

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-120-131

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ, УСИЛЕННЫХ КОМПОЗИТНЫМИ ТКАНЯМИ, МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.П. АГАПОВ*, В.Б. НИКОЛАЕВ**, Р.О. ГОЛОВАНОВ*

*Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет
Ярославское шоссе, 26, Москва, Россия, 129337

**АО «Атомэнергопроект»
ул. Бакунинская, 7, стр. 1, Москва, Россия, 105005

(*поступила в редакцию: 02 декабря 2017 г.; принята к публикации: 05 марта 2018 г.*)

Рассматривается конечно-элементная методика расчета железобетонных плит, усиленных композитными тканями на основе углеродных волокон, реализованная в программе ПРИНС. Методика предназначена для анализа напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций при возникновении трещин в бетоне и пластических деформаций в арматуре. Расчет ведется в приращениях, причем на каждом шаге нагружения используется переменная матрица жесткости. Постоянная ее часть представляет матрицу жесткости в начале шага нагружения, а переменная вычисляется с учетом напряженно-деформированного состояния в конце текущей итерации. Переменная часть матрицы жесткости, будучи умноженной на вектор перемещений, найденный на предыдущей итерации, переносится в правую часть системы уравнений и рассматривается как дополнительная нагрузка. При возникновении трещин или при появлении пластических деформаций напряжения корректируются в соответствии с заданными диаграммами деформирования. Поэтому в конце шага нагружения проверяются условия равновесия. При необходимости производится уравнивание внешних и внутренних сил. При учете пластических деформаций в бетоне и арматуре используется теория пластического течения и критерий текучести Губера – Мизеса, модифицированный на основании экспериментальных исследований Купфера и др. Приводится пример расчета железобетонной плиты с разными вариантами усиления композитом и без усиления. Анализируются результаты расчета. Показывается возможность исследования напряженно-деформированного состояния на всем пути нагружения железобетонных плит вплоть до разрушения.

Ключевые слова: железобетонные плиты, композитные ткани, метод конечных элементов, программные комплексы

Современные строительные материалы позволяют облегчить ремонт инженерных конструкций и сооружений и увеличить срок их эксплуатации. К числу таких материалов относятся, в частности, ткани на основе углеродных волокон. Промышленность выпускает широкий ассортимент таких тканей [1–3], а строительные организации освоили методики их применения [4–5]. Различными ведомствами разработаны рекомендации по ремонту и усилению железобетонных конструкций (см., например, [6]), которые основаны на общепринятых, в основном экспериментальных, сведениях о работе подобных конструкций, но не пред-

полагают точного анализа напряжено-деформированного состояния исследуемых объектов. Поэтому упомянутые рекомендации содержат большое количество поправочных коэффициентов с целью обеспечения запаса прочности, который может оказаться и избыточным. Более точный анализ может быть выполнен методом конечных элементов с помощью компьютерных программ, в которых этот метод реализован в линейной и нелинейной постановках. К таким программам относятся хорошо известные NASTRAN [7], ANSYS [8], ABAQUS [9] и ряд других. Следует отметить, однако, что расчеты физически нелинейных конструкций в упомянутых программах проводятся с помощью физических соотношений, основанных на тех или иных экспериментах, а возникающие при этом разрешающие уравнения для конструкции в целом решаются приближенными методами. Для повышения достоверности результатов подобные расчеты следует проводить с использованием нескольких программ. Поэтому проектировщики должны иметь в своем арсенале несколько доступных расчетных инструментов. В связи с этим разработка альтернативных расчетных методик и соответствующих программ остается до сих пор актуальной задачей [10–12].

В данной работе рассматривается конечно-элементная методика расчета железобетонных плит, в том числе усиленных композитными тканями, с учетом пластических деформаций в арматуре и трещинообразования в бетоне, описывается программная реализация методики в вычислительном комплексе ПРИНС и приводится пример расчета плиты.

Расчет физически нелинейных конструкций с помощью ВК ПРИНС ведется методом конечных элементов в приращениях [1] по уравнению

$$K_{NL}\Delta u = \Delta P, \quad (1)$$

где K_{NL} – полная нелинейная матрица жесткости, связывающая приращения узловых сил и перемещений; Δu и ΔP – приращения узловых перемещений и узловых сил конечно-элементной модели соответственно.

Матрица K_{NL} в интервале нагружения непрерывно изменяется, поэтому, чтобы получить точное решение, необходимо в формуле (1) перейти к интегрированию:

$$\int_{u_0}^{u_K} K_{NL} du = \Delta P, \quad (2)$$

где u_0 и u_K – значения перемещений в начале и конце интервала нагружения соответственно.

Однако вести вычисления по формуле (2) практически невозможно, так как не существует аналитического выражения для K_{NL} , а верхняя граница интервала интегрирования неизвестна. Вычисляя интеграл по правилу трапеций, получаем

$$\frac{1}{2}(K_0 + K_1)\Delta u = \Delta P, \quad (3)$$

где K_0 и K_1 – матрицы жесткости, вычисляемые в начале и конце шага нагружения соответственно.

Запишем уравнение (3) в виде

$$(K_0 + \Delta K)\Delta u = \Delta P, \quad (4)$$

где $\Delta K = \frac{1}{2}(K_1 - K_0)$.

Уравнение (4) решается итерационным способом:

$$K_0 \Delta u_i = \Delta P - \Delta K_{i-1} \Delta u_{i-1}, \quad (5)$$

где i – номер итерации.

При достижении сходимости итерационного процесса находятся полные значения перемещений и напряжений по формулам:

$$u = u_0 + \Delta u; \quad \sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma. \quad (6)$$

Приращения напряжений находятся по формуле

$$\Delta \sigma = C_{ep} \Delta \varepsilon, \quad (7)$$

где C_{ep} – упруго-пластическая матрица характеристик материала, определяемая ниже. Эта матрица на шаге нагружения не остается постоянной. Строго говоря, напряжения должны находиться интегрированием выражения (7), т.е.

$$\Delta \sigma = \int_0^{\Delta \varepsilon} C_{ep} d\varepsilon. \quad (8)$$

Однако в изгибаемых железобетонных конструкциях существенное влияние на прочность оказывает трещинообразование, поэтому на каждом шаге нагружения приходится анализировать напряженное состояние и при возникновении трещины корректировать напряжения с учетом диаграммы деформирования для растянутой зоны. Это требует проведения процесса уравнивания конструкции, следовательно применение приближенной формулы (7) оказывается вполне оправданным.

Матрица жесткости K для отдельного конечного элемента находится по формуле [13]

$$K = \int_V B^T C B dV,$$

где B – матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений; C – матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций.

Вектор узловых нагрузок конечного элемента находится из соотношения

$$f = - \int_V N^T p dV,$$

где N – матрица функций формы, выражающая перемещения внутренних точек конечных элементов с узловыми перемещениями; p – вектор, составленный из компонентов распределенной нагрузки.

Методика вычисления геометрической матрицы B хорошо известна (см., например, [13]).

При построении физической матрицы в данной работе используются диаграммы деформирования бетона и арматуры в виде, показанном на рис. 1. При этом предполагается, что бетон деформируется линейно в сжатой зоне до достижения предела текучести σ_T , а в растянутой зоне – до достижения предела трещинообразования σ_{cr} . Вид диаграммы в растянутой зоне определяется параметрами σ_{cr} , α и ε_m и в зависимости от этих параметров может быть различным.

Разгрузка происходит по линