{E_i}{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}$; $a_{12} = a_{21}\nu_{21} = a_2\nu_{12}$; u, w – компоненты перемещений срединной поверхности оболочки; ν_{21}, ν_{12} – коэффициенты Пуассона ортотропного материала оболочки; E_i, G_{12} – модули упругости при растяжении и сдвиге; x – продольная координата, t – время; ρ – плотность материала оболочки.

Векторное уравнение гармонических колебаний изотропной упругой среды таково [8]

$$a_c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{S} - a_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{S} + \omega^2 \vec{S} = 0, \quad (2)$$

где $a_c^2 = (\lambda_s + 2\mu_s) / \rho_s$, $a_t^2 = \mu_s / \rho_s$ – квадраты скоростей распространения продольных и поперечных волн; $S = S(S_x, S_t)$ – вектор смещения; ρ_s – плотность; λ_s, μ_s – упругие постоянные Ламе; ω – искомая частота.

Линеаризованное волновое уравнение, описывающее распространение малых возмущений в идеальной сжимаемой жидкости имеет вид [2]

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где φ – потенциал жидкости; a – скорость распространения звука в жидкости.

Уравнения движения оболочки (1), среды (2) и жидкости (3) дополняются контактными условиями. На контактной поверхности среды и оболочки ставятся условия равенства компонентов перемещений

$$S_x = u, \quad S_t = w \quad (r = R), \quad (4)$$

и равенства давления

$$X_1 = -\sigma_{rx} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$Z_1 = -\sigma - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (r = R), \quad (5)$$

где X_1, Z_1 – давление со стороны оболочки на среду.

На контактной поверхности оболочка – жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давления, а также отсутствие тангенциальных напряжений

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad Z_2 = -p, \quad X_2 = 0 \quad (r = R), \quad (6)$$

где X_2, Z_2 – давление со стороны оболочки на жидкость; P – давление.

Компоненты поверхностного усилия X, Y, Z , отнесенного к единице площади, определяются следующим образом:

$$X = X_1 + X_2, \quad Z = Z_1 - Z_2. \quad (7)$$

Кроме того, требуется, чтобы компоненты вектора перемещений среды S_x, S_r при $r \rightarrow \infty$ и потенциал жидкости Φ при $r = 0$ были конечными.

Дополняя контактными условиями (4)–(6) уравнения движения оболочки (6), среды (2) и жидкости (3), приходим к контактной задаче о свободных осесимметричных колебаниях оболочки с жидкостью в бесконечной упругой среде. Другими словами, задача о свободных осесимметричных колебаниях оболочки с жидкостью в упругой среде сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды и жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Метод решения

Решения уравнения движения оболочки (1) будем искать в виде [2; 12]

$$u = A \cos kx \sin \omega t,$$

$$w = C \sin kx \sin \omega t, \quad (8)$$

где A, C – постоянные; $k = \frac{m\pi}{2}$, m – число полуволн в направлении образующей цилиндра.

Решение уравнений движения среды будем рассматривать в двух вариантах:

a – инерционное воздействие среды на процесс колебаний рассмотренной системы незначительно;

ν – влиянием инерции среды на процесс колебаний пренебрегать нельзя.

Приведем решения уравнения движения среды [2; 11]:

в случае *a*

$$\begin{aligned} S_x &= \left[k^2 r K_1(kr) - 4(1 - \nu_1) k K_0(kr) A_s + k K_0(kr) B_0 \right] \cos kx \sin \omega t, \\ S_r &= \left[-k^2 r K_0(kr) A_s - k K_1(kr) B_s + k K_0(kr) B_0 \right] \sin kx \sin \omega t, \end{aligned} \quad (9)$$

в случае *b*

$$\begin{aligned} S_x &= \left[k K_0(\gamma_1 r) A_s - \frac{\gamma_1^2}{\mu_1} K_0(\gamma_1 r) C_s \right] \cos kx \sin \omega t, \\ S_r &= \left[-\gamma_1 k_1(\gamma_1 r) A_s + \frac{\gamma_1^2}{\mu_1} K_1(\gamma_1 r) C_s \right] \sin kx \sin \omega t, \end{aligned} \quad (10)$$

где K_0, K_1 – модифицированная функция Бесселя нулевого и первого порядка рода [3]; $\frac{\pi}{k}$ – длина полуволн вдоль образующей цилиндра; A_s, B_s – постоянные, подлежащие определению,

$$\begin{aligned} \mu_t &= \frac{\omega}{a_t}; & \mu_c &= \frac{\omega}{a_c}, \\ \gamma_t^2 &= k^2 - \frac{\omega^2}{a_t^2}; & \gamma_c^2 &= k^2 - \frac{\omega^2}{a_c^2}. \end{aligned}$$

Потенциал жидкости φ , являющийся решением уравнения Гельмгольца [2; 10], в виде

$$\varphi = A_p I_0(\gamma) \sin kx \sin \omega t, \quad (11)$$

где A_p – постоянная, $\gamma^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}$, I_0 – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода [9; 6].

