

УДК 534.121.2

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-337-347

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Численное исследование собственных частот и форм колебаний воздухоопорных сооружений

Н.А. Мокин\*, А.А. Кустов, М.И. Ганджунцев

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет  
Ярославское шоссе, 26, Москва, Российская Федерация, 129337

\*Автор, ответственный за переписку

(поступила в редакцию: 18 мая 2018 г.; принята к публикации: 02 августа 2018 г.)

Собственные частоты и формы колебаний являются важными динамическими характеристиками строительных конструкций и сооружений. В данной работе приведено решение задач по определению собственных частот и форм колебаний предварительно напряженных мягких оболочек из ортотропного материала. В матричном виде записано уравнение движения для системы с конечным числом степеней свободы, из которого выводится уравнение собственных колебаний. Отмечены особенности проведения модального анализа предварительно напряженной системы. Для отработки методики в научной литературе была найдена и решена тестовая задача по модальному анализу круговой цилиндрической оболочки (пневмобалки). В изученной работе для анализа частот и форм собственных колебаний пневмобалки при различных граничных условиях используется одномерная (стержневая) модель, для которой было получено аналитическое решение с учетом ортотропных механических свойств и предварительного напряжения. Тестовая задача решена в данной работе с использованием пространственной оболочечной модели на основе метода конечных элементов с применением программного комплекса ANSYS Mechanical. Проведено сопоставление полученных численных результатов с «эталонными» решениями, объяснены возможные причины расхождения результатов. Методика решения тестовой задачи была применена для численного исследования собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки на прямоугольном плане размером 20×50 м. Для моделей различной степени дискретизации достигнута практическая сходимость результатов. Между величиной внутреннего давления и квадратами собственных частот выявлена практически линейная зависимость, что согласуется с известными решениями, приведенными в научной литературе для изотропных мембран.

**Ключевые слова:** воздухоопорное сооружение, пневмобалка, модальный анализ, собственные частоты и формы колебаний, метод конечных элементов

### Введение

За последние десять лет в нашей стране было возведено достаточно много воздухоопорных сооружений различного назначения. В настоящее время самым распространенным типом воздухоопорных сооружений являются оболочки на прямоугольном плане (рис. 1).

Об интересе к подобным конструкциям в отечественной науке свидетельствует появление обзорных статей по данной теме, например [1]. Сложность расчета таких сооружений на действие внешних нагрузок обусловлена рядом факторов:

- необходимая жесткость конструкции создается за счет внутреннего давления, являющегося следящей нагрузкой;
- форма оболочки может существенно изменяться в процессе нагружения;

- материал оболочки является ортотропным и работает только на растяжение,
- при ветровых воздействиях проявляются аэроупругие эффекты [2, с. 396].

Исследованиям колебаний оболочек посвящено множество как классических, например, [3–5], так и современных работ [6; 7]. Монография [3] является фундаментальным трудом, посвященным общим вопросам анализа собственных колебаний оболочек с помощью операторных методов. Для изотропных прямоугольных мембран влияние натяжения на частоты собственных колебаний описано в книге [4]. Некоторые вопросы колебаний гибких ортотропных оболочек канонической формы описаны в главе 3 книги [8]. Следует отметить, что аналитические решения удается получить только для оболочек и мембран простой (канонической) формы.

В статье [9] изучаются собственные частоты и формы колебаний пневмобалки (круговой цилиндрической оболочки, предварительно напряженной за счет избыточного давления) с помощью метода динамической жесткости (*dynamic stiffness method*), разработанного в [10]. Пневмобалка моделируется в виде стержня типа Тимошенко, т.е. учитываются деформации поперечного сдвига. Такая модель пневмобалки позволяет учесть ортотропные физико-механические свойства материала и нелинейные эффекты, вызванные следящей нагрузкой от внутреннего давления, и получить аналитическое решение [9]. Точная матрица динамической жесткости пневмобалки была получена путем линеаризации нелинейных уравнений около предварительно напряженного состояния. На основе проведенного обзора литературы впервые получены аналитические выражения для определения собственных частот колебаний пневмобалки из ортотропного материала при различных граничных условиях. Достоверность результатов подтверждается их сопоставлением с полученным ранее решением задачи для шарнирно опертой пневмобалки из изотропного материала [10], а также с результатами, полученными для пространственной оболочечной модели методом конечных элементов в ПК *Abaqus*.



Рис. 1. Воздухоопорное покрытие футбольного стадиона в Краснодаре, спроектированного и возведенного ООО «ПСБ «Вертеко»»  
[Figure 1. Air-supported roof of football stadium at Krasnodar, Russia. Project and erection was performed by LLC “PSB Verteco”]

## 1. Математическая постановка задачи

### 1.1. Определение частот и форм собственных колебаний для системы с конечным числом степеней свободы

В настоящее время для расчета строительных конструкций, как правило, используются численные методы, а поскольку метод конечных элементов сочетает в себе универсальность алгоритмов решения различных краевых задач с эффективно-

стью компьютерной реализации вычислений [11], то он получил наибольшее распространение. Главный принцип, на котором он основан – это рассмотрение реальной конструкции в виде системы с конечным числом степеней свободы.

Запишем в матричном виде уравнение движения для системы с конечным числом степеней свободы [12; 13]:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p, \quad (1)$$

где  $u$  – вектор узловых перемещений для всего тела;  $\dot{u}$  и  $\ddot{u}$  – векторы узловых скоростей и ускорений (точками обозначены производные по времени);  $M$ ,  $C$ ,  $K$  – «глобальные» матрицы масс, демпфирования и жесткости для всего тела;  $p$  – вектор эквивалентных узловых нагрузок для всего тела.

Модальный анализ проводится для определения частот и форм (мод) собственных колебаний конструкций в предположении, что система является линейной. Внешние силы и демпфирование полагаются равными нулю. В этом случае уравнение колебаний конструкции в матричной форме (1) принимает вид

$$M\ddot{u} + Ku = 0. \quad (2)$$

Модальный анализ заключается в нахождении условий, при которых система совершает гармонические колебания по закону [13]:

$$u(t) = \Psi \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

где  $\Psi$  – вектор, характеризующий форму собственных колебаний (соотношения между смещениями узлов);  $\omega$  – круговая частота собственных колебаний;  $\varphi_0$  – начальная фаза.

Подстановка (3) в (2) дает уравнение собственных колебаний:

$$(K - M\omega^2)\Psi = 0. \quad (4)$$

Тривиальным решением уравнения является нулевое смещение узлов (система остается неподвижной). Нетривиальное решение уравнения (4) существует лишь тогда, когда величины  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) обращают в нуль детерминант матрицы  $(K - M\omega^2)$ .

Соответствующие им формы собственных колебаний  $\Psi$  вычисляются лишь с точностью до произвольного множителя, значение которого определяется избранным способом нормировки собственных форм [13]. Таким образом, амплитуды собственных колебаний не определены, из решения уравнения (4) могут быть получены только

соотношения между перемещениями различных точек системы. Отметим, что число собственных форм совпадает с числом степеней свободы динамической системы  $n$ .

Наряду с круговой собственной частотой  $\omega_i$  также вводится собственная частота  $f_i$ , представляющая собой число колебаний по  $i$ -той собственной форме, совершаемых системой за одну секунду:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}. \quad (5)$$

В качестве основного инструмента для проведения расчетов выбран верифицированный в системе PAAСH универсальный программный комплекс (ПК) *ANSYS Mechanical*, в котором реализована возможность учета предварительного напряжения конструкции при проведении модального анализа, а также возможность использования мембранных конечных элементов из ортотропного материала [14].

### 1.2. Особенности модального анализа предварительно напряженной системы

Собственные частоты и формы колебаний предварительно напряженной системы отличаются от собственных частот и форм колебаний ненапряженной системы. Этот эффект можно наблюдать при натяжении струн в музыкальных инструментах – для систем, работающих преимущественно на растяжение, частоты растут с увеличением предварительного напряжения [4; 12; 13].

Как указано выше, модальный анализ системы имеет смысл только в линейной постановке, в нелинейных задачах можно говорить о разложении движения системы по формам свободных колебаний в окрестности изучаемого равновесного ее положения при линеаризации поведения системы в этой окрестности.

Определение напряженно деформированного состояния (НДС) системы при предварительном напряжении должно выполняться с учетом геометрически нелинейных эффектов: расчет следует проводить по деформированной схеме, принимая во внимание следящий характер нагрузки от давления воздуха [9]. Далее необходимо построить динамическую модель так называемой линеаризованной системы, в которой все составляющие ее элементы рассматриваются в линейной постановке, но с касательными (мгновенными) матрицами жесткости [13].

Для этого в уравнении (4) вместо обычной матрицы жесткости  $K_0$  вводится касательная (мгновенная) матрица жесткости  $K$ :

$$K = K_0 + K_G, \quad (6)$$

где  $K_G = K_1 + K_2$  – матрица геометрической жесткости:  $K_1$  – матрица начальных напряжений;  $K_2$  – матрица начальных поворотов.

Детальное построение матрицы геометрической жесткости  $K_G$ , а также матриц  $K_1$  и  $K_2$  подробно описано в книге [13, с. 138–140].

## 2. Решение тестовой задачи по определению собственных частот и форм колебаний пневмобалки

### 2.1. Описание расчетных моделей

Объектом исследования выбрана пневмобалка – цилиндрическая оболочка диаметром 0,28 м, длиной 3 м и толщиной 1 мм, исследуемая в работе [9]. Очевидно, что наличие торцов в оболочечной модели приводит к дополнительному продольному растяжению оболочки от действия избыточного давления, однако, в работе [9] не указано, было ли учтено это растяжение в построенной стержневой модели.

В данной работе были выполнены расчеты для оболочечной модели пневмобалки как с торцами, так и без них. Для лучшей сходимости численного алгоритма решения форма торцов была принята в виде полусфер, расстояние между центрами которых составляло длину пневмобалки, т.е. 3 м.

Трехмерная конечно-элементная (КЭ) модель пневмобалки создавалась в ПК *ANSYS Mechanical* с использованием трехузловых оболочечных конечных элементов типа SHELL181, в котором реализована теория оболочек Миндлина – Рейснера. Для решения данной задачи была включена мембранная опция (параметр KEYOPT(1)=1), которая позволяет не учитывать изгибную жесткость и игнорировать угловые степени свободы в узлах элементов [14].

Для исследования сеточной сходимости рассмотрены три варианта расчетной сетки с максимальной длиной ребра КЭ  $d$ , равной 0,06, 0,03 и 0,015 м. Результаты расчета для двух последних случаев практически совпадают и приведены ниже.

Было рассмотрено 2 варианта закреплений пневмобалки:

- 1) защемленный левый край и свободный от закреплений правый край (консольная балка);
- 2) защемленный левый край и шарнирно опертый правый край.

## 2.2. Параметры расчетов

Рассмотрены пневмобалки, выполненные из двух различных ортотропных материалов – типа 1 и типа 2. Физико-механические характеристики приведены в табл. 1 и приняты в соответствии с данными из источника [9].

Таблица 1

Физико-механические характеристики материалов  
[Table 1. Physical and mechanical properties of materials]

Характеристика [Property]	Тип 1 [Type 1]	Тип 2 [Type 2]
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> [Density $\rho$ , kg/m <sup>3</sup> ]	1420	1420
Модуль упругости в продольном (осевом) направлении $E_1$ , МПа [Modulus of elasticity in longitudinal (axial) direction $E_1$ , MPa]	393,13	18370,0
Модуль упругости в кольцевом направлении $E_2$ , МПа [Modulus of elasticity in circular direction $E_2$ , MPa]	451,59	14120,0
Модуль сдвига $G_{12}$ , МПа [Shear modulus $G_{12}$ , MPa]	103,0	6460,0
Коэффициент Пуассона $\nu_{12}$ [Poisson ratio $\nu_{12}$ ]	0,07	0,28
Коэффициент Пуассона $\nu_{21}$ [Poisson ratio $\nu_{21}$ ]	0,08	0,22

Для проведения модального анализа в ПК *ANSYS Mechanical* использовался блочный метод Ланцоша. Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) выполнялось разреженным методом (решатель *Distributed Sparse Matrix Solver*).

## 2.3. Результаты решения тестовой задачи

Результаты решения тестовой задачи представлены в следующем виде: на рис. 2 и 3 показаны формы колебаний для пневмобалок из материала типа 1 при различных граничных условиях, а в таблице 2 приведены собственные частоты для всех рассмотренных случаев в сопоставлении с результатами эталонного исследования [9].

