

## Проблемы теории упругости

УДК 539.375

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-313-322

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Частичное закрытие прямолинейной трещины, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине

М.В. Мир-Салим-заде

Институт математики и механики НАН Азербайджана

ул. Б. Вахабзаде, 9, Баку, Азербайджан, AZ1141

(поступила в редакцию: 15 апреля 2018 г.; принята к публикации: 20 июня 2018 г.)

Имеющиеся в пластинах технологические отверстия создают повышенную концентрацию напряжений в пластине. В статье исследуется подкрепленная стрингерами тонкая пластина, имеющая круговое отверстие, из которого исходит прямолинейная трещина. Используется модель трещины со связями между берегами в концевых зонах. Пластина и подкрепляющие ребра жесткости выполнены из разных упругих и изотропных материалов. Принято, что стрингеры не подвергаются изгибу и при деформации их толщина не меняется. Пластина полагается неограниченной и подвергается растяжению на бесконечности. Рассмотрен случай частичного закрытия трещины. Действие стрингеров заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер с пластиной. Для решения рассматриваемой задачи объединяются метод решения упругой задачи и метод построения в явной форме потенциалов Колосова – Мухелишвили, соответствующих неизвестным нормальным смещениям вдоль прямолинейной трещины. Для определения параметров, характеризующих закрытие трещины, получено сингулярное интегральное уравнение, которое с помощью процедуры алгебраизации сведено к конечной нелинейной алгебраической системе. Для определения неизвестных эквивалентных сосредоточенных сил используется закон Гука. Решение алгебраической системы было получено с использованием метода последовательных приближений. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем были найдены силы сцепления в связях, контактные напряжения и размер контактной зоны трещины. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т.е. определять характеристики и напряженное состояние подкрепленной стрингерами тонкой пластины с круговым отверстием, при которых достигается заданная область контакта берегов прямолинейной трещины, исходящей из отверстия.

**Ключевые слова:** стрингерная пластина, круговое отверстие, силы сцепления в связях, контакт берегов трещины, контактные напряжения

#### Введение

Тонкие пластины с отверстиями являются широко распространенным элементом конструкций. Отверстие создает повышенную концентрацию напряжений в пластине. В связи с этим зарождение или развитие трещин следует ожидать с поверхности отверстия. Поэтому задачам о зарождении или развитии трещин, исходящих из контура отверстия, посвящено много работ [1–18]. Усиление пластины ребрами жесткости способствует контакту берегов трещины [19–21]. Цель работы состоит в исследовании контакта взаимодействующих берегов трещины, которая исходит

из контура кругового отверстия стрингерной пластины.

#### Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную тонкую пластину с круговым отверстием радиуса  $R$ . Пластина является упругой и изотропной и подкреплена поперечными упругими стрингерами. Стрингеры приклепаны в точках  $z = \pm(2m+1)L \pm iny_0$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (рис. 1) с постоянным шагом по всей их длине. Из контура отверстия исходит прямолинейная трещина вдоль оси абсцисс. Полагаем, что в зоне трещины, примыкаю-

шей к вершине, между берегами происходит взаимодействие. Это взаимодействие моделируем связями между берегами трещины (силами сцепления). Физическая природа связей между берегами

(сил сцепления) зависит от материала пластины, размеров трещины и зоны взаимодействия (концевой зоны). В исследуемом случае берега трещины частично сомкнулись (рис. 1).

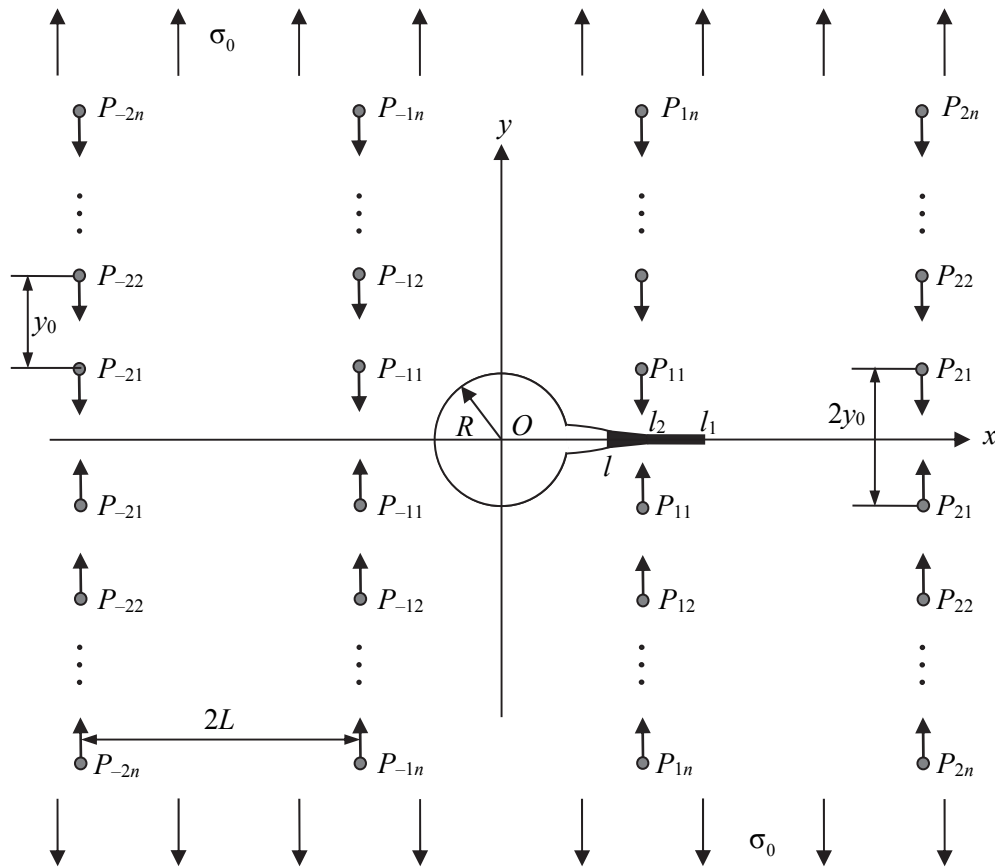


Рис. 1. Расчетная схема задачи  
[Fig. 1. Design scheme of the problem]

На бесконечности пластина подвергается однородному растяжению вдоль ребер жесткости. Полагается, что стрингеры не подвергаются изгибу и при деформации их толщина не меняется. Действие стрингеров заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами  $P_{mn}$ , приложенными в точках соединения ребер с пластиной.

Приняты следующие допущения: а) в пластине имеет место плоское напряженное состояние; б) пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; в) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, ослабления стрингеров из-за постановки точек крепления не происходит, напряженное состояние в них – одноосное; г) точки крепления одинаковы, а их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами. Действие точки крепления моделируется: в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точ-

ке, соответствующей центру точки крепления, в пластине – действием сосредоточенной силы.

Контур кругового отверстия и берега трещины вне концевой зоны свободны от внешних усилий. В зоне контакта  $[l_2, l_1]$  будут возникать нормальные напряжения  $\sigma_y = q(x)$ . Величина контактных напряжений  $q(x)$ , сил сцепления  $p(x)$  и размер контактной зоны заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид:

– на контуре отверстия

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } |z| = R; \quad (1)$$

– на берегах трещины

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, R \leq |x| < l,$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p(x) \quad \text{при } y = 0, l \leq x < l_2, \quad (2)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q(x) \text{ при } y = 0, l_2 \leq x \leq l_1.$$

Для перемещений раскрытия трещины имеем условия:

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(x, p(x))p(x) \quad l \leq x < l_2, \quad (3)$$

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = 0 \quad l_2 \leq x \leq l_1,$$

где  $C(x, p(x))$  – эффективная податливость связей, зависящая от их натяжения.

На основании формул Колосова – Мусхелишвили [22] и граничных условий на контуре отверстия и берегах трещины (1)–(2) задача сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} 'P_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} 'P_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} 'P_{mn} \left[ \frac{mL - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $h$  – толщина пластины;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала пластины, штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $m = n = 0$ .

Функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_R^l \frac{g(t)}{t - z} dt, \\ \Psi_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left[ \frac{1}{t - z} - \frac{t}{(t - z)^2} \right] g(t) dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $g(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]$ ;  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины.

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left[ \frac{1 - t^2}{t(1 - tz)} + \frac{z - t}{(1 - tz)^2} \right] g(t) dt - \frac{i}{2\pi h(1 + \kappa)} \times \\ &\times \sum_{m,n} 'P_{mn} \left\{ \frac{(mL - iny_0)(mL + iny_0) - 1}{(mL - iny_0)[z(mL - iny_0) - 1]^2} - \frac{(mL + iny_0)(mL - iny_0) - 1}{(mL + iny_0)[z(mL + iny_0) - 1]^2} \right\} + \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = \begin{cases} 0 & R \leq |x| < l \\ p(x) & l \leq x < l_2, \\ q(x) & l_2 \leq x \leq l_1 \end{cases} \quad (5)$$

где  $\tau = Re^{i\theta}$ ,  $t$  – аффикс точек берегов трещины.

### Метод решения задачи

Решение краевой задачи (4)–(5) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (6)$$

где потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  определяют поле напряжений и деформаций в сплошной стрингерной пластине

Неизвестная функция  $g(x)$  и потенциалы  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  должны быть определены из краевых условий (4)–(5). Для их определения представим граничное условие (4) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)]e^{2i\theta} = \\ = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + e^{2i\theta} [\overline{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi_*(\tau) = \Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau), \quad \Psi_*(\tau) = \Psi_0(\tau) + \Psi_1(\tau).$$

Для определения потенциалов  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  воспользуемся решением Н.И. Мусхелишвили [22]. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z[z(mL - iny_0) - 1]} - \frac{1}{z[z(mL + iny_0) - 1]} \right\}, \\
 \Psi_2(z) = & \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2'(z)}{z^2} + \frac{1}{2\pi z} \int_R^l \left[ \frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2 z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g(t) dt + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)z} \times \\
 & \times \sum_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z(mL - iny_0) - 1} - \frac{1}{z(mL + iny_0) - 1} + \frac{1}{z(mL - iny_0)} - \frac{1}{z(mL + iny_0)} \right\}.
 \end{aligned}$$

В формулах (10) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия  $R$ . Требуя, чтобы функции (6) удовлетворяли краевому

условию (5) на берегах трещины, получим сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_R^l \frac{g(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_R^l K(t,x) g(t) dt = f_0(x) + f_1(x) + p_*(x), \quad (11)$$

$$K(t,x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2 t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right],$$

$$p_*(x) = \begin{cases} 0 & R \leq |x| \leq l \\ p(x) & l \leq x < l_2, \\ q(x) & l_2 \leq x \leq l_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 f_0(x) = & -\sigma_0 + \frac{\kappa+2}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \left[ \frac{1}{(x-mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \left[ \frac{1}{(x+mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} - \\
 & - \frac{1}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x-mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x+mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_1(x) = & -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-m,n} n \left\{ \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right. \\
 & \times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \\
 & + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\
 & \left. - 4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[ \frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \\
 & - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\kappa_0}{(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \left. \right\rangle + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \times \right. \\
 & \times \frac{x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right\rangle - \\
 & - 2 \left[ \frac{1}{(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left\{ -\frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{x^4} \right\}.
 \end{aligned}$$

В полученное сингулярное интегральное уравнение (11) входят неизвестные величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots; n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), сил сцепления  $p(x)$  и контактных напряжений  $q(x)$ .

Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $P_{mn}$ , действующей на каждую точку соединения со стороны  $m$ -го стрингера, равна

$$P_{mn} = \frac{E_S F}{2ny_0} \Delta v_{mn} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (12)$$

где  $E_S$  – модуль Юнга материала стрингера;  $F$  – площадь поперечного сечения стрингера;  $2ny_0$  –

расстояние между рассматриваемыми точками крепления;  $\Delta v_{mn}$  – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Полагаем, что взаимное упругое смещение точек  $z = mL + i(ny_0 - a)$  и  $z = mL - i(ny_0 - a)$  равно взаимному смещению точек крепления  $\Delta v_{mn}$ , где  $a$  – радиус точки крепления (площадки сцепления). С помощью комплексных потенциалов (6) и формул Колосова – Мухелишвили [22] находим взаимное смещение  $\Delta v_{mn}$  указанных точек [8]:

$$\begin{aligned}
 \Delta v_{kr} &= \Delta v_{kr}^{(0)} + \Delta v_{kr}^{(1)} + \Delta v_{kr}^{(2)}, \\
 \Delta v_{kr}^{(0)} &= \frac{\sigma_0}{4\mu} (1 + \kappa) d_1 + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum_{m,n} P_{mn} \left\{ \kappa \ln \frac{d_3 + a^2}{d_3 + b^2} + \frac{2d_0 d_1 [2k(k-m)L^2 + ab]}{(d_3 + b^2)(d_3 + a^2)} \right\}; \\
 \Delta v_{kr}^{(1)} &= \frac{1 + \kappa}{2\pi\mu} \int_{L_1} \omega(t) g(t) dt - \frac{d_1}{\pi\mu} \int_{L_1} \frac{d_2 g(t)}{A} dt; \\
 A &= d_2^2 + d_1^2; \quad \omega(t) = \arctg \frac{d_1}{d_2}; \\
 \Delta v_{kr}^{(2)} &= \frac{\sigma_0}{2\mu} \left\{ \frac{(1 + \kappa)d_1}{B_2} + \frac{2d_1 kL}{B_2^2} \left( \frac{kL}{B_2} - kL \right) + \frac{k^2 L^2 - d_1^2}{B_2^2} \left( \frac{d_1}{B_2} - d_1 \right) \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi\mu} \int_{L_1} \left\{ \kappa \left( \varphi_1 - \frac{td_1}{A_1^*} + \frac{d_1}{tA_1^*} \right) + \left( \frac{kL}{B_2} - kL \right) \left[ \frac{(1-t^2)d_1}{A_1^*} - \frac{2td_4 d_1 d_2 + d_1(d_4 - t^2 d_1)}{A_1^{*2}} \right] \right. \\
 &+ d_1 \left( \frac{1}{B_2} - 1 \right) \left[ \frac{(1-t^2)d_4}{tA_1^*} - \frac{(d_4 - t^2 d_1^2)(d_2 + 2td_4 d_1^2)}{A_1^{*2}} \right] - \left[ \frac{2}{t} \omega - \frac{2-t^2+t^3-t}{t} \arctg \frac{d_1}{kL} + \frac{2td_1}{B_2} \right. \\
 &\left. \left. + (4t^2 - 1)\varphi_1 + \frac{2t^3 d_1 (d_4^2 - t^2 d_1^2) - 2(t^2 + 1 - 2t^3) d_4 t d_1}{A_1^{*2}} \right] \right\} g(t) dt + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum_{m,n} P_{mn} \Pi;
 \end{aligned}$$

где  $b = (r - n)y_0 - a; \quad d_0 = b + a; \quad d_1 = ry_0 - a; \quad d_2 = t - kL; \quad d_3 = (k - m)^2 L^2; \quad d_4 = 1 - tkL;$

$$\begin{aligned} \Pi = \kappa & \left\{ \frac{C_4(DkL - D_1d_1) - C_2^*(D_1kL - d_1D)}{(D_1^2 + D^2)B_2} - \frac{C_4(D_3kL - D_2d_1) - C_2^*(D_2kL - d_1D_3)}{(D_3^2 + D_2^2)B_2} \right\} - \\ - \kappa(d_5 - 1) & \left\{ \frac{D_3d_6 - 2ny_0mLD_2}{(D_3^2 + D_2^2)D_4} - \frac{Dd_6 - 2ny_0mLD_1}{(D^2 + D_1^2)D_4} \right\} + \frac{1 + \kappa}{2} \ln \frac{D^2 + D_1^2}{D_3^2 + D_2^2} + \frac{2ny_0(ny_0 - a)}{d_5B_2} - \\ - (d_5 - 1) & \left\{ \frac{C_4[mL(D^2 - D_1^2) + 2ny_0DD_1] - C_2^*[2mLD_1D - ny_0(D^2 - D_1^2)]}{(D^2 + D_1^2)^2d_5} - \right. \\ & \left. - \frac{C_4[mL(D_3^2 - D_2^2) - 2ny_0D_2D_3] - C_2^*[ny_0(D_3^2 - D_2^2) + 2mLD_2D_3]}{(D_3^2 + D_2^2)d_5} \right\}; \\ d_5 = m^2L^2 + n^2y_0^2; & \quad d_6 = m^2L^2 - n^2y_0^2; \quad B_2 = k^2L^2 + d_1^2; \\ C_4 = kL + \frac{kL}{B_2}; & \quad C_2^* = d_1 \left( 1 + \frac{d_1}{B_2} \right); \quad D = kmL^2 + ny_0d_1 - 1; \\ D_1 = d_1mL - ny_0kL; & \quad D_2 = d_1mL + ny_0kL; \quad D_3 = kmL^2 - ny_0d_1 - 1; \\ \varphi_1 = -\arctg \frac{td_1}{d_4}; & \quad D_4 = d_6^2 + 4y_0^2L^2m^2; \quad A_1^* = d_4^2 + d_1^2t^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения величин сосредоточенных сил  $P_{mn}$  имеем бесконечную линейную систему уравнений (12).

Так как напряжения в пластине ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (11) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Для построения решения сингулярного интегрального уравнения используем метод прямого решения сингулярных уравнений [23; 24]. Переходя к безразмерным переменным, решение представим в виде

$$g(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} g_0(\eta),$$

где  $g_0(\eta)$  – ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [23; 24] позволяет интегральное уравнение (11) свести к системе  $M + 1$  алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными  $g_0(\tau_1), \dots, g_0(\tau_m)$ :

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[ \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + K(\tau_m, \eta_r) \right] = \pi F_*(\eta_r), \quad (13)$$

$$F_*(\eta_r) = \begin{cases} f(\eta_r) & R \leq |x| < l \\ f(\eta_r) + p(\eta_r) & l \leq x < l_2, \\ f(\eta_r) + q(\eta_r) & l_2 \leq x \leq l_1 \end{cases}$$

$$\text{где } \tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}; \quad m = 1, 2, \dots, M;$$

$$\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}; \quad r = 1, 2, \dots, M+1.$$

Так как решение сингулярного интегрального уравнения (11) ищется в классе всюду ограниченных функций, то оно существует при выполнении дополнительного условия (условия разрешимости краевой задачи) [22]. Выполнение дополнительного условия обеспечивает полученная алгебраическая система из  $M + 1$  уравнений (13), служащая для определения неизвестных  $g_0(\tau_1), g_0(\tau_2), \dots, g_0(\tau_m)$  и  $l_2$ .

В правую часть системы (13) входят неизвестные значения сил сцепления  $p(\eta_r)$  и контактных напряжений  $q(\eta_r)$  в узловых точках, принадлежащих соответственно зонам  $[l, l_2]$  и  $[l_2, l_1]$ . Неизвестные силы сцепления и контактное напряжение, возникающее на берегах трещины, определяются из условия (3). Запишем его для производной раскрытия смещений берегов трещины:

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} g(x) = \frac{d}{dx} [C(x, p(x))p(x)] \quad l \leq x < l_2, \quad (14)$$

$$\frac{1+\kappa}{2\mu} g(x) = 0 \quad l_2 \leq x \leq l_1. \quad (15)$$

Требую выполнения условия (14) в узловых точках, содержащихся в зонах  $[l, l_2]$ , получаем недостающие уравнения для определения приближенных значений сил сцепления  $p(\tau_m)$  в узловых точках:

$$g^0(\tau_{m_1}) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{M}{\pi(l_1 - R)} C(\tau_{m_1}, p(\tau_{m_1})) p(\tau_{m_1}),$$

$$g^0(\tau_{m_1}) + g^0(\tau_{m_2}) =$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{M}{\pi(l_1 - R)} C(\tau_{m_2}, p(\tau_{m_2})) p(\tau_{m_2}), \quad (16)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{m_1}^{M_1} g^0(\tau_{m_1}) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{M}{\pi(l_1 - R)} C(\tau_{M_1}, p(\tau_{M_1})) p(\tau_{M_1}).$$

Здесь  $m = 1, 2, \dots, M_1$ ;  $M_1$  – число узловых точек в отрезке  $[l, l_2]$ .

Аналогично, требуя выполнения условия (15) в узловых точках, содержащихся в зонах  $[l_2, l_1]$ , получаем уравнения для определения приближенных значений контактного напряжения  $q(\tau_m)$  в узловых точках:

$$g(\tau_{m_2}) = 0 \quad m_2 = 1, 2, \dots, M_2, \quad (17)$$

где  $M_2$  – число узловых точек в отрезке  $[l_2, l_1]$ .

Алгебраические системы (12), (13), (16) и (17) связаны между собой. Их совместное решение позволяет определить значения искомой функции  $g(x)$  в узловых точках, сил сцепления в связях  $p(x)$ , контактных напряжений  $q(x)$ , величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  и размер контактной зоны трещины. Из-за неизвестного размера зоны контакта  $l_2$  алгебраическая система (12), (13), (16) и (17) оказалась нелинейной и решалась методом последовательных приближений. При некотором определенном значении параметра  $l_2$  система (12), (16), (17) и (13) без условия разрешимости краевой задачи решалась относительно входящих в нее линейным образом неизвестных  $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}, q_1, q_2, \dots, q_{M_1}$ . Найденные таким образом значения  $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}, q_1, q_2, \dots,$

$q_{M_1}$  и выбранное значение  $l_2$  подставляются в неиспользованное уравнение системы (13) (условие разрешимости). Поскольку эти значения не удовлетворяют неиспользованному уравнению системы, то, подбирая значения размера зоны контакта  $l_2$ , следует многократно повторять вычисления, пока уравнение (13) не будет удовлетворяться с заданной точностью.

В проведенных расчетах система уравнений (12), (13), (16) и (17) в каждом приближении решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка  $M$  (до  $M = 40$ ). Определялись значения контактных напряжений, усилий в связях и размера зоны контакта берегов трещины в зависимости от геометрических и физических параметров стрингерной пластины при  $\nu = 0,3$ ;  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа (сплав В95);  $E_S = 11,5 \cdot 10^4$  МПа (композит А1 – сталь);  $a/L = 0,01$ ;  $y_0/L = 0,25$ ;  $F_1/y_0 h = 1$ . Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14. При расчетах использовались безразмерные координаты  $x' = \frac{2x - (l_1 + l_2)}{l_1 - l_2}$ . Результаты расчетов

представлены на рис. 2. Кривая 1 соответствует безразмерной длине трещины  $l_* = l_1/L = 0,75$ ; кривая 2 –  $l_* = 0,50$ .

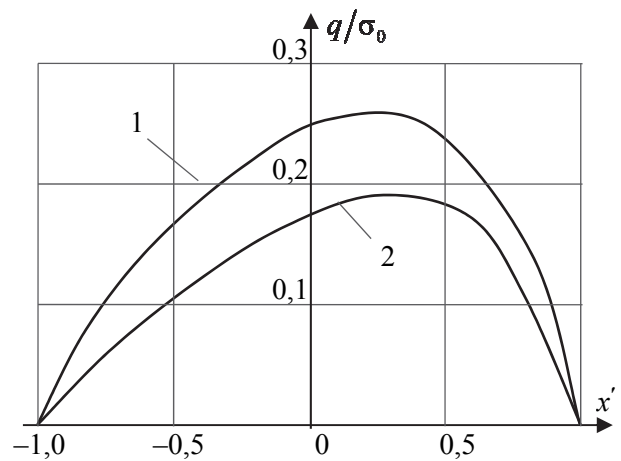


Рис. 2. Распределение контактных напряжений вдоль зоны контакта трещины  
[Fig. 2. Distribution of the contact stresses along the contact zone of the crack]

**Выводы**

Анализ модели частичного закрытия трещины со связями между берегами, исходящей из контура кругового отверстия, в бесконечной подкрепленной тонкой пластине сводится к парамет-

рическому совместному исследованию сингулярного уравнения (11) и бесконечной алгебраической системы (12), (16), (17) при различных геометрических и физических параметрах пластины, законах деформирования связей и размерах концевой зоны трещины. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются контактные напряжения, усилия в связях, размеры зоны взаимодействия берегов трещины и зоны их контакта. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т.е. определять характеристики и напряженное состояние тонкой стрингерной пластины с круговым отверстием, при которых достигается заданная область контакта берегов трещины.

© Мир-Салим-заде М.В., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Список литературы

1. *Мирсалимов В.М.* Исследование предельного поля напряжений возле трещин, исходящих из контуров отверстий перфорированной пластины // Прикладная механика и техническая физика. 1977. № 2. С. 147–154.
2. *Мирсалимов В.М.* Упругопластическое равновесие пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий и трещинами, выходящими на контуры отверстий // Изв. АН АзССР. Серия: Физ.-техн. и мат. наук. 1979. № 2. С. 118–125.
3. *Мирсалимов В.М.* Хрупкое разрушение пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий с выходящими на их контуры трещинами // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 11. С. 992–997.
4. *Mir-Salim-zadeh M.V.* Fracture of an elastic rib reinforced plate weakened by a circular cracked hole // International Journal of Fracture. 2003. Vol. 122. No. 1–2. Pp. L113–L117.
5. *Yan X.* Cracks emanating from circular hole or square hole in rectangular plate in tension // Engineering Fracture Mechanics. 2006. Vol. 73. Issue 12. Pp. 1743–1754.
6. *Abdelmoula R., Semani K., Li J.* Analysis of cracks originating at the boundary of a circular hole in an infinite plate by using a new conformal mapping approach // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 188. Issue 2. Pp. 1891–1896.
7. *Мирсалимов В.М., Шахбандаев Э.Г.* Предельное равновесие тепловыделяющей среды с периодической системой отверстий и прямолинейных трещин // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2008. № 1 (4). С. 98–107.
8. *Мир-Салим-заде М.В.* Предельное равновесие пластины с регулярной системой стрингеров и исходящими из кругового отверстия трещинами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 4. С. 44–51.
9. *Shahbandaev E.G.* On partial closing of cracks in heat-releasing medium weakened by a periodic system of circular holes // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2008. Vol. XXIX. Issue XXXVII. Pp. 215–224.
10. *Chen Y.Z., Lin X.Y., Wang Z.X.* A semi-analytic solution for multiple curved cracks emanating from circular hole using singular integral equation // Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 213. Issue 2. Pp. 389–404.
11. *Guo J.-H., Lu Z.-X., Feng X.* The fracture behavior of multiple cracks emanating from a circular hole in piezoelectric materials // Acta Mechanica. 2010. Vol. 215. Issue 1–4. Pp. 119–134.
12. *Tong D.H., Wu X. R.* Determination of crack surface displacements for cracks emanating from a circular hole using weight function method // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2013. Vol. 36. Pp. 340–348.
13. *Гасанов Ф.Ф.* Моделирование зарождения трещин сдвига в теле, ослабленном периодической системой круглых отверстий // Проблемы машиностроения. 2013. Т. 16. № 3. С. 29–37.
14. *Искендеров Р.А.* Зарождение трещины при поперечном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 3. С. 18–28.
15. *Мирсалимов В.М., Ахмедова М.В.* Упругопластическое разрушение тонкой пластины, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 133–144.
16. *Liu T. J.-C.* Joule heating behaviors around through crack emanating from circular hole under electric load // Engineering Fracture Mechanics. 2014. Vol. 123. P. 2–20.
17. *Yang J., Li X.* Analytic solutions of problem about a circular hole with a straight crack in one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effects // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2016. Vol. 82. Pp. 17–24.
18. *Mirsalimov V.M.* Cracks with interfacial bonds in perforated heat-releasing nuclear fuel // International Journal of Damage Mechanics. 2017. URL: <https://doi.org/10.1177/1056789517713072>.
19. *Мирсалимов В.М.* Некоторые задачи конструкционного торможения трещин // Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22. № 1. С. 84–88.
20. *Savruk M.P., Kravets V.S.* Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers // Materials Science. 1995. Vol. 30. Pp. 95–104.
21. *Мир-Салим-заде М.В.* Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 2. С. 148–159.
22. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
23. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
24. *Мирсалимов В.М.* Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.



**Об авторе**

**Мир-Салим-заде Минавар Вагиф гызы** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теории ползучести, Институт математики и механики НАН Азербайджана. *Область научных интересов:* теория упругости, механика разрушения пластин. *Контактная информация:* e-mail – minavar.mirsalimzade@imm.az.

**Для цитирования**

Мир-Салим-заде М.В. Частичное закрытие прямолинейной трещины, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 313–322. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-313-322.

SCIENTIFIC ARTICLE

## Partially closure of rectilinear crack emanating from contour of circular hole in stringer plate

Minavar V. Mir-Salim-zada

Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan NAS  
9 B. Vahabzadeh St., Baku, AZ1141, Azerbaijan

(received: April 15, 2018; accepted: June 20, 2018)

**Abstract.** The technical holes existing in plates create an increased concentration of stress in the plate. In present article, a thin plate with a circular hole from which a rectilinear crack emanates is studied. The plate is reinforced by stringers. The model of crack with interfacial bonds in end zone is used. The plate and reinforcing ribs are made of different elastic and isotropic materials. It is assumed that the stringers are not bending and their thickness does not change during deformation. The plate is assumed to be unbounded and subjected to stretching at infinity. The case of partial crack closure is considered. The action of the stringers is replaced by unknown equivalent concentrated forces applied at the points of connection of the ribs and the plate. To solve the problem under consideration, the method of solution of the elastic problem and the method of construction in explicit form of the Kolosov – Muskhelishvili potentials corresponding to unknown normal displacements along a rectilinear crack are combined. To determine the parameters that characterize the crack closure, a singular integral equation is obtained and converted to a finite nonlinear algebraic system. To determine the unknown equivalent concentrated forces, Hooke's law is used. Solution of the algebraic system was obtained using the method of successive approximations. Directly from the solution of the obtained algebraic systems the cohesive forces in the bonds, contact stresses and size of the crack contact zone were found. Using the obtained relations it is possible to solve the inverse problem, i.e. to determine the characteristics and stress state of the stringer-reinforced thin plate with a circular hole at which the predetermined contact area of the faces of the rectilinear crack emanating from the hole is reached.

**Keywords:** stringer plate, circular hole, tractions in bonds, contact of crack faces, contact stresses

### References

1. Mirsalimov V.M. (1977). Issledovanie predel'nogo polya napryazhenij vozle treshhin, iskhodyashhih iz konturov otverstij perforirovannoj plastiny [Study of maximum stress field alongside cracks emerging from contours of openings in a perforated plate]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, (2), 147–154. (In Russ.)
2. Mirsalimov V.M. (1979). Uprugoplasticheskoe ravnovesie plastiny, oslablennoj dvojakoperiodicheskoy sistemoj kruglyh otverstij i treshhinami, vyhodjashhimi na kontury otverstij [Elastic-plastic equilibrium of the plate with the double-periodical system of the round orifices and cracks running to the orifices contour]. *Izvestiya AN AzSSR. Seriya Fiz.-tekh. i mat. nauk*, (2), 118–125. (In Russ.)
3. Mirsalimov V.M. (1980). Hrupkoe razrushenie plastiny, oslablennoj perio-dicheskoy sistemoj kruglyh otver-
- stij s vyhodyashhimi na ih kontury treshhinami [Brittle fracture of a plate weakened by a periodic system of circular holes with cracks emanating from their contours]. *International Applied Mechanics*, 16(11), 992–997. (In Russ.)
4. Mir-Salim-zadeh M.V. (2003). Fracture of an elastic rib reinforced plate weakened by a circular cracked hole. *International Journal of Fracture*, 122, L113–L117.
5. Yan X. (2006). Cracks emanating from circular hole or square hole in rectangular plate in tension. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(12), 1743–1754.
6. Abdelmoula R., Semani K., Li J. (2007). Analysis of cracks originating at the boundary of a circular hole in an infinite plate by using a new conformal mapping approach. *Applied Mathematics and Computation*, 188(2), 1891–1896.
7. Mirsalimov V.M., Shahbandaev E.G. (2008). Predel'noe ravnovesie teplovydeljajushhej sredy s periodi-

cheskoj sistemoj otverstij i prjamolinejnyh treshhin [Limit equilibrium of heat-generating medium with a periodic system of holes and rectilinear cracks]. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*, (1), 98–107. (In Russ.)

8. Mir-Salim-zade M.V. (2008). Predel'noe ravnovesie plastiny s reguljarnoj sistemoj stringerov i ishodyashhimi iz krugovogo otverstiya treshhinami [Ultimate state of a plate with a regular system of stringers and cracks issuing from a circular hole]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 37, 44–51. (In Russ.)

9. Shahbandaev E.G. (2008). On partial closing of cracks in heat-releasing medium weakened by a periodic system of circular holes. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*, XXIX(XXXVII), 215–224.

10. Chen Y.Z., Lin X.Y., Wang Z.X. (2009). A semi-analytic solution for multiple curved cracks emanating from circular hole using singular integral equation. *Applied Mathematics and Computation*, 213, 389–404.

11. Guo J.-H., Lu Z.-X., Feng X. (2010). The fracture behavior of multiple cracks emanating from a circular hole in piezoelectric materials. *Acta Mechanica*, 215(1–4), 119–134.

12. Tong D.H., Wu X.R. (2013). Determination of crack surface displacements for cracks emanating from a circular hole using weight function method. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 36, 340–348.

13. Hasanov F.F. (2013). Modelirovanie zarozhdeniya treshhin sdviga v tele, oslablenno periodicheskoj sistemoj kruglyh otverstij [Modeling of shear crack nucleation in a body, weakening by periodic system of circular holes]. *Journal of mechanical engineering*, 16(3), 29–37. (In Russ.)

14. Iskenderov R.A. (2013). Zarozhdenie treshhiny pri poperechnom izgibe izotropnoj plastiny, oslablennoj periodicheskoj sistemoj krugovyh otverstij [The crack nucleation in the isotropic plate, weakened by a periodical system of circular holes under transverse bending]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (3), 18–28. (In Russ.)

15. Mirsalimov V.M., Akhmedova M.V. (2013). Uprugoplasticheskoe razrushenie tonkoj plastiny, oslablennoj periodicheskoj sistemoj krivolinejnyh otverstij [Elastoplastic fracture of a thin plate, weakened by periodic system of the curvilinear holes]. *I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state*, (1), 133–144. (In Russ.)

16. Liu T. J.-C. (2014). Joule heating behaviors around through crack emanating from circular hole under electric load. *Engineering Fracture Mechanics*, 123, 2–20.

17. Yang J., Li X. (2016). Analytic solutions of problem about a circular hole with a straight crack in one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effects. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 82, 17–24.

18. Mirsalimov V.M. (2017). Cracks with interfacial bonds in perforated heat-releasing nuclear fuel. *International Journal of Damage Mechanics*. <https://doi.org/10.1177/1056789517713072>.

19. Mirsalimov V.M. (1986). Nekotorye zadachi konstrukcionnogo tormozheniya treshhin [Some problems of structural arrest of cracks]. *Materials Science*, 22, 84–88. (In Russ.)

20. Savruk M.P., Kravets V.S. (1995). Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers. *Materials Science*, 30, 95–104.

21. Mir-Salim-zada M.V. (2010). Modelirovanie chashtichnogo zakrytiya treshhin v perforirovannoj izotropnoj srede, usilennoj reguljarnoj sistemoj stringerov [Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 51, 148–159. (In Russ.)

22. Muskhelishvili N.I. (1977). *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]*. Moscow, Nauka Publ., 707.

23. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. (1976). *Raspredelenie naprjazhenij okolo treshhin v platinah i obolochkah [Distribution of stresses near cracks in plates and shells]*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 443. (In Russ.)

24. Mirsalimov V.M. (1987). *Neodnomernye uprugoplasticheskie zadachi [Non-one-dimensional elastoplastic problems]*. Moscow, Nauka Publ., 256. (In Russ.)

#### About the author

Minavar V. Mir-Salim-zada – Cand. Sci. (Eng.), Leading Researcher Associate of the Creep Theory Department, Institute of Mathematics and Mechanics of the NAS of Azerbaijan. *Scientific interests*: theory of elasticity, fracture mechanics of plates. *Contact*: e-mail – minavar.mirsalimzade@imm.az.

#### For citation

Mir-Salim-zada M.V. (2018). Partially closure of rectilinear crack emanating from contour of circular hole in stringer plate. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(4), 313–322. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-313-322. (In Russ.)