Акустическое давление P и радиальная скорость \mathcal{G}_r в жидкости определяются следующим образом [8; 13–15]:

$$P = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathcal{G}_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (12)$$

Используя уравнение движения оболочки (1) и его решение (8), а также решения уравнений движения среды (2), (10) и жидкости (11), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A, C, A_s, C_s, A_t , из условия существования нетривиальных решений которых, приравнявая главные определители системы нулю, приходим к частному уравнению относительно искомой частоты колебаний системы оболочка – среда – жидкость:

$$\det \| a_{ij} \| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5) \quad \text{в случае } a \quad (13)$$

$$\det \| \tilde{a}_{ij} \| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5) \quad \text{в случае } b \quad (14)$$

Численные результаты и их анализ

Частотные уравнения (13) и (14) реализованы численно. Для исходных данных принято:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= 2, 4; & \nu_s &= 0, 3; \\ E_3 &= 2 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2 & \rho_s &= 6, 4 \text{ г/см}^3; \\ \rho_0 &= 1 \text{ г/см}^3, & a &= 1800 \text{ м/с}; & m &= 1. \end{aligned}$$

Результаты счета показаны на рисунке. На нем представлены зависимости частоты собственных осесимметричных колебаний системы от волнообразования m в продольном направлении.

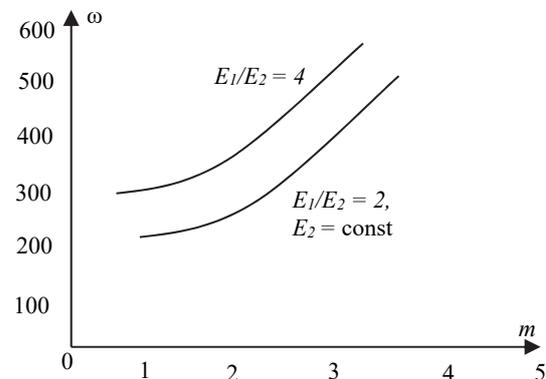


Рисунок. Зависимость частоты собственных осесимметричных колебаний системы от волнообразования m в продольном направлении [Figure. Dependence of the natural oscillation frequency of the system on the wave formation m in the longitudinal direction]

Из рисунка видно, что с увеличением m и E_1/E_2 собственные частоты осесимметричных колебаний системы увеличиваются.

Заключение

Полученные математические результаты представлены на рисунке, отображающем зависимость частоты собственных осесимметричных колебаний системы от волнообразования m в продольном направлении.

Список литературы

1. Латифов Ф.С., Сейфуллаев Ф.А., Алыев Ш.Ш. Свободные колебания усиленной поперечными ребрами анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика с текущей в ней жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 4. С. 158–162.
2. Latifov F.S., Seyfullayev F.A. Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. Trans // NAS Acad. Azer. Ser. Phys. Tech. Math. Sci. 2004. Vol. 24. No 1. Pp. 227–230.
3. Босьяков С.М., Чживэй В. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3. С. 24–27.
4. Semenov A.A. Model of deformation stiffened orthotropic shells under dynamic loading // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physic. 2016. 9(4). Pp. 485–497.
5. Сейфуллаев А.И., Новрузова К.А. Исследование колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. № 3/7 (75). С. 29–33.
6. Колосов Г.И. Вибрационная и вековая неустойчивость состояний равновесия цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Космоновтика и ракетостроение. 2012. № 2 (67). С. 145–150.
7. Обухов А.С. Расчет на прочность конструкций из стеклопластиков и пластмасса нефтеперерабатывающей и химической промышленности. М.: Машиностроение, 1978. 142 с.
8. Латифов Ф.С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.
9. Смирнов В. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1974. 672 с.
10. Seyfullayev A.I., Rustomova M.A., Kerimova Sh.A. Задача механики усталостного разрушения двухслойного материала с краевыми трещинами // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53. № 2. С. 591–602.
11. Akbarov S.D., Guliev M.S. Propagation of axisymmetric longitudinal waves in a finitely pre-strained circular cylinder embedded in a finitely pre-strained infinite elastic body // Mechanics of Composite Materials. 2008. Vol. 44. No. 5. Pp. 465–478. doi.org/10.1007/s11029-008-9045-6
12. Akbarov S.D. Resent investigations on the dynamical problems of the elastic body with initial (residual) stresses (review) // Int. Appl. Mechanic. 2007. Vol. 43. No. 12. Pp. 3–27.
13. Агаларов Дж.Г., Сейфуллаев А.И., Рустамова М.А. Движение вертикально расположенного цилиндра в результате волн на поверхности жидкости // Вестник современной науки. 2017. № 2 (26). С. 7–15.
14. Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Конечно-элементный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. механика: сб. науч. тр. Вып. 4. Пермь: Изд-во Пермского гос. техн. ун-та, 2006. С. 3–12.
15. Латифов Ф.С. Асимптотический анализ задачи о свободных неосесимметричных колебаниях в бесконечной упругой среде цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью // ДАН Аз. Республика. 1999. Т. LV. № 5–6. С. 8–15.

Об авторах

Сейфуллаев Фамил Ализаде Оглы – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана (Баку, Азербайджанская Республика). *Область научных интересов:* волновая динамика. *Контактная информация:* e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com

Мирзоева Гюльнар Ровшан Кызы – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана (Баку, Азербайджанская Республика). *Область научных интересов:* теория упругости и пластичности. *Контактная информация:* e-mail – gulnar.mirzayeva@gmail.com

Керимова Шуша Агакерим Кызы – научный сотрудник отдела волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана (Баку, Азербайджанская Республика). *Область научных интересов:* волновая динамика. *Контактная информация:* e-mail – shusha_az@rambler.ru

Для цитирования

Сейфуллаев Ф.А., Мирзоева Г.Р., Керимова Ш.А. Асимптотический анализ собственных частот осесимметрических колебаний ортотропных цилиндрических оболочек в бесконечной упругой среде, заполненной жидкостью // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 1. С. 69–74. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-1-69-74

Asymptotic analysis of natural frequencies of axisymmetric oscillations of orthotropic cylindrical shells in an infinite elastic medium, liquid filled

Famil A. Seyfullayev, Gulnar R. Mirzayeva, Shusha A. Kerimova*

Azerbaijan National Academy of Sciences
9 B. Vahabzadeh St., Baku, AZ 1143, Republic of Azerbaijan

*shusha_az@rambler.ru

(received: October 30, 2018; revised: November 29, 2018; accepted: January 16, 2019)

Abstract. Aim of the research. Free axisymmetric fluctuation of a cylindrical orthotropic cover, the infinite length contacting to the infinite elastic medium and filled with liquid is investigated.

Methods. At design of the thin-walled shell designs which are widely applied in aviation, the missile and space equipment and various fields of the industry, an important task is dynamic calculation of the intense deformed condition of these designs. At a research of dynamics of covers it is necessary to determine own frequencies and forms of small fluctuations, and frequencies from the lower part of a range are of the greatest interest. It is supposed that the rigidity of material of a cover is a little more than rigidity of material of the environment. The solution of the equations of movements of the environment is considered in two options.

Results. The frequency equation is received. The analysis of frequency and a form of fluctuations of a cover is carried out. The schedule of dependence of frequency of own axisymmetric fluctuations of a system on wave formation in the longitudinal direction is constructed. By means of an asymptotic method the frequency equations of the ridge cylindrical covers filled with liquid are constructed, the approximate frequencies of the equation and simple settlement formulas allowing to find values of the minimum own frequencies of fluctuations of the considered system are received, the forced fluctuations of the supported cover filled with liquid are investigated and defined is amplitude frequency characteristics of the considered oscillatory processes.

Keywords: orthotropic shell, free vibrations, natural oscillation frequencies, wave formation, elastic environment

References

1. Latifov F.S., Seyfullayev F.A., Alyev Sh.Sh. (2016). Svobodnye kolebaniya usilennoj poperechnymi rebrami anizotropnoj cilindricheskoj obolochki iz stekloplastika s tekushchej v nej zhidkost'yu [Free vibrations reinforced by transverse ribs of an anisotropic cylindrical shell made of fiberglass with a liquid flowing in it]. *Applied mechanics and technical physics*, 57(4), 158–162. (In Russ.)
2. Latifov F.S., Seyfullayev F.A. (2004). Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. *Trans. NAS Acad. Azer. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 24(1), 227–230.
3. Bosiakov S.M., Zhiwei W. (2011). Analiz svobodnyh kolebanij cilindricheskoj obolochki iz stekloplastika pri granichnyh usloviyah Nav'e [Free vibration analysis of cylindrical shell from fiberglass with Navier boundary conditions]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, (3), 24–27. (In Russ.)
4. Semenov A.A. (2016). Model of deformation stiffened orthotropic shells under dynamic loading. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 9(4), 485–497.
5. Seyfullayev A.I., Novruzova K.A. (2015). Issledovanie kolebaniya prodol'no podkrepленноj ortotropnoj cilindricheskoj obolochki s vyazkoj zhidkost'yu [Oscillations of longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shell filled with a viscous fluid]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3/7(75), 29–33 (In Russ.)
6. Kolosov G.I. (2012). Vibracionnaya i vekovaya neustojchivost' sostoyanij ravnovesiya cilindricheskih obolochek pri osevom szhatii [Vibration and secular instability of equilibrium states of cylindrical shells under axial compression]. *Cosmonovtika i raketostroenie*, 2(67), 145–150. (In Russ.)
7. Obukhov A.S. (1978). *Raschyot na prochnost' konstrukcij iz stekloplastikov i plastmassa neftepererabatyvayushchej i himicheskoy promyshlennosti* [Calculation of the strength of structures made of fiberglass and plastic of the oil refining and chemical industries]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 141. (In Russ.)
8. Latifov F.S. (1999). *Kolebaniya obolochek s uprugoj i zhidkoj sredoj* [Oscillations of shells with elastic and liquid media]. Baku: Elm Publ., 164. (In Russ.)
9. Smirnov V. (1974). *Kurs vysshej matematiki* [Course of Higher Mathematics]. Vol. 3. Part 2. Moscow: Nauka Publ., 672. (In Russ.)
10. Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Kerimova Sh.A. (2017). Zadacha mekhaniki ustalostnogo razrusheniya dvuslojnogo materiala s kraevymi treshchinami [Problem of the mechanics of fatigue fracture of a two-layer material]

with edge cracks]. *Mechanics of Composite Material*, 53(3), 415–424. (In Russ.)

11. Akbarov S.D., Guliev M.S. (2008). Propagation of axisymmetric longitudinal waves in a finitely pre-strained circular cylinder embedded in a finitely pre-strained infinite elastic body. *Mechanics of Composite Materials*, 44(5), 465–478. doi.org/10.1007/s11029-008-9045-6

12. Akbarov S.D. (2007). Resent investigations on the dynamical problems of the elastic body with initial (residual) stresses (review). *Int. Appl. Mechanic*, 43(12), 3–27.

13. Agalarov J.G., Seyfullayev A.I., Rustamova M.A. (2017). Dvizhenie vertikal'no raspolozhennogo cilindra v rezul'tate voln na poverhnosti zhidkosti [The movement of vertically located cylinder as a result of waves on the surface of liquid]. *Bulletin of Modern Science*, 2(26), 7–15. (In Russ.)

14. Bochkarev S.A., Matveenkov V.P. (2006). Konechno-ehlementnyj analiz sobstvennykh kolebanij cilindricheskoj obolochki s zhidkost'yu [Finite-element analysis of natural oscillations of a cylindrical shell with a liquid]. *Vychisl. mechanics: collection of scientific works*, (4), 3–12. Perm: Perm State Technical University Publ. (In Russ.)

15. Latifov F.S. (1999). Asimptoticheskij analiz zadachi o svobodnykh neosesimmetrichnykh kolebaniyah v beskonechnoj uprugoj srede cilindricheskoj obolochki, zapolnennoj ideal'noj zhidkost'yu [The asymptotic analysis of a task about free not axisymmetric fluctuations in an infinite elastic medium of the cylindrical cover filled with ideal liquid]. *DAN Az. Republics*, LV(5–6), 8–15. (In Russ.)

About the authors

Seyfullayev Famil Alizadeh – PhD in Technical Sciences, Senior Researcher Fellow, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan (Baku, Republic of Azerbaijan). *Research interests*: the wave dynamics. *Contacts*: e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com

Mirzayeva Gulnar Rovshan – PhD in Technical Sciences, Senior Researcher Fellow, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan (Baku, Republic of Azerbaijan). *Research interests*: the theory of elasticity and plasticity. *Contacts*: e-mail – gulnar.mirzayeva@gmail.com

Kerimova Shusha – researcher, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan (Baku, Republic of Azerbaijan). *Research interests*: the wave dynamics. *Contacts*: e-mail – shusha_az@rambler.ru

For citation

Seyfullayev F.A., Mirzayeva G.R., Kerimova Sh.A. (2019). Asymptotic analysis of natural frequencies of axisymmetric oscillations of orthotropic cylindrical shells in an infinite elastic medium, liquid filled. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(1), 69–74. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-1-69-74 (In Russ.)