Относительные погрешности  $\varepsilon$  вычислены по формуле:

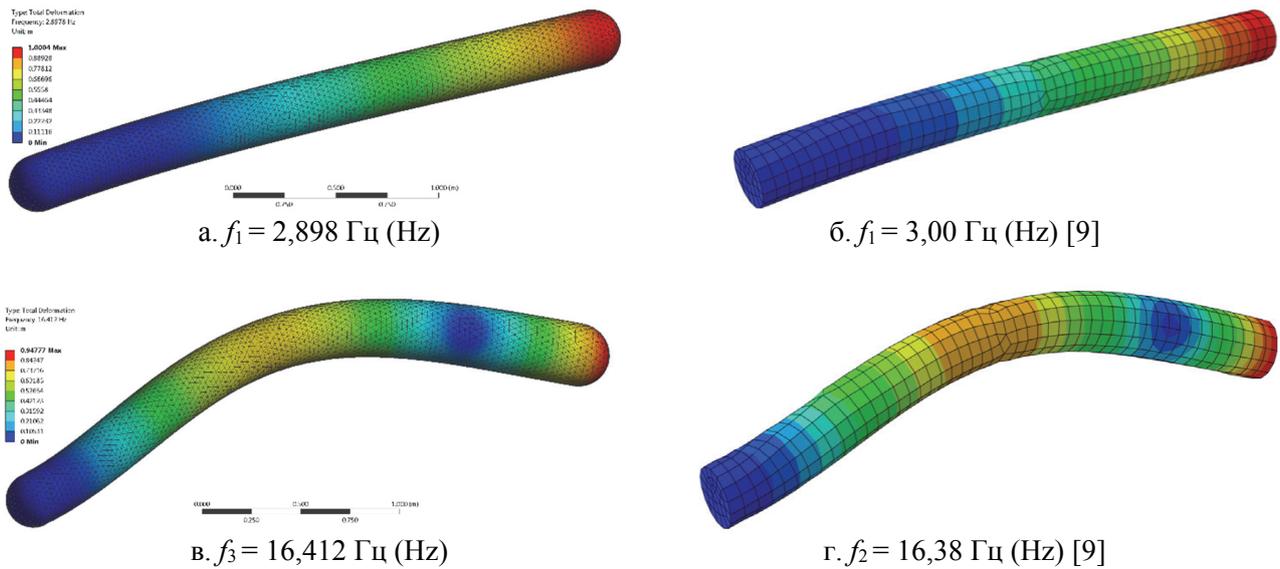
$$\varepsilon = \frac{|f_0 - f|}{f_0} \cdot 100\%, \quad (7)$$

где  $f_0$  – эталонные результаты [9];  $f$  – результаты расчетов, выполненных авторами статьи.

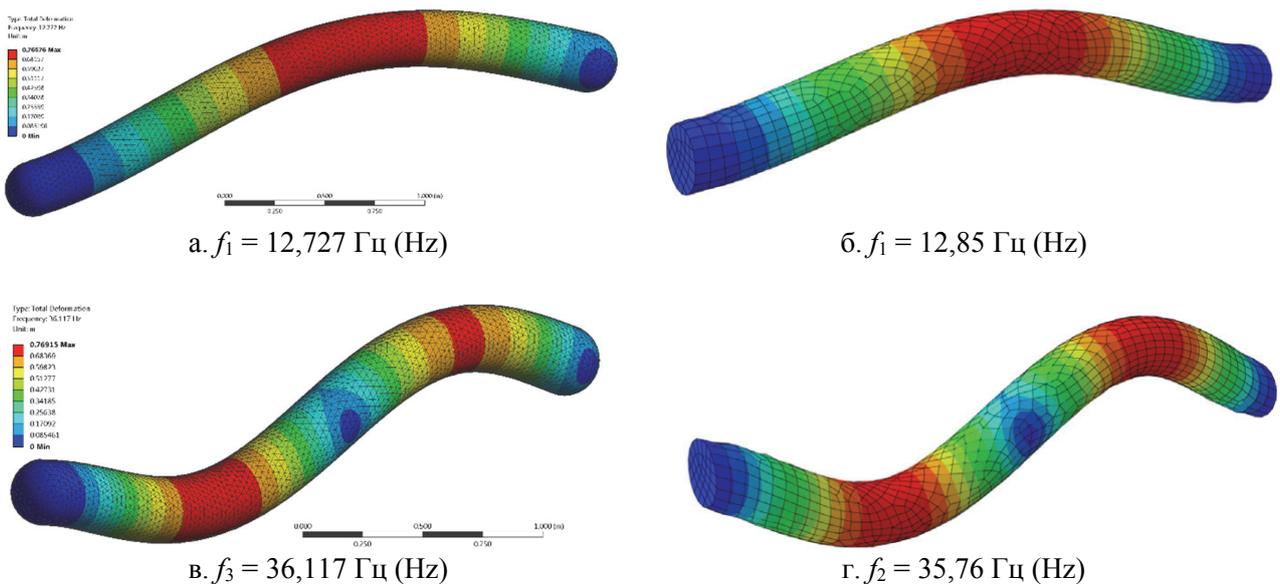
Таблица 2

Результаты решения тестовой задачи  
[Table 2. Results of test case solution]

Номер изгибной формы колебаний [Bending eigenmode number]	Собственная частота $f_i$ , Гц [Natural frequency $f_i$ , Hz]							$\varepsilon_{\min}/\varepsilon_{\max}$ , %
	Результаты авторов статьи [Authors' results]				Источник [Source] [9]		Стержневая модель [beam model]	
	С торцами [With ends]		Без торцов [Without ends]		<i>Abaqus</i>			
	$d = 0,03$ м, 7708 КЭ	$d = 0,015$ м, 30560 КЭ	$d = 0,03$ м, 7046 КЭ	$d = 0,015$ м, 27888 КЭ		$d = 0,03$ м, 2862 КЭ		
Случай 1.1. Консоль, материал типа 1 [Case 1.1. Cantilever, material type 1]								
1	2,90	2,90	3,09	3,09	3,00	3,14	1,5/7,7	
2	16,41	16,42	16,52	16,51	16,38	16,41	0,0/0,8	
Случай 1.2. Консоль, материал типа 2 [Case 1.2. Cantilever, material type 2]								
1	19,82	19,85	21,73	21,77	20,28	22,13	1,6/10,4	
2	114,84	115,05	124,46	124,73	117,69	118,47	2,2/6,0	
Случай 2.1. Жесткое закрепление с одной стороны и шарнирная опора с другой, материал типа 1 [Case 2.1. Clamped-simply supported ends, material type 1]								
1	12,73	12,75	11,28	11,25	12,85	11,89	0,8/12,5	
2	36,12	36,14	34,52	34,45	35,76	31,61	1,0/14,3	
Случай 2.2. Жесткое закрепление с одной стороны и шарнирная опора с другой, материал типа 2 [Case 2.2. Fixed-simply supported ends, material type 2]								
1	89,12	89,32	88,96	89,17	87,70	85,59	1,4/4,4	
2	259,62	259,94	258,83	260,12	255,70	231,89	1,2/12,2	



**Рис. 2. Первая (а, б) и вторая (в, г) изгибные собственные формы и частоты колебаний консольной пневмобалки:**  
 а, в – полученные в данной работе ( $d = 0,03$  м); б, г – данные источника [9]  
 [Figure 2. The first (а, б) and the second (в, г) bending mode shapes and natural frequencies of cantilever airbeam:  
 а, в – calculated by the authors ( $d = 0.03$  m); б, г – from source [9]]



**Рис. 3. Первая (а, б) и вторая (в, г) изгибные собственные формы и частоты колебаний пневмобалки, жестко закрепленной слева и шарнирно опертой справа:**  
 а, в – полученные в данной работе ( $d = 0,03$  м); б, г – данные источника [9]  
 [Figure 3. The first (а, б) and the second (в, г) bending mode shapes and natural frequencies of fixed-simply supported airbeam:  
 а, в – calculated by the authors ( $d = 0.03$  m); б, г – from source [9]]

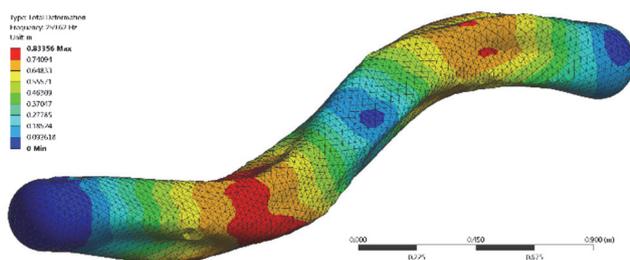
Поскольку в работе [9] имеется по два эталонных результата (для аналитической стержневой и численной оболочечной моделей), а в данной работе выполнены расчеты для пневмобалок с торцами и без, то для относительной погрешности (невязки) результатов в табл. 1 приведены максимальное  $\epsilon_{\max}$  и минимальное  $\epsilon_{\min}$  значения. Для результатов, полученных в данной работе, достигнута сеточная сходимость, поскольку соб-

ственные частоты при сгущении расчетной сетки с 0,03 до 0,015 м изменяются не более чем на 0,05–0,5%. Расхождение между результатами авторов статьи и эталонными результатами для стержневой модели [9] достигает 14,3%. Такая разница в результатах может объясняться различием в моделировании торцевых зон и граничных условий, а также особенностями построения стержневой аналитической модели: в частности, была

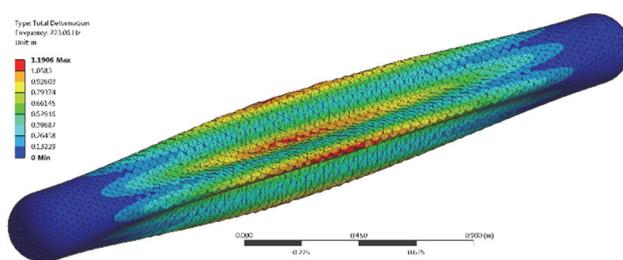
принята гипотеза, что сечения пневмобалки остаются круглыми и после деформации [9], однако, расчеты с использованием оболочечных моделей показывают, что это условие не всегда выполняется (рис. 4, а). Относительная погрешность для оболочечных конечно-элементных моделей не превышает 1%.

Кроме того, из одномерной стержневой модели могут быть получены только изгибные формы колебаний, а в трехмерных конечно-элементных моделях наблюдаются оболочечные формы колебаний, обусловленные волнообразованием как в

продольном, так и в кольцевом направлении. Поэтому второй изгибной форме колебаний, как правило, соответствует гораздо больший номер собственной формы. В частности, на рис. 4, а для случая 2.2 (с торцами) показана 24-я форма колебаний, которая является второй изгибной. Ее частота  $f_{24} = 259,62$  Гц выше, чем, например, для 13-й формы колебаний (оболочечной), показанной на рис. 4, б, т.к.  $f_{13} = 223,06$  Гц. Образование одной полуволны в продольном направлении и восьми полуволн в кольцевом соответствует 13-й форме.



а.  $f_{24} = 259,62$  Гц (Hz)



б.  $f_{13} = 223,06$  Гц (Hz)

Рис. 4. 24-я (а) – вторая изгибная и 13-я (б) собственные формы и частоты колебаний пневмобалки для случая 2.2 с торцами [Figure 4. The 24<sup>th</sup> mode shape (a), corresponded to the second bending shape, and 13<sup>th</sup> mode shape (b) of airbeam with ends (case 2.2)]

С учетом сделанных замечаний можно считать тестовую задачу успешно решенной, что позволяет использовать примененный подход для анализа собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки.

### 3. Исследование собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки

#### 3.1. Описание расчетной модели

Объектом исследования выбрана воздухоопорная оболочка на прямоугольном плане размером  $20 \times 50$  м, ее высота в высшей точке составляет 8,6 м, радиус скругления углов оболочки 2 м. Как правило, рабочее внутреннее давление под оболочкой составляет порядка  $p = 150$  Па [15]. Оно может быть повышено в несколько (обычно от двух до четырех) раз в случае неблагоприятных погодных условий – сильного ветра или снегопада. Собственные частоты и формы колебаний зависят от обобщенной жесткости и распределения массы конструкции, поэтому по их изменению можно оценить, как меняется обобщенная жесткость воздухоопорной оболочки при повышении давления.

Начальная равновесная форма воздухоопорной оболочки не является канонической и была предварительно определена численно с помощью программы *ixForten 4000*.

Физико-механические параметры линейно-упругого ортотропного материала оболочки (условно-технической ткани с покрытием) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Физико-механические характеристики материала [Table 3. Physical and mechanical properties of material]

Характеристика [Property]	Величина [Value]
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> [Density $\rho$ , kg/m <sup>3</sup> ]	1200
Толщина $h$ , м [Thickness $h$ , m]	0,001
Модуль упругости в направлении нитей основы (вдоль короткой стороны) $E_1$ , МПа [Modulus of elasticity in warp direction (along the short side) $E_1$ , MPa]	600
Модуль упругости в направлении нитей утка (вдоль длинной стороны) $E_2$ , МПа [Modulus of elasticity in weft direction (along the long side) $E_2$ , MPa]	300
Модуль сдвига $G_{12}$ , МПа [Shear modulus $G_{12}$ , MPa]	30
Коэффициент Пуассона $\nu_{12}$ [Poisson ratio $\nu_{12}$ ]	0,1
Коэффициент Пуассона $\nu_{21}$ [Poisson ratio $\nu_{21}$ ]	0,2

Расчет собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки произведен по методике, использованной в п. 2 данной работы.

