

## **Геометрические исследования срединных поверхностей тонких оболочек**

УДК 513.073

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-242-247

### **ЭПИ-ГИПОЦИКЛОИДЫ И ЭПИ-ГИПОЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КАНАЛОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ**

В.Н. ИВАНОВ

Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Российская Федерация, 117198

(поступила в редакцию: 12 января 2018 г.; принята к публикации: 5 марта 2018 г.)

В статье рассматриваются кривые – эпи- и гипоциклоиды, образующиеся движением точек, связанных с окружностями одинакового радиуса, катящимися одновременно по внешней и внутренней сторонам неподвижной окружности. Показывается взаимосвязь этих кривых. Рассматривается качение окружностей с постоянным углом наклона к плоскости неподвижной окружности. При полном вращении подвижной окружности вокруг касательной к неподвижной окружности точка, связанная с подвижной окружностью, описывает окружность вокруг касательной к неподвижной окружности. При этом начальная точка в горизонтальной плоскости, принадлежащая эпициклоиде, при повороте на  $180^\circ$  переходит в точку гипоциклоиды. При качении подвижной окружности и полном вращении вокруг касательной в каждой точке касания к подвижной окружности образуются эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности. В статье доказывается, что окружности эпи-гипоциклоидальных циклических поверхностей являются линиями главных кривизн, и, следовательно, поверхности относятся к классу каналовых поверхностей. Приводятся рисунки эпи-гипоциклоид и эпи-гипоциклоидальных циклических поверхностей с различными параметрами – отношением радиусов подвижной и неподвижной окружностей, положением точки, описывающей эпи-гипоциклоиды.

**Ключевые слова:** эпи-гипоциклоиды, циклические поверхности, каналовые поверхности, эпи-гипоциклоидальные каналовые поверхности

### **EPI-HYPOCYCLOIDS AND EPI-HYPOCYCLOIDAL CANAL SURFACES**

V.N. IVANOV

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russia

(received: January 12, 2018; accepted: March 05, 2018)

In the article are regarded the curves – epi- and hypocycloids, which are formed by the moving of the generating points, linked with the circles of the same radius and which are at the same time outside and inside of the unmoving circle. There is shown the relation of those curves. The moving of the circles with constant angle to the plane of the unmoving circle is also regarded. At full rotation of the moving circle the generating point linked with moving circle described a circle around the tangent of the unmoving circle. And the initial point laying in horizontal plane on epicycloid moving to the point on hypocycloid when the moving circle rotates on around the tangent of the unmoving circle. When the circle made a full rotation around the unmoving circle with full rotation around the tangent to the unmoving circle the epi-hypocycloidal cyclic surfaces are formed. In the article is proofed that the circles of the epi-hypocycloidal cyclic surfaces are the coordinate lines of the main curvatures of the surface and so the surfaces belongs to the class of canal surfaces. The drawings of the epi-hypocycloidal canal surfaces with different parameters – relation of the radius of the moving and unmoving circles  $\lambda$ , the position of the generating point  $\mu$  – are shown.

**Keywords:** epi-hypocycloids, cyclic surfaces, canal surfaces, epi-hypocycloidal canal surfaces

При качении окружности радиуса  $a$  по неподвижной окружности радиуса  $b$  точка, связанная с подвижной окружностью, описывает эпициклоиду, если подвижная окружность катится с внешней стороны неподвижной окружности, и гипоциклоиду при качении с внутренней стороны [1–3]. Обычно в литературе приводятся отдельно уравнения эпициклоид и гипоциклоид [1] с образующей точкой, находящейся на подвижной окружности. В монографии [3] показана взаимосвязь уравнений эпи- и гипоциклоид и получено их обобщенное уравнение. Ниже приведено уравнение эпи-гипоциклоид при произвольном положении образующей точки в плоскости подвижной окружности (рис. 1).

Пусть образующие точки 1, 2 находятся на расстоянии  $\mu a$  от центра подвижной окружности радиуса  $a$ . После качения подвижных окружностей до точки касания с неподвижной окружностью  $c$  образующие точки переходят в положение  $1', 2'$ . Положение точек  $1', 2'$  определяется суммированием векторов (рис. 1, б):

$$\begin{aligned} \overline{oc} &= bh(u); \quad \overline{od} = -aT(u)n(u); \\ \overline{d1'} &= aR(u)n(u); \quad \overline{d2'} = -aR(u)n(u), \end{aligned}$$

где  $h(u) = i \cos u + j \sin u$ ;  $n(u) = -i \sin u + j \cos u$  – единичные ортогональные вектора в горизонтальной плоскости;  $T(u) = \mu \sin \lambda u$ ,  $R(u) = 1 - \mu \cos \lambda u$ .

Следовательно, обобщенное векторное уравнение эпи-гипоциклоид получаем в виде

$$r(u) = a[\lambda h(u) - T(u)n(u) + pR(u)h(u)], \lambda = b/a, \quad (1)$$

где  $p$  – единичный параметр: при  $p = 1$  получаем уравнение эпициклоиды; при  $p = -1$  получаем уравнение гипоциклоиды. Эпи- и гипоциклоиды, полученные качением окружностей одинакового радиуса  $a$ , точками, расположенными на одинаковом расстоянии  $\mu a$  от центра, будем далее называть идентичными эпи- и гипоциклоидами.

Из рис. 1, б видно, что точки эпициклоиды и гипоциклоиды при качении подвижных окружностей одинакового радиуса находятся на одинаковом расстоянии  $-aR(u)$  от касательной к неподвижному кругу. Кривая

$$rc(u) = a[\lambda h(u) - T(u)n(u)] \quad (2)$$

является срединной линией однотипных эпи- и гипоциклоид.

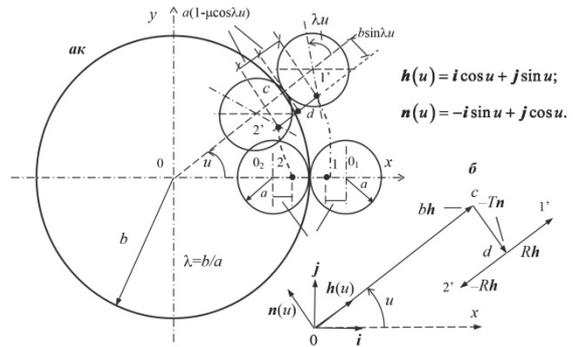


Рис. 1. Образование эпи-гипоциклоид [Fig. 1. Formation of epi-hypocycloid]

Эпи- и гипоциклоиды относятся к классу классических кривых, которым посвящено много работ, содержащих рисунки и описания особенностей этих кривых при изменении параметров. Поэтому далее будем рассматривать циклические поверхности на основе идентичных эпи-гипоциклоид.

Учитывая равноудаленность точек эпи-гипоциклоид от срединной линии (2) и принимая срединную линию за линию центров циклической поверхности (2), получаем уравнение эпи-гипоциклоидальной циклической поверхности с переменным радиусом  $aR(u)$

$$\begin{aligned} \rho(u, v) &= rc(u) + aR(u)e(u, v) = \\ &= a[\lambda h(u) - T(u)n(u) + R(u)e(u, v)], \quad (3) \end{aligned}$$

где  $e(u, v) = h(u) \cos v + k \sin v$  – уравнение окружности единичного радиуса в вертикальной плоскости с начальным направляющим вектором  $h(u)$ .

Отметим некоторые частные случаи.

Если образующие точки совпадают с центром подвижных окружностей ( $\mu = 0$ ), то эпи- и гипоциклоиды являются окружностями радиуса  $b + a$  для эпициклоиды и  $b - a$  для гипоциклоиды, а циклической поверхностью будет тор.

Если радиус подвижной окружности равен радиусу неподвижной окружности  $\lambda = 1$ , то внутренняя окружность не перемещается (не катится) и гипоциклоида вырождается в точку. Циклическая поверхность образуется вращением переменного радиуса вокруг касательной, проходящей через точку (вырожденную гипоциклоиду). Получаемая циклическая поверхность относится к классу каналовых поверхностей Иоахимстала – циклических поверхностей с окружностями, являющимися линиями главных кривизн поверхности и лежащих в плоскостях пучка. Радиус точки диаметра образующей окружности, перпендику-

лярной оси вращения, описывает эпитрохоидальную кривую и циклическая поверхность называется эпитрохоидальной каналовой поверхностью [5; 6].

На рис. 2 приведены виды эпитрохоидальных поверхностей с различным положением образующей точки  $\mu = 1; 0,75; 2,75$ . В нижнем ряду показаны эпитрохоиды, неподвижная окружность и срединная кривая – линия центров окружностей циклической поверхности. Для эпитрохоидальных поверхностей срединная линия аналогична по форме эпитрохоиде. При  $\mu > 1$  (образующая точка расположена с внешней стороны подвижной окружности) эписциклоида описывает самопересекающуюся кривую (аналогично и срединную кривую). Циклические поверхности образуются двумя отсеками циклических поверхностей – внешней и внутренней, соприкасающихся на оси вращения образующих. На рисунке показаны половины отсеков в интервале изменения углового параметра  $0 \leq \nu \leq \pi$ .

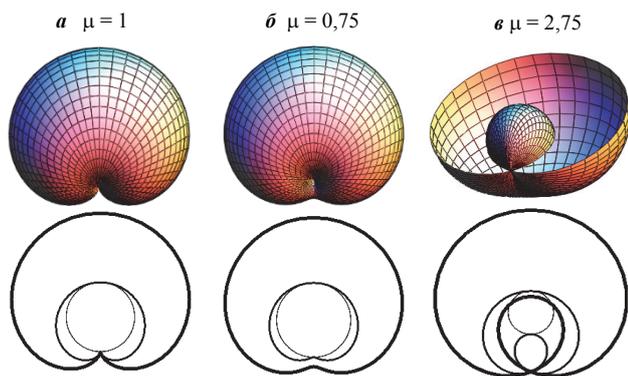


Рис. 2. Эпитрохоидальные кривые и поверхности  $\lambda = 1$  [Fig. 2. Epitrochoidal curves and surfaces  $\lambda = 1$ ]

При радиусе подвижной окружности, равном половине радиуса неподвижной окружности  $\lambda = 2$ , и положении образующей точки на подвижной окружности  $\mu = 1$  гипоциклоида вырождается в отрезок прямой – диаметр неподвижной окружности. При  $\mu \neq 1$  гипоциклоида описывает овальную кривую. Срединная кривая при  $\mu \leq 1$  отклоняется от неподвижной окружности на небольшие расстояния, при  $\mu > 1$  – образуется самопересекающаяся кривая сложной формы.

На рис. 3 представлены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности и кривые с образующей точкой в пределах подвижной окружности.

На рис. 4 показан рисунок эпи-гипоциклоидальной поверхности с образующей точкой вне пределов подвижной окружности  $\mu = 2,75$  и кривые:

выше:  $\bar{b}$  – эписциклоида с гипоциклоидой,  $\bar{v}$  – гипоциклоида,  $\bar{z}$  – срединная кривая. Рисунки кривых показаны совместно с неподвижной окружностью.

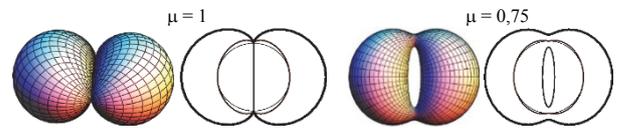


Рис. 3. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности  $\lambda = 2$  [Fig. 3. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces  $\lambda = 2$ ]

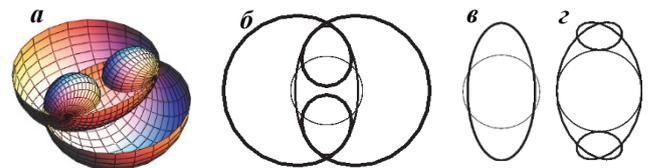


Рис. 4. Эпи-гипоциклоидальная циклическая поверхность  $\lambda = 2$  с образующей точкой вне пределов подвижной окружности  $\mu = 2,75$  [Fig. 4. Epi-hypocycloidal cyclic surface  $\lambda = 2$  with a generating point out of the limits of the moving circle  $\mu = 2.75$ ]

На рис. 5. представлены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с целочисленным отношением радиусов подвижной и неподвижной окружностей с образующей точкой на подвижной окружности. В нижнем ряду показаны совместные рисунки эписциклоиды, гипоциклоиды неподвижной окружности и срединной кривой. Отличие срединной кривой от окружности при  $\lambda > 3$  на рисунке масштабно незаметно, но это различные кривые.

