

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

УДК 004.942, 004.021
DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-1-62-68

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Моделирование неполной алгебраической проблемы собственных значений и векторов методом частотно-динамической конденсации на основе МКЭ в форме классического смешанного метода

А.В. Игнатьев*, А.В. Чумаков, В.В. Гилка

Волгоградский государственный технический университет
Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-т имени В.И. Ленина, 28

*alignat@gmail.com

(поступила в редакцию: 22 ноября 2018 г.; доработана: 29 декабря 2018 г.; принята к публикации: 17 января 2019 г.)

Актуальность. Динамический анализ сложных конструкций при помощи численных методов приводит к решению алгебраической проблемы собственных значений и соответствующих им собственных векторов высоких порядков. Решение этой задачи для матриц высоких порядков выполняется с использованием редуцированных методов. Одним из наиболее эффективных является метод последовательной частотно-динамической конденсации, позволяющий частичный учет динамических свойств конструкции во второстепенных степенях свободы. Это позволяет получить более точные результаты по сравнению со статической конденсацией. Частотно-динамическая конденсация традиционно используется для редуцирования частотных уравнений, полученных на основе метода конечных элементов в форме метода перемещений или метода сил.

Методы. Авторами разработан алгоритм метода частотно-динамической конденсации для частотного уравнения, полученного на основе метода конечных элементов (МКЭ) в форме классического смешанного метода, позволяющий получить не только спектр низших частот колебаний, но и соответствующие им формы колебаний и напряженно-деформированное состояние конструкции.

Результаты. В статье приведены описание алгоритма и его практическая реализация в задаче динамического расчета прямоугольной пластины. Представлены результаты численного расчета задачи. Дана оценка точности метода, и приведены рекомендации по его использованию.

Ключевые слова: метод конечных элементов в форме классического смешанного метода, алгебраическая проблема собственных значений и собственных векторов, частотно-динамическая конденсация

Введение

Динамический анализ сложных конструкций с помощью различных численных методов строительной механики приводит к решению алгебраической проблемы собственных значений (СЗ) и соответствующих им собственных векторов (СВ) достаточно высокого порядка. Решение этой задачи для плотных матриц небольшого размера не представляет сложности, но для матриц высоких

порядков она оказывается далеко не тривиальной, и выбор эффективного метода ее решения совсем не прост.

Во втором случае используются методы, основанные на использовании физических моделей редуцирования: метод суперэлементов (подконструкций) [1–4], интерполяционные методы (метод разреженных сеток, сплайн-методы) [5–6], метод покомпонентного синтеза форм (модального синтеза) [7–20] и их математическое моделирование на последовательности сгущающихся конечно-элементных сеток или узлов конденсации.

Одним из наиболее эффективных, применяемых для решения неполной проблемы СЗ и СВ

© Игнатьев А.В., Чумаков А.В., Гилка В.В., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

высокого порядка является метод последовательной частотно-динамической конденсации (ЧДК), изложенный в [21–25 и др.] и получивший развитие и применение в ряде публикаций. Он принадлежит к большой группе редуциционных методов и основан на выделении в конструкции главных (оставляемых) и второстепенных (исключаемых) степеней свободы с последующим исключением последних. В отличие от метода статической конденсации [26], в котором полностью пренебрегают динамическими свойствами второстепенных степеней свободы, при ЧДК выполняется частичный учет динамических свойств конструкции во второстепенных степенях свободы. Это позволяет получить более точные результаты по сравнению со статической конденсацией.

Во всех упомянутых выше работах частотно-динамическая конденсация используется для редуцирования частотных уравнений, полученных на основе метода конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений или метода сил.

Далее представлен алгоритм ЧДК для частотного уравнения, полученного на основе МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ МКЭ) [27], позволяющий получить не только спектр низших частот колебаний, но и соответствующие им формы колебаний, а также напряженно-деформированное состояние конструкции.

Предварительная статическая конденсация

Учитывая, что согласованная матрица масс не имеет преимуществ по сравнению с несогласованной матрицей масс в отношении точности результатов расчета [28], частотное уравнение КСФ МКЭ может быть записано в виде

$$[D_{ст} - m_{дин}] \{\bar{q}\} = 0, \quad (1)$$

где $[D_{ст}] = \begin{bmatrix} r_{k,k} & \tilde{r}_{k,f} \\ \tilde{\delta}_{f,k} & \delta_{f,f} \end{bmatrix}$ – статическая матрица

откликов; $[m_{дин}] = \begin{bmatrix} m_k & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix}$ – диагональная

матрица масс; $\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} q_k \\ \tilde{q}_f \end{Bmatrix}$ – вектор основных

неизвестных (кинематических и силовых); $k = 1, 2, \dots, n$; $f = n + 1, n + 2, \dots, n + m$.

Представим уравнение (1) в виде системы матричных уравнений

$$\begin{cases} (r_{k,k} - \lambda m_k) q_k + \tilde{r}_{k,f} \tilde{q}_f = 0, \\ \tilde{\delta}_{f,k} q_k + (\delta_{f,f} - \lambda m_f) \tilde{q}_f = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Как показано в некоторых исследованиях [29], влияние объемных масс, полученных сведением к ним распределенных по площади масс конечных элементов, незначительно. Поэтому им можно пренебречь, то есть задать $m_f = 0$. Тогда второе уравнение в (2) принимает вид

$$\tilde{\delta}_{f,k} q_k + \delta_{f,f} \tilde{q}_f = 0. \quad (3)$$

Из него следует

$$\tilde{q}_f = -\delta_{f,f}^{-1} \tilde{\delta}_{f,k} q_k. \quad (4)$$

Подставив (4) в первое уравнение в (2), получим частотное уравнение вида

$$[D_{ст(k)} - \lambda m_k] \{q_k\} = 0, \quad (5)$$

где $D_{ст(k)} = (r_{k,k} - \tilde{r}_{k,f} \delta_{f,f}^{-1} \tilde{\delta}_{f,k})$ – преобразованная с помощью статической конденсации матрица откликов $D_{ст}$ из (1).

Последовательная частотно-динамическая конденсация

Выделим теперь из n узлов конечно-элементной сетки с расположенными в них точечными массами m_k N узлов конденсации, в которые должны быть приведены эти массы.

Тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$\begin{cases} (r_{b,b} - \lambda m_b) q_b + r_{b,s} q_s = 0, \\ r_{s,b} q_b + (r_{s,s} - \lambda m_s) q_s = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $b = 1, 2, \dots, N$ – основные степени свободы, $s = N + 1, N + 2, \dots, n$ – второстепенные степени свободы.

Выполнив вновь статическую конденсацию к основным степеням свободы, получим новое редуцированное частотное уравнение:

$$[D_{ст(b)} - \lambda m_b] \{q_b\} = 0, \quad (7)$$

где $D_{ст(b)} = (r_{b,b} - r_{b,s} r_{s,s}^{-1} r_{s,b})$.

Разделим все массы, не находящиеся в узлах конденсации, называемых второстепенными, на отдельные группы, включающие M_i степеней сво-

боды, по степени их близости к узлам конденсации.

Для каждой из этой групп составляется парциальная система вида

$$\begin{cases} (r_{\bar{b},\bar{b}} - \lambda m_{\bar{b}}) q_{\bar{b}} + r_{\bar{b},\bar{s}} q_{\bar{s}} = 0, \\ r_{\bar{s},\bar{b}} q_{\bar{b}} + (r_{\bar{s},\bar{s}} - \lambda m_{\bar{s}}) q_{\bar{s}} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $\bar{b} = 1, 2, \dots, N, N+1, N+2, \dots, N+M_i$,
 $s = N+M_i+1, N+M_i+2, \dots, n$.

Для каждой парциальной системы выполним статическую конденсацию и получим расширенное редуцированное частотное уравнение:

$$[D_{\text{ст}(\bar{b})} - \lambda m_{\bar{b}}] \{q_{\bar{b}}\} = 0, \quad (9)$$

где $D_{\text{ст}(\bar{b})} = (r_{\bar{b},\bar{b}} - r_{\bar{b},\bar{s}} r_{\bar{s},\bar{s}}^{-1} r_{\bar{s},\bar{b}})$.

Решив это уравнение, определим для этой парциальной системы соответствующие СЗ и СВ.

Возвращаясь снова к частотному уравнению (7), найдем такую матрицу масс m_b , при которой все N собственных значений и собственных векторов этого уравнения совпадали бы с N низших собственных частот и форм колебаний, установленных для уравнения (9).

Для этого, исходя из физического смысла задачи, заменим матрицу m_b в (7) матрицей

$$\bar{m}_b = m_b + \Delta m_b^{(i)}, \quad (10)$$

где $\Delta m_b^{(i)}$ – конденсационные добавки к имеющимся в узлах b массам от i -ой группы второстепенных масс, обеспечивающие равенство N собственных частот и форм колебаний уравнений (7) и (9).

Подставив в (7) вместо m_b матрицу \bar{m}_b и найденные для (9) N собственных значений $\lambda_k^{(i)}$, ($k = 1, 2, \dots, N$) и собственных векторов $v_{jk}^{(i)}$, получим следующее уравнение:

$$[[D_{\text{ст}(b)}] - [\lambda_k^{(i)}][\bar{m}_b]] [v^{(i)}] = 0, \quad (11)$$

где $[\lambda_k^{(i)}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(i)} & & & \\ & \lambda_2^{(i)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N^{(i)} \end{bmatrix}$ – диаго-

нальная матрица из N собственных значений уравнения (9);

$$[v^{(i)}] = \begin{bmatrix} v_{1,1}^{(i)} & v_{2,1}^{(i)} & \dots & v_{N,1}^{(i)} \\ v_{1,2}^{(i)} & v_{2,2}^{(i)} & \dots & v_{N,2}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1,j}^{(i)} & v_{2,j}^{(i)} & \dots & v_{N,j}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1,N}^{(i)} & v_{2,N}^{(i)} & \dots & v_{N,N}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{– матрица}$$

из N соответствующих собственных векторов.

Решая уравнение (11), находим:

$$[\bar{m}_b^{(i)}] = [\lambda_k^{(i)}]^{-1} [D_{\text{ст}(b)}]. \quad (12)$$

Матрица конденсационных добавок от i -ой группы второстепенных масс

$$\Delta m_b^{(i)} = \bar{m}_b^{(i)} - m_b. \quad (13)$$

Суммируя добавки для всех парциальных систем, получим конденсированную к выбранным N узлам b редуцированную матрицу масс рассматриваемой конструкции:

$$m_b^{(\text{ред})} = m_b + \sum_{i=1}^T \Delta m_b^{(i)}, \quad (14)$$

где T – число парциальных систем.

Подставив в (11) вместо \bar{m}_b матрицу масс $m_b^{(\text{ред})}$ по (14), решим полученное редуцированное частотное уравнение:

$$[[D_{\text{ст}(b)}] - [\lambda_k] [m_b^{(\text{ред})}]] \{q_b\} = 0. \quad (15)$$

В результате найдем редуцированный к выбранным узлам конденсации b спектр собственных значений СЗ и собственных векторов СВ, то есть λ_k , $v_{j,k}$, где $k = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Результаты вычислительного эксперимента

Выполним расчет прямоугольной жестко заземленной по контуру пластинки размером 8×12 м, толщиной $h = 0,6$ м, несущей равномерно распределенную массу $m = 1$ кг/см² (см. рисунок). В таблице приведены результаты нескольких вариантов расчета при разбиении пластинки КЭ-сеткой 8×12 : с использованием полной системы уравнений, использованием статической конденсации (СК), двух вариантов частотно-динамической конденсации (ЧДК).

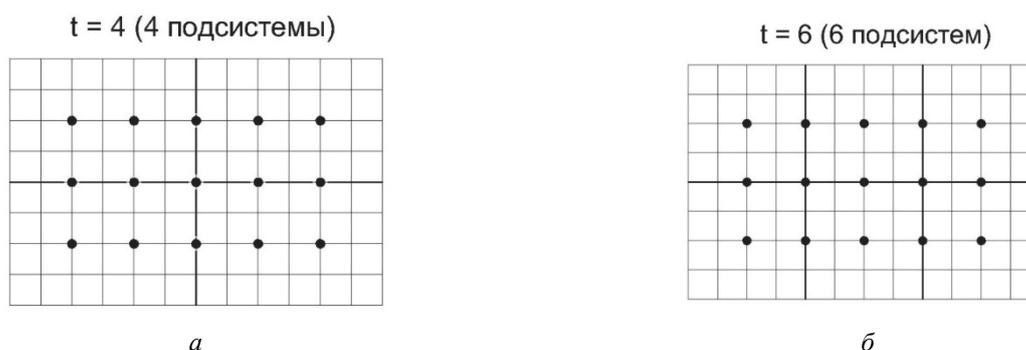


Рисунок. Узлы конденсации для прямоугольной жестко заземленной по контуру пластинки:
 a – 4 подсистемы; b – 6 подсистем
[Figure. Condensation units for a rectangular plate rigidly clamped along the contour:
 a – 4 subsystems; b – 6 subsystems]

Таблица

Результаты расчета пластинки при разбиении КЭ-сеткой 8×12
[Table. The results of the analysis of the plate when splitting FE-grid 8×12]

СЗ	КЭ-сетка 8×12, $n = 231$	СК, $n = 15$	Δ , %	ЧДК, $t = 4$	Δ , %	ЧДК, $t = 6$	Δ , %
λ_1	2,512	2,66	6	2,372	-5	2,370	-5
λ_2	1,030	1,49	30	1,060	-2	1,051	-2
λ_3	0,423	0,479	13	0,426	0,7	0,429	1
λ_4	0,412	0,432	4,5	0,395	4	0,398	4
λ_5	0,306	0,390	27,4	0,295	-3	0,291	-4
λ_6	0,190	0,212	11,6	0,192	1	0,188	-1
λ_7	0,182	0,197	8,2	0,178	-2	0,174	-4
λ_8	0,116	0,181	56,0	0,109	-6	0,112	-3
λ_9	0,110	0,154	40,0	0,104	-6	0,101	-8
λ_{10}	0,101	0,132	20,8	0,101	0	0,093	-8
λ_{11}	0,087	0,119	34,2	0,081	-7	0,085	-2,6
λ_{12}	0,080	0,103	26,3	0,074	-7	0,081	-1
λ_{13}	0,062	0,089	43,5	0,058	-7	0,058	-7
λ_{14}	0,058	0,081	40,0	0,046	-20	0,045	-21
λ_{15}	0,045	0,063	40,0	0,031	-32	0,029	-34

Выводы

По сравнению с методом статической конденсации, обеспечивающим получение приемлемого результата только для минимальной собственной частоты, метод частотно-динамической конденсации позволяет получить результаты близкие к точным (с абсолютной погрешностью не более 7 %) для 13-ти первых собственных частот.

Выполненное исследование при различных соотношениях числа основных и второстепенных сте-

пеней свободы, числа степеней свободы частичной системы, позволило выявить их оптимальные границы для получения редуцированного спектра частот с заданной степенью точности.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области. Проект № 18-41-340013.

Список литературы

1. *Choi J.H., Kim H., Cho M.* Iterative method for dynamic condensation combined with substructuring scheme // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 317. No. 1. Pp. 199–218.
2. *Вольмир А.С., Терских В.Н.* Исследование динамики конструкций из композитных материалов на основе метода суперэлементов // *Механика композитных материалов*. 1979. № 4. С. 652 – 655.
3. *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. М.: Машиностроение, 1989. 248 с.
4. *Тюханов В.В.* Метод решения задач динамики пластинок сложной формы // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки*. 2011. № 1. С. 138–144.
5. *Игнатъев В.А., Ромашкин В.Н.* Определение редуцированного спектра частот и форм свободных колебаний систем с большим числом степеней свободы на основе сплайн-коллокационной конденсации // *Вестник ВолГАСУ. Сер.: Строительство и архитектура*. 2014. Вып. 35 (54). С. 140–152.
6. *Карпов Д.В.* Развитие метода редуцированных элементов для расчета регулярных стержневых систем и анализа плоских температурных полей: дис. ... канд. техн. наук. Владивосток, 2002. 209 с.
7. *Hurty W.C.* Dynamic analysis of structural systems using component modes // *AIAA Journal*. 1965. Vol. 3. No. 4. Pp. 678–685.
8. *Craig R., Bampton M.* Coupling of Substructures for Dynamic Analysis // *Am. Inst. Aero. Astro. J.* 1968. Vol. 6. No. 7. Pp. 1313–1319.
9. *Craig R.R.* Substructure method in vibration // *J. Vib. Acoust.* 1995. No. 117(B). Pp. 207–213.
10. *Papadimiriou C., Papadioti D.C.* Component mode synthesis technique for finite element model updating // *Comput. Struct.* 2013. 126. Pp. 15–28.
11. *Hou G., Maroju V.* Component mode synthesis-based design optimization method for local structural modification // *Struct. Optim.* 1995. 10. Pp. 128–136.
12. *Lall S., Marsden J.E., Glavaski S.* A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control system // *Int. J. Robust. Nonlinear Control* 2002. 12(6). Pp. 519–535.
13. *Bourquin F.* Analysis and comparison of several component mode synthesis methods on one dimensional domains // *Numer. Math.* 1990. 58(1). Pp. 11–33.
14. *Kim J.G., Lee P.S.* A posteriori error estimation method for the flexibility-based component mode synthesis // *AIAA J.* 2015. 53 (10). Pp. 2828–2837.
15. *Bennighof J.K., Lehoucq R.B.* An automated multi-level substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics // *SIAM J. Sci. Comput.* 2004. 25 (6). Pp. 2084–2106.
16. *Kim J.G., Lee P.S.* An enhanced Craig – Bampton method // *Intl. J. Numer. Methods Eng.* 2015. 103. Pp. 79–93.
17. *Kim J.G., Boo S.H., Lee P.S.* An enhanced AMLS method and its performance // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2015. 287. Pp. 90–111.
18. *Rabczuk T., Belytschko T.* Adaptivity for structured meshfree particle methods in 2D and 3D // *Intl. J. Numer. Methods Eng.* 2005. 63 (11). Pp. 1559–1582.
19. *Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Потапенко А.Л.* Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2006. № 10. С. 99–110.
20. *Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л.* Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах // *Int. Journ. for Computational Civil and Structural Engineering*. 2011. Vol. 7. Iss. 1. Pp. 76–83.
21. *Игнатъев В.А.* Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем. Саратов: СГУ, 1992. 142 с.
22. *Игнатъев В.А., Ромашкин В.Н.* Последовательная частотно-динамическая конденсация // *Материалы науч.-техн. интернет-конференции*. Волгоград: ВолГАСУ, 2010. С. 63–87.
23. *Игнатъев В.А.* Модифицированный метод последовательной частотно-динамической конденсации // *Academia. Архитектура и строительство*. 2011. № 2. С. 100–103.
24. *Игнатъев В.А., Чантуридзе А.У.* Метод частотно-динамической конденсации // *Вестник ВолГАСУ*. 2011. Вып. 24 (43). С. 46–53.
25. *Ромашкин В.Н.* Суперэлементная формулировка метода частотно-динамической конденсации // *Интернет-вестник ВолГАСУ. Серия: Политематическая*. 2013. Вып. 1 (25) URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1\(25\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1(25).pdf)
26. *Guyan R.J.* Reduction of Stiffness and Mass Matrices // *AIAA Journal*. 1965. Vol. 3. No. 2. P. 380.
27. *Игнатъев В.А., Игнатъев А.В., Жиделев А.В.* Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики. Волгоград: ВолГАСУ, 2006. 171 с.
28. *Габова В.В.* Применение смешанной формы МКЭ к расчетам стержневых систем: дис. ... канд. техн. наук. Волгоград: Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, 2011.
29. *Игнатъев В.А.* Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Ротапринт СВВУ, 1973. 433 с.

Об авторах

Игнатъев Александр Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры программного обеспечения автоматизированных систем, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ) (Волгоград, Российская Федерация). ORCID iD: 0000-0003-0733-880. Scopus ID: 57190970792. eLIBRARY SPIN-код: 9405-9800. *Область научных интересов:* задачи и методы компьютерного моделирования и расчета конструкций и сооружений. *Контактная информация:* e-mail – alignat@gmail.com

Чумаков Артем Владимирович – магистрант кафедры программного обеспечения автоматизированных систем, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ) (Волгоград, Российская Федерация). *Область научных интересов:* задачи и методы компьютерного моделирования и расчета конструкций и сооружений. *Контактная информация:* e-mail – chumakovtema@gmail.com

Гилка Вадим Викторович – магистрант кафедры программного обеспечения автоматизированных систем, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ) (Волгоград, Российская Федерация). *Область научных интересов:* задачи и методы ком-

пьютерного моделирования и расчета конструкций и сооружений. *Контактная информация*: e-mail – gilka_vv@mail.ru

Для цитирования

Игнатьев А.В., Чумаков А.В., Гилка В.В. Моделирование неполной алгебраической проблемы соб-

ственных значений и векторов методом частотно-динамической конденсации на основе МКЭ в форме классического смешанного метода // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 1. С. 62–68. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-1-62-68

RESEARCH PAPER

Simulation of an incomplete algebraic problem of eigenvalues and vectors by the method of frequency-dynamic condensation based on FEM in the form of the classical mixed method

Alexander V. Ignatyev*, Artem V. Chumakov, Vadim V. Gilka

Volgograd State Technical University
28 Lenin Ave., Volgograd, 400005, Russian Federation

*alignat@gmail.com

(received: November 22, 2018; revised: December 29, 2018; accepted: January 17, 2019)

Abstract. Relevance. Dynamic analysis of complex structures using numerical methods leads to the solution of the algebraic problem of eigenvalues and the corresponding eigenvectors of high orders. The solution of this problem for high order matrices is performed using reduction methods. One of the most effective methods is the method of sequential frequency-dynamic condensation, which allows partial consideration of the dynamic properties of the structure in the minor degrees of freedom. This allows for more accurate results compared to static condensation. Frequency-dynamic condensation is traditionally used to reduce frequency equations derived from the finite element method in the form of the displacement method or the force method.

Methods. The authors have developed an algorithm for the frequency-dynamic condensation method for the frequency equation obtained on the basis of the FEM in the form of the classical mixed method. That allows to obtain not only the spectrum of the lower vibration frequencies, but also the corresponding vibration modes and the stress-strain state of the structure.

Results. This article describes the algorithm and its practical implementation in the problem of dynamic analysis of a rectangular plate. The results of the numerical analysis of the problem are presented. An assessment of the accuracy of the method and recommendations for its use are given.

Keywords: finite elements method in the form of the classical mixed method, algebraic eigenvalues and eigenvectors problem, frequency-dynamic condensation

Acknowledgements

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region. Project No. 18-41-340013.

References

1. Choi J.H., Kim H., Cho M. (2008). Iterative method for dynamic condensation combined with substructuring scheme. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1), 199–218.
2. Vol'mir A.S., Terskih V.N. (1979). Issledovanie dinamiki konstrukcij iz kompozitnyh materialov na osnove metoda superelementov [The investigation of the dynamics of structures made of composite materials based on the super-elements method]. *Mekhanika kompozitnyh materialov* [Mechanics of composite materials], (4), 652–655. (In Russ.)

3. Vol'mir A.S., Kuranov B.A., Turbaivskij A.T. (1989). *Statika i dinamika slozhnyh struktur: prikladnye mnogo-urovnevye metody issledovanij* [Statics and dynamics of complex structures: Applied multilevel research methods]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 248. (In Russ.)

4. Tyuhanov V.V. (2011). Metod resheniya zadach dinamiki platinok slozhnoj formy [The method of solving problems of dynamics of plates of complex shape] // *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki* [Natural sciences. Journal of fundamental and applied researches], (1), 138–144. (In Russ.)

5. Ignat'ev V.A., Romashkin V.N. (2014). Opredelenie reducirovannogo spektra chastot i form svobodnyh kolebanij sistem s bol'shim chislom stepenej svobody na osnove splajn-kollokacionnoj kondensacii [Determination of the reduced frequency spectrum and forms of free vibrations of systems with a large number of degrees of freedom based on spline-collocation condensation]. *Bulletin of*

Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture, 35(54), 140–152. (In Russ.)

6. Karpov D.V. (2002). *Razvitie metoda reducirovannykh ehlementov dlya rascheta reguljarnyh sterzhnevyyh sistem i analiza ploskih temperaturnyh polej* (dis. ... kand. tekhn. nauk) [Development of the reduced elements method for regular core systems and plane temperature fields analysis (PhD thesis)]. Vladivostok, 209. (In Russ.)

7. Hurty W.C. (1965). Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4), 678–685.

8. Craig R., Bampton M. (1968). Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. *Am. Inst. Aero. Astro. J.*, 6(7), 1313–1319.

9. Craig R.R. (1995). Substructure method in vibration. *J. Vib. Acoust.*, 117(B), 207–213.

10. Papadimiriou C., Papadioti D.C. (2013). Component mode synthesis technique for finite element model updating. *Comput. Struct.*, (126), 15–28.

11. Hou G., Maraju V. (1995). Component mode synthesis-based design optimization method for local structural modification. *Struct. Optim.*, (10), 128–136.

12. Lall S., Marsden J. E., Glavaski S. (2002). A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control system. *Int. J. Robust. Nonlinear Control.*, 12(6), 519–535.

13. Bourquin F. (1990). Analysis and comparison of several component mode synthesis methods on one dimensional domains. *Numer. Math.*, 58(1), 11–33.

14. Kim J.G., Lee P.S. (2015). A posteriori error estimation method for the flexibility-based component mode synthesis. *AIAA J.*, 53(10), 2828–2837.

15. Bennighof J.K., Lehoucq R.B. (2004). An automated multi-level substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6), 2084–2106.

16. Kim J.G., Lee P.S. (2015). An enhanced Craig – Bampton method. *Intl. J. Numer. Methods Eng.*, (103), 79–93.

17. Kim J.G., Boo S.H., Lee P.S. (2015). An enhanced AMLS method and its performance. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, (287), 90–111.

18. Rabczuk T., Belytschko T. (2005). Adaptivity for structured meshfree particle methods in 2D and 3D. *Intl. J. Numer. Methods Eng.*, 63(11), 1559–1582.

19. Belostockij A.M., Dubinskij S.I., Potapenko A.L. (2006). *Metody dinamicheskogo sinteza podkonstrukcij v zadachah modelirovaniya slozhnyh inzhenernyh sistem* [Dynamic synthesis Methods of substructures in the problems of modeling complex engineering systems]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions], (10), 99–110. (In Russ.)

20. Belostockij A.M., Potapenko A.L. (2011). Submodeling and dynamic synthesis of substructures methods realizations in multipurposes and objectoriented program packages. *Int. Journ. for Computational Civil and Structural Engineering*, 7(1), 76–83. (In Russ.)

21. Ignatyev V.A. (1992). *Redukcionnye metody rascheta v statike i dinamike plastinchatyh sistem* [Reduction analysis methods in statics and dynamics of plate systems]. Saratov: SGU Publ., 142. (In Russ.)

22. Ignatyev V.A., Romashkin V.N. (2010). *Posledovatel'naya chastotno-dinamicheskaya kondensaciya. Materialy nauch.-tekhn. internet-konferencii* [Sequential frequency-dynamic condensation. Materials of scientific and techni-

cal Internet conference]. Volgograd: VolgGASU Publ., 63–87. (In Russ.)

23. Ignatyev V.A. (2011). *Modificirovannyj metod posledovatel'noj chastotno-dinamicheskoy kondensacii* [Modified method of sequential frequency-dynamic condensation]. *Academia. Arhitektura i stroitel'stvo*, (2), 100–103. (In Russ.)

24. Ignatyev V.A., Chanturidze A.U. (2011). *Metod chastotno-dinamicheskoy kondensacii* [Modified method of sequential frequency-dynamic condensation]. *Vestnik VolgGASU*, 24(43), 46–53. (In Russ.)

25. Romashkin V.N. (2013). *Superehlementnaya formulirovka metoda chastotno-dinamicheskoy kondensacii*. *Internet-vestnik VolgGASU. Seria Multitematiceskaa*, 1(25). [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1\(25\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1(25).pdf) (In Russ.)

26. Guyan R. J. (1965). Reduction of Stiffness and Mass Matrices. *AIAA Journal*, 3(2), 380.

27. Ignatyev V.A., Ignatyev A.V., Zhidelev A.V. (2006). *Smeshannaya forma metoda konechnykh ehlementov v zadachah stroitel'noj mekhaniki* [Mixed form of the finite element method in problems of structural mechanics]. Volgograd: VolgGASU Publ., 171. (In Russ.)

28. Gabova V.V. (2011). *Primenenie smeshannoj formy MKEH k raschetam sterzhnevyyh sistem* (Dis. ...kand. tekhn. nauk) [Application of the mixed form of the FEM to analysis of truss structures (PhD thesis)]. Institute of Architecture and Civil Engineering of Volgograd State Technical University. (In Russ.)

29. Ignatyev V.A. (1973). *Raschet reguljarnyh sterzhnevyyh sistem* [Design of regular truss systems]. Saratov: Rotaprint SVVU Publ., 433. (In Russ.)

About the authors

Alexander V. Ignatyev – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Automated Systems Software, Volgograd State Technical University (VSTU) (Volgograd, Russian Federation). ORCID iD: 0000-0003-0733-880. Scopus ID: 57190970792. eLIBRARY SPIN-code: 9405-9800. *Research interests*: tasks and methods of computer simulation and calculation of structures and structures. *Contacts*: e-mail – alignat@gmail.com

Artem V. Chumakov – master student of the Department of Software of Automated Systems, Volgograd State Technical University (VSTU) (Volgograd, Russian Federation). *Research interests*: tasks and methods of computer simulation and calculation of structures and structures. *Contacts*: e-mail – chumakovtema@gmail.com

Vadim V. Gilka – master student of the Department of Software of Automated Systems, Volgograd State Technical University (VSTU) (Volgograd, Russian Federation). *Research interests*: tasks and methods of computer simulation and calculation of structures and structures. *Contacts*: e-mail – gilka_vv@mail.ru

For citation

Ignatyev A.V., Chumakov A.V., Gilka V.V. (2019). Simulation of an incomplete algebraic problem of eigenvalues and vectors by the method of frequency-dynamic condensation based on FEM in the form of the classical mixed method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(1), 62–68. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-1-62-68 (In Russ.)