Для определения оптимального размера конечного элемента и получения сеточной сходимости расчетная сетка была рассмотрена в трех ва-

риантах, параметры которых приведены в табл. 4. Расчетные сетки для вариантов 2 и 3 можно увидеть на рис. 5.

Таблица 4

Параметры расчетной сетки для рассмотренных моделей воздухоопорной оболочки [Table 4. Parameters of finite-element mesh used for the present models of air-supported structure]

Модель [Model]	1	2	3
Размер КЭ, $d$ , м [Size of FE, $d$ , m]	1,50	1,00	0,75
Количество КЭ [Number of FE]	1273	2712	4795

### 3.2. Результаты расчета воздухоопорной оболочки

На рис. 5 для двух вариантов расчетной сетки показаны цветовые карты максимальных главных растягивающих напряжений, рассчитанных при действии внутреннего избыточного давления под оболочкой  $p = 150$  Па. На большей части оболочки напряжения меняются в незначительном диапазоне от 1,25 до 1,47 МПа, это говорит о том, что такую оболочку можно приближенно считать «рав-

нонапряженной» и, следовательно, рациональной. Величины напряжений и картина их распределения практически совпадают.

На рис. 6 показаны величины первых пяти собственных частот для моделей 1, 2 и 3. Влияние размера конечного элемента сильнее сказывается на более высоких частотах, поскольку размер полуволн становится меньше и более грубая сетка хуже аппроксимирует деформированную поверхность оболочки.

На рис. 7,  $a-d$  показаны первые пять собственных форм колебаний воздухоопорной оболочки для модели 3 (сетка конечных элементов не показана). Формы собственных колебаний охарактеризованы парой параметров  $(m, n)$ , где  $m$  – число полуволн вдоль длинной, а  $n$  – число полуволн вдоль короткой стороны оболочки. На рис. 7,  $e$  для сравнения показана первая собственная форма, полученная при игнорировании дополнительной жесткости, создаваемой внутренним избыточным давлением: поскольку мембрана не обладает жесткостью на изгиб, то первой собственной форме соответствует локальное выпучивание оболочки вблизи одного из узлов расчетной сетки.

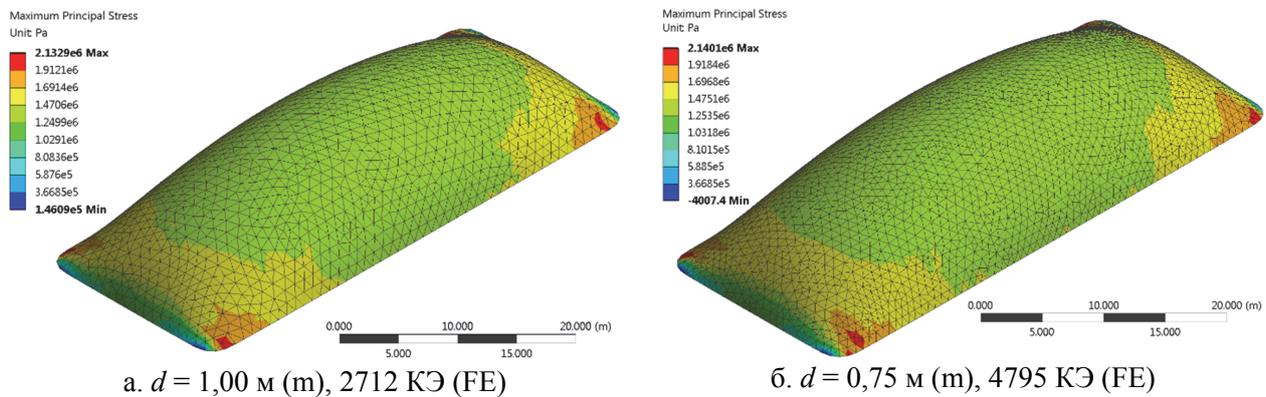


Рис. 5. Максимальные главные напряжения при действии внутреннего избыточного давления  $p = 150$  Па [Figure 5. Maximum principal stress due to the action of internal pressure  $p = 150$  Pa]

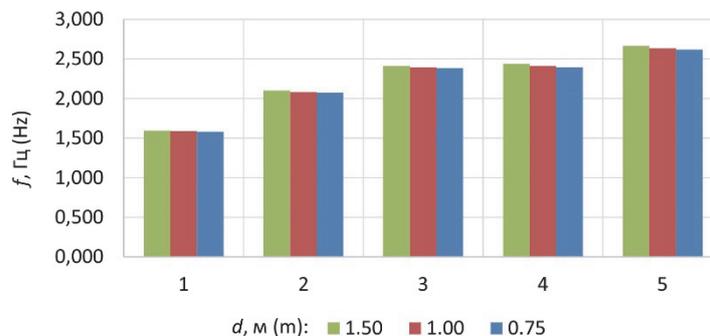
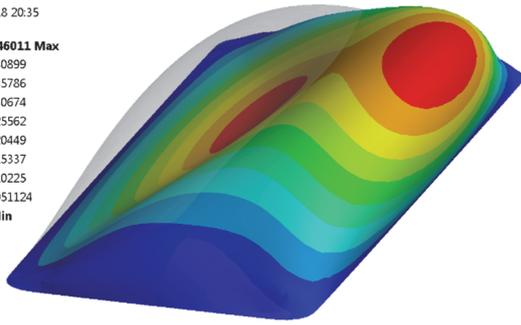


Рис. 6. Сеточная сходимость решений для моделей 1, 2 и 3 (зеленый, красный и синий столбцы соответственно) [Figure 6. Mesh convergence for the models 1, 2 and 3 (green, red and blue respectively)]

C: Modal  
Total Deformation - Mode 1 - 1.5813 Hz  
Type: Total Deformation  
Frequency: 1.5813 Hz  
Unit: m  
12.04.2018 20:35

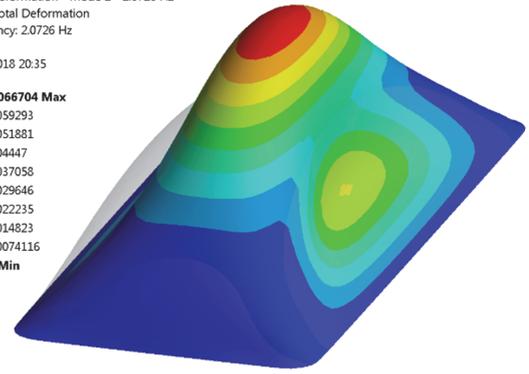
0.046011 Max  
0.040899  
0.035786  
0.030674  
0.025562  
0.020449  
0.015337  
0.010225  
0.0051124  
0 Min



а. (1, 2),  $f_1 = 1,581 \text{ Гц (Hz)}$

C: Modal  
Total Deformation - Mode 2 - 2.0726 Hz  
Type: Total Deformation  
Frequency: 2.0726 Hz  
Unit: m  
12.04.2018 20:35

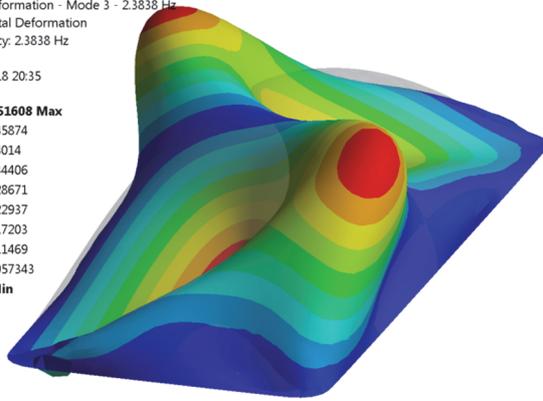
0.066704 Max  
0.059293  
0.051881  
0.04447  
0.037058  
0.029646  
0.022235  
0.014823  
0.0074116  
0 Min



б. (1, 3),  $f_2 = 2,073 \text{ Гц (Hz)}$

C: Modal  
Total Deformation - Mode 3 - 2.3838 Hz  
Type: Total Deformation  
Frequency: 2.3838 Hz  
Unit: m  
12.04.2018 20:35

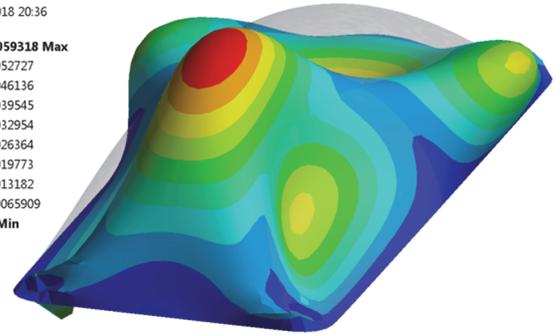
0.051608 Max  
0.045874  
0.04014  
0.034406  
0.028671  
0.022937  
0.017203  
0.011469  
0.0057343  
0 Min



в. (2, 2),  $f_3 = 2,384 \text{ Гц (Hz)}$

C: Modal  
Total Deformation - Mode 4 - 2.394 Hz  
Type: Total Deformation  
Frequency: 2.394 Hz  
Unit: m  
12.04.2018 20:36

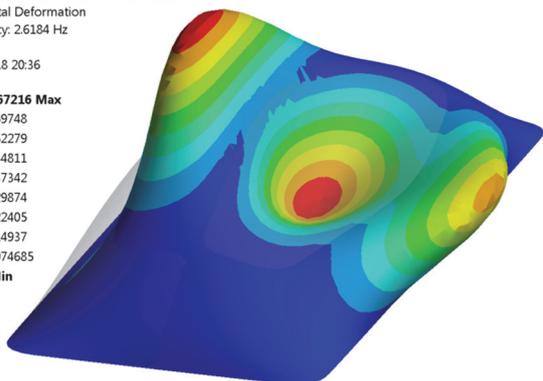
0.059318 Max  
0.052727  
0.046136  
0.039545  
0.032954  
0.026364  
0.019773  
0.013182  
0.0065909  
0 Min



г. (2, 3),  $f_4 = 2,394 \text{ Гц (Hz)}$

C: Modal  
Total Deformation - Mode 5 - 2.6184 Hz  
Type: Total Deformation  
Frequency: 2.6184 Hz  
Unit: m  
12.04.2018 20:36

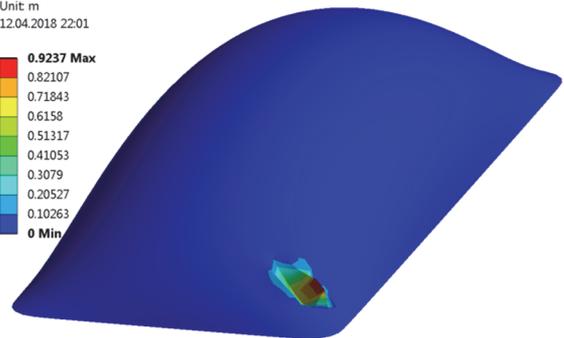
0.067216 Max  
0.059748  
0.052279  
0.044811  
0.037342  
0.029874  
0.022405  
0.014937  
0.0074685  
0 Min



д. (1, 4),  $f_5 = 2,618 \text{ Гц (Hz)}$

C: Modal  
Total Deformation - Mode 1 - 1.5813 Hz  
Type: Total Deformation  
Frequency: 0.35072 Hz  
Unit: m  
12.04.2018 22:01

0.9237 Max  
0.82107  
0.71843  
0.6158  
0.51317  
0.41053  
0.3079  
0.20527  
0.10263  
0 Min



е.  $p = 0 \text{ Pa}$ ,  $f_1 = 0,351 \text{ Гц (Hz)}$

Рис. 7. Собственные частоты и формы колебаний при действии внутреннего давления  $p = 150 \text{ Па}$  для модели 3 (а–д); е – первая собственная частота и форма колебаний при отсутствии внутреннего избыточного давления [Figure 7. Natural frequencies and mode shapes for model 3 when internal pressure  $p = 150 \text{ Pa}$  is applied (a–d); e – the first natural frequency and mode shape when internal pressure  $p$  is neglected]

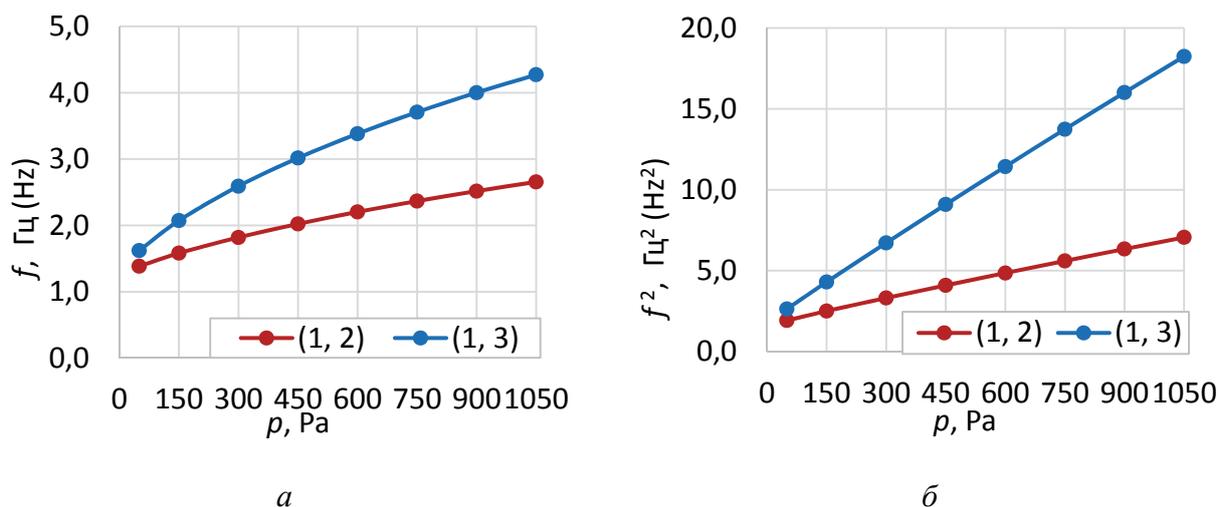


Рис. 8. Зависимость собственных частот (а) и квадратов собственных частот (б) для форм (1, 2) и (1, 3) от величины избыточного давления  $p$  (модель 3,  $d = 0,75$  м)  
 [Figure 8. Dependence of natural frequencies  $f$  (a) and squares of natural frequencies  $f^2$  (б) on internal pressure  $p$  for the mode shapes (1, 2) and (1, 3). Model 3,  $d = 0.75$  m]

На рис. 8 показаны графики зависимости собственных частот (а) и квадратов собственных частот (б) для форм (1, 2) и (1, 3) от величины избыточного давления  $p$  в диапазоне от 50 до 1050 Па. Следует отметить, что с ростом давления собственные формы трансформируются, меняется их порядок следования друг за другом в связи с изменением предварительного напряженно-деформированного состояния оболочки. Формы колебаний (1, 2) и (1, 3) были выбраны потому, что их конфигурация оставалась неизменной в рассмотренном диапазоне избыточного давления.

В книге [4, с. 437–438] при модальном анализе прямоугольных предварительно растянутых мембран показано, что квадраты собственных частот прямо пропорциональны растягивающему усилию. В воздухоопорных сооружениях растягивающие усилия практически прямо пропорциональны величине избыточного давления (при отсутствии других нагрузок), поэтому в указанном интервале давлений наблюдается почти линейная связь между величиной избыточного давления и квадратами собственных частот, показанная на рис. 8, б.

#### 4. Анализ результатов и выводы

На основе проведенного обзора научной литературы была найдена и успешно решена тестовая задача по расчету собственных частот и форм колебаний предварительно напряженной цилиндрической оболочки из ортотропного материала. Получено хорошее соответствие между результатами из источника и результатами авторов статьи.

Расхождения по частотам колебаний для оболочечных моделей не превышают 1,8%, расхождение с аналитическим решением для стержневой модели не превышает 15%, что объясняется упрощениями, используемыми при построении аналитической стержневой модели, а также несколько различными подходами к учету влияния торцов оболочки.

Методика решения тестовой задачи была применена для численного исследования собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки на прямоугольном плане размером 20×50 м.

В работе выявлена практически линейная зависимость между величиной внутреннего давления и квадратами собственных частот, что соответствует результатам других исследователей.

© Мокин Н.А., Кустов А.А., Ганджунцев М.И., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

#### Список литературы

1. Кривошапко С.Н. Пневматические конструкции и сооружения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 45–53.
2. Пневматические строительные конструкции / В.В. Ермолов, У.У. Бэрд, Э. Бубнер и [др.]; под ред. В.В. Ермолова. М.: Стройиздат, 1983. 439 с.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
5. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

6. Бозняков Е.И., Афанасьева И.Н., Белостоцкий А.М. Численное моделирование аэроупругих колебаний тонкостенных оболочек в трехмерном воздушном потоке. Ч. 1: Верификация механической конечно-элементной модели // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций). 2016. Т. 12. № 2. С. 75–85.

7. Кравчук А.С., Шейнин С.А., Кравчук А.И., Тарасюк И.А. Новое уравнение малых поперечных колебаний прямоугольной композиционной мембраны при растяжении вдоль ее сторон // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. № 2. С. 1–21. URL: <http://www.apriori-journal.ru/seria2/2-2015/Kravchuk-Shejnin-Kravchuk-Tarasyuk.pdf> (дата обращения: 14.04.2018).

8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.

9. Aredo K.L., Ronel S., Jacquelin E., Tiem S. Free vibration analysis of inflatable beam made of orthotropic woven fabric // Thin-Walled Structures. 2014. (78). P. 1–15.

10. Thomas J.-C., Jiang Z., Wielgosz C. Continuous and Finite Element Methods for the Vibrations of Inflatable Beams // International Journal of Space Structures. 2006. № 4 (21). P. 197 – 222.

11. Бруяка В.А., Фокин В.Г., Солдусова Е.А., Глазунова Н.А., Адеянов И.Е. Инженерный анализ в ANSYS Workbench. Самара: Самар, гос. техн. ун-т, 2010. 271 с.

12. Леонтьев Н.В. Применение системы ANSYS к решению задач модального и гармонического анализа. Нижний Новгород, 2006. 101 с.

13. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений. М.: СКАД СОФТ, 2011. 736 с.

14. ANSYS Mechanical User's Guide. Release 15.0. Canonsburg, 2013. 1832 p.

15. Ермолов В.В. Воздухоопорные здания и сооружения. М.: Стройиздат, 1980. 304 с.

#### Об авторах

**Мокин Николай Андреевич** – аспирант кафедры строительной и теоретической механики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* расчеты воздухоопорных сооружений. eLibrary SPIN-код: 5158-6640. *Контактная информация:* e-mail – mokiavelli@mail.ru.

**Кустов Алексей Андреевич** – аспирант кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* исследования сооружений (в том числе воздухоопорных), изготовленных из технических тканей с покрытием. eLibrary SPIN-код: 2698-4408. *Контактная информация:* e-mail – alexeykustov@outlook.com.

**Ганджунцев Михаил Иоакимович** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* динамика сооружений, нелинейная строительная механика. eLibrary SPIN-код: 4792-5460. *Контактная информация:* e-mail – oppmgsu2014@yandex.ru.

#### Для цитирования

Мокин Н.А., Кустов А.А., Ганджунцев М.И. Численное исследование собственных частот и форм колебаний воздухоопорных сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 337–347. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-337-347.

SCIENTIFIC ARTICLE

## Numerical investigation of natural frequencies and mode shapes of air-supported structures

Nikolay A. Mokin\*, Alexey A. Kustov, Mikhail I. Gandzhuntsev

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)  
26 Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

\*Corresponding author

(received: May 18, 2018; accepted: August 02, 2018)

**Abstract.** Natural frequencies and mode shapes are important properties of engineering structures and buildings. Modal analysis of the prestressed membrane structures made of orthotropic material is described in this paper. The equation of motion of the system with finite number of degrees of freedom was given in the matrix form. Features of the modal analysis of prestressed system are described. To validate our technique, we have found in the literature and repeated the modal analysis of cylindrical membrane structure (inflated beam). In the source paper the analytical solutions for the natural frequencies were obtained for the one-dimensional (beam) model with taking into account orthotropic mechanical properties and prestress. In this paper the test case was solved for the spatial shell model using finite element analysis, realized in program software “ANSYS Mechanical”. Comparison between authors’ results and results described in reference is carried out.

The possible reasons of results divergence are explained. The validated technique has been applied to modal analysis of an air-supported structure based on the rectangular plan of 20×50 m. Models with different mesh sizes were used to achieve the mesh convergence of results. Almost linear dependence between internal pressure and squares of natural frequencies has been received. This result is in the accordance with known solutions, described in the literature for isotropic membranes.

**Keywords:** air-supported structure, air-beam, modal analysis, natural frequencies and mode shapes, finite elements method

## References

1. Krivoshapko S.N. (2015). Pnevmaticheskie konstrukcii i sooruzheniya [Pneumatic structures and buildings]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings], (3), 45–53. (In Russ.)
2. Ermolov V.V., Berd U.U., Bubner E., Vitting L., Voznesenskii S.B., ... Harnach R. (1983). *Pnevmaticheskie Stroitel'nye Konstruktsii* [Pneumatic Engineering Structures]. Moscow, Stroizdat Publ., 439. (In Russ.)
3. Gol'denveizer A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E. (1979). *Svobodnye Kolebaniya Tonkikh Uprugikh Obolochek* [Free Vibrations of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka Publ., 384. (In Russ.)
4. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. (1985). *Kolebaniya v inzhernom dele* [Vibration problems in engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 472. (In Russ.)
5. Vol'mir A.S. (1972). *Nelineinaya dinamika platinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 432. (In Russ.)
6. Boznyakov E.I., Afanasyeva I.N., Belostotsky A.M. (2016). Chislennoe modelirovanie aehro-uprugih kolebanij tonkostennykh obolochek v trekhmernom vozdušnom potoke [Numerical Simulation of Fluid-Structure Interaction Between Elastic Thin-Wall Structure and 3-D Transient Flow]. Part 1: Verification of the mechanical finite element model. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (IJCCSE)*, 12(2), 75–85. (In Russ.)
7. Kravchuk A.S., Scheinin S.A., Kravchuk A.I., Tarasyuk I.A. (2015). Novoe uravnenie malyh poperechnykh kolebanij pryamougol'noj kompozicionnoj membrany pri rastyazhenii vdol' ee storon [New Equation of Small Transverse Oscillations of a Rectangular Composite Membrane Stretched Along Its Sides]. *APRIORI. Seriya: Estestvennyye i tekhnicheskie nauki*, (2), 1–21. Available from <http://www.apriori-journal.ru/seria2/2-2015/Kravchuk-Shejnin-Kravchuk-Tarasyuk.pdf> [Accessed: 14.04.2018]. (In Russ.)
8. Ambartsumyan S.A. (1974). *Obshchaya Teoriya Anizotropnykh Obolochek* [General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka Publ., 448. (In Russ.)
9. Apeado K.L., Ronel S., Jacquelin E., Tiem S. (2014). Free vibration analysis of inflatable beam made of orthotropic woven fabric. *Thin-Walled Structures*, 78, 1–15.
10. Thomas J.C., Jiang Z., & Wielgosz C. (2006). Continuous and finite element methods for the vibrations of inflatable beams. *International journal of space structures*, 21(4), 197–222.
11. Bruyaka V.A., Fokin V.G., Soldusova E.A., Glazunova N.A., Adeyanov I.E. (2010). *Inzhenernyi analiz v ANSYS Workbench* [Engineering Analysis with Ansys Workbench]. Samara, SSTU Publ., 271. (In Russ.)
12. Leont'ev N.V. (2006). *Primenenie sistemy ANSYS k resheniyu zadach modal'nogo i garmonicheskogo analiza* [Use of ANSYS System to The Modal and Harmonic Analysis]. Nizhny Novgorod, 101. (In Russ.)
13. Perel'muter A.V., Slivker V.I. (2011). *Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost' ikh analiza* [Calculation models of building and possibility of their analysis]. Moscow, SCAD Soft Publ., 736. (In Russ.)
14. *ANSYS Mechanical User's Guide. Release 15.0*. (2013). Canonsburg, USA, 1832.
15. Ermolov V.V. (1980). *Vozdukhooportnye zdaniya i sooruzheniya* [Air-Supported Buildings and Structures]. Moscow, Stroizdat Publ., 304. (In Russ.)

## About the authors

**Nikolay A. Mokin** – Postgraduate Student, Department of Structural and Theoretical Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU). *Research interests:* structural analysis of air-supported structures. *Contact:* mokiavelli@mail.ru. eLibrary SPIN-code: 5158-6640.

**Alexey A. Kustov** – Postgraduate Student, Department of Metal and Wooden Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU). *Research interests:* membrane structures made of technical coated fabric (including air-supported structures). *Contact:* alexeykustov@outlook.com. eLibrary SPIN-code: 2698-4408.

**Mikhail I. Gandzhuntsev** – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Structural and Theoretical Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU). *Scientific interests:* dynamics of structures, non-linear structural mechanics. *Contact:* oppmgsu2014@yandex.ru, eLibrary SPIN-code: 4792-5460.

## For citation

Mokin N.A., Kustov A.A., Gandzhuntsev M.I. (2018). Numerical investigation of natural frequencies and mode shapes of air-supported structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(4), 337–347. DOI: 110.22363/1815-5235-2018-14-4-337-347. (In Russ.)