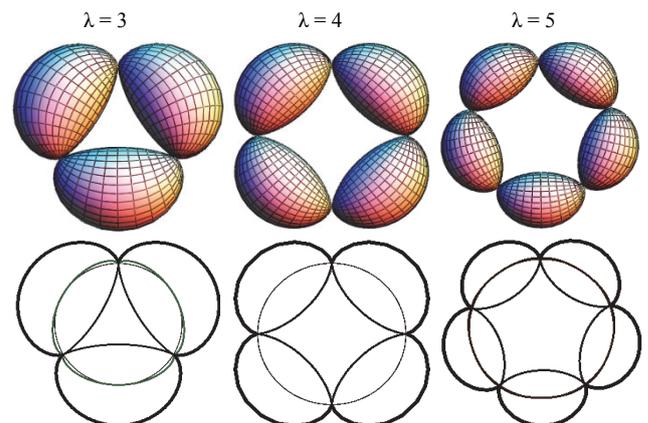
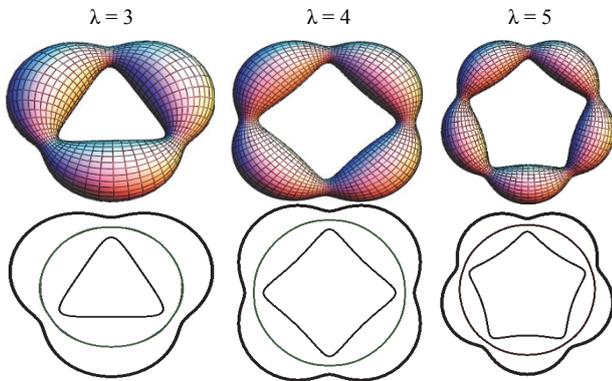
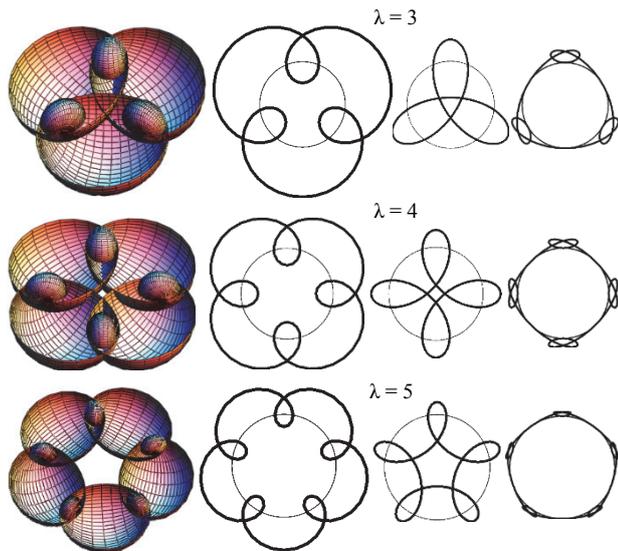


Рис. 5. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой на подвижной окружности [Fig. 5. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces with a generating point on a moving circle]

На рис. 6 изображены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой внутри подвижной окружности  $\mu = 0,65$ . В нижнем ряду рисунка – эпициклоиды, гипоциклоиды неподвижной окружности и срединной кривой.



**Рис. 6. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой внутри подвижной окружности  $\mu = 0,65$**   
 [Fig. 6. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces with a generating point inside the moving circle  $\mu = 0.65$ ]



**Рис. 7. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой вне подвижной окружности  $\mu = 2,65$**   
 [Fig. 7. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces with a generating point outside the moving circle  $\mu = 2.65$ ]

Из приведенных рисунков видно, что эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с целочисленным отношением радиусов неподвижной и подвижной окружностей ( $\lambda = b/a = n$ ) формируются из  $n$  однотипных отсеков с угловым диапазоном  $2\pi/n$ . При  $\mu = 1$  (образующая точка на подвижной окружности) отсеки соприкасаются в крайних конических точках отсеков. При  $\mu < 1$

(образующая точка внутри подвижной окружности) отсеки сопрягаются в сечениях с минимальным радиусом  $R = b(1 - \mu)$ . Как отмечалось выше, при  $\mu = 0$  эпи-гипоциклоидальная циклическая поверхность является тором радиуса  $R = b$ .

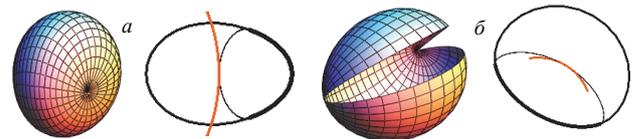
При  $\mu > 1$  (образующая точка вне подвижной окружности) эпи- и гипоциклоиды имеют зоны пересечения, где отсеки эпициклоид оказываются внутри неподвижной окружности, а отсеки гипоциклоид – вне подвижной окружности. Отсеки эпи-гипоциклоидальных циклических поверхностей в этих зонах взаимно пересекаются и разделяются на отсеки внешней и внутренней поверхностей (рис. 7). Очевидно, зона перехода внутреннего отсека поверхности во внешний определяется точками пресечения эпи- и гипоциклоиды. Приравнявая уравнения (1) эпи- ( $p = 1$ ) и гипоциклоиды ( $p = -1$ ), получаем формулу для определения углового параметра  $u_p$  точек пересечения:

$$R(u_p) = 1 - \mu \cos \lambda u_p = 0, \quad u_{pk} = \pm u_0 + k \frac{\pi}{\lambda},$$

$$u_0 = \frac{1}{\lambda} \arccos \left( \frac{1}{\mu} \right) \quad k = 0 \dots \lambda.$$

Таким образом, 1-й внутренний отсек поверхности определяется координатным диапазоном  $u = (-u_0, u_0)$ , для внешнего отсека  $u = (u_0, \pi/\lambda - u_0)$ .

На рис. 8. представлены внутренний (а) и внешний (б) отсеки поверхности, а также показаны отрезки эпи- и гипоциклоид, срединной кривой и неподвижной окружности в соответствующих диапазонах параметра  $u$ .



**Рис. 8. Отсеки эпи-гипоциклоидальных циклических оболочек  $\mu = 2,65$**   
 [Fig. 8. Compartments of epi-hypocycloidal cyclic shells  $\mu = 2.65$ ]

Как видно из рисунков, форма внешнего отсека аналогична отсекам при  $\mu = 1$ . Форма внутреннего отсека отличается от формы внешних отсеков.

Выше рассмотрены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с целочисленным отношением  $\lambda$  радиусов неподвижной и подвижной окружностей. Уравнение поверхностей (3) пригодно для поверхностей с произвольным параметром  $\lambda$ . Из геометрии эпи- и гипоциклоид с дробным параметром  $\lambda$  известно, что эти кривые являются сложными взаимно пересекающимися кривыми [3, 4]. В данной работе ограничимся

рассмотрением эллипсоидальные циклические поверхности с целочисленным параметром  $\lambda$ .

Выше было отмечено, что при  $\lambda = 1$  поверхности относятся к классу каналовых поверхностей Иоахимстала. Чтобы выяснить к какому классу относятся эллипсоидальные циклические поверхности общего типа, получим коэффициенты квадратичных форм. Предварительно рассмотрим свойства функциональных параметров уравнения поверхности (3). Частные производные функций и векторов будем обозначать соответствующим индексом.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_u &= -i \sin u + j \cos u = \mathbf{n}; \\ \mathbf{n}_u &= -i \cos u - j \sin u = -\mathbf{h}; \\ \mathbf{e}_u &= \mathbf{n} \cos v; \quad \mathbf{e}_v = -\mathbf{h} \sin v + \mathbf{k} \cos v = \mathbf{g}(u, v); \\ \mathbf{g}_u &= -\mathbf{n} \sin u; \quad \mathbf{g}_v = -\mathbf{h} \cos v - \mathbf{k} \sin v = -\mathbf{e}; \\ \mathbf{h} &= \mathbf{e} \cos v - \mathbf{g} \sin v; \\ R_u &= \lambda \mu \sin \lambda u = \lambda T; \quad T_u = \lambda \mu \cos u; \\ \lambda - T_u &= \lambda R. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитываем также ортогональность единичных векторов:  $\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{k}$  и  $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{g}$ .

Учитывая соотношения (4), получим:

$$\begin{aligned} \rho_u &= a [T\mathbf{h} + R(\lambda + \cos v)\mathbf{n} + \lambda T\mathbf{e}]; \quad \rho_v = aR\mathbf{g}; \\ \rho_{uv} &= a \{ [T' - R(\lambda + \cos v)]\mathbf{h} + T(1 + 2\lambda \cos v + \lambda^2)\mathbf{n} + \lambda T'\mathbf{e} \}; \\ \rho_{uv} &= a [-R \sin v \mathbf{n} + \lambda T\mathbf{g}]; \quad \rho_{vv} = -aR\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты квадратичных форм:

$$\begin{aligned} E &= a^2 \left[ (1 + 2\lambda \cos v + \lambda^2) T^2 + R^2 (\lambda + \cos v)^2 \right]; \\ F &= -a^2 RT \sin v; \quad G = a^2 R^2. \\ \Sigma &= \sqrt{EG - F^2} = a^2 R (\lambda + \cos v) \sigma; \\ \sigma &= \sqrt{(T^2 + R^2)} = \sqrt{(1 - 2\mu \cos \lambda u + \mu^2)}; \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{\Sigma} (\rho_u \times \rho_v) = \frac{1}{\sigma} [R\mathbf{e} - T\mathbf{n}]. \\ L &= (\mathbf{m} \rho_{uv}) = \\ &= \frac{a}{\sigma} \{ R(1 + \cos v) [\lambda - R(1 + \cos v)] - T^2 (1 + 2\lambda \cos v + \lambda^2) \}; \\ M &= (\mathbf{m} \rho_{vv}) = \frac{a}{\sigma} TR \sin v; \quad N = (\mathbf{m} \rho_{vv}) = -\frac{a}{\sigma} R^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул видно, что выполняется равенство  $MG = NF$  или  $MG - NF = 0$ . Это является услови-

ем, что система координат  $u = \text{const}$  (система окружностей) является системой линий кривизны поверхности [3; 7; 8], и, следовательно, эллипсоидальные циклические поверхности относятся к классу каналовых поверхностей.

© Иванов В.Н., 2018

## Список литературы

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике: для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: ГИФизМатлит, 1962. 608 с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Изд-во «Наука», 1965. 480 с.
3. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструктивные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad, AutoCad: монография. М.: Изд-во АСВ, 2016. 412 с.
4. Lawrence J. Dennis. A catalog of special plane curves. Dover Publications, 1972. Pp. 161, 168–170, 175.
5. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.
6. Иванов В.Н., Махмуд Х.С. Координатная сеть линий кривизны эпитрохоидальной поверхности // Исследования по строительной механике пространственных систем. М.: Изд-во УДН, 1990. С. 38–44.
7. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: ГИФМЛ, 1963. 540 с.
8. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: монография. М.: Изд-во РУДН, 2010. 540 с.

## References

1. Bronshtain I.N., Semendyaev K.A. (1962). *Spravochnik po matematike* [Reference book of higher mathematics]. For engineers and students of the VTUZes. Moscow, GIFizMatlit Publ., 608. (In Russ.)
2. Smirnov V.I. (1965). *Kurs vysshei matematiki* [Course of higher mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1, 480. (In Russ.)
3. Ivanov V.N., Romanova V.A. (2016). *Konstruktsionnye formy prostranstvennykh konstruksii. Vizualizatsiya poverkhnostei v sistemakh MathCad, AutoCad* [Constructive forms of the space constructions. Visualization of the surfaces in the systems of MathCad and UutuCad]. Monograph. Moscow, FSV Publ., 412. (In Russ.)
4. Lawrence J. Dennis. (1972). *A catalog of special plane curves*. Dover Publications, 161, 168–170, 175.
5. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Switzerland: Springer International Publishing, 752.
6. Ivanov V.N., Mahmud H.S. (1990). *Koordinatnaya set' linii krivizny epitro-khoidal'noi poverkhnosti* [Coordinate system of the curvature lines of the epitrochoidal surface]. *Investigation of structural mechanics of the space systems*. Moscow, UDN Publ., 38–44. (In Russ.)

7. Shulikovskiy V.I. (1963). *Klassicheskaya differentsial'naya geometriya* [Classic differential geometry]. Moscow, GIFML Publ., 540. (In Russ.)

8. Ivanov V.N., Krivoshepko S.N. (2010). *Analiticheskie metody rascheta obolochek nekanonicheskoi formy* [Analytical methods of analyses of the shells of non-canonical form]. Moscow, RUDN Publ., 540. (In Russ.)

**Об авторе**

**Иванов Вячеслав Николаевич** – доктор технических наук, профессор департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов:* геометрия, формообразование поверхностей и методы расчета тонкостенных конструкций сложных форм. *Контактная информация:* e-mail – i.v.ivn@mail.ru.

**About the author**

**Ivanov Vyacheslav N.** – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Architecture and Civil

Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* geometry, surface shaping and methods for calculating thin-walled structures of complex shapes. *Contact:* e-mail – i.v.ivn@mail.ru.

**Для цитирования**

*Иванов В.Н.* Эпи-гипоциклоиды и эпи-гипоциклоидальные каналовые поверхности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 242–247. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-242-247.

**For citation**

Ivanov V.N. (2018). Epi-hypocycloids and epi-hypocycloidal canal surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 242–247. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-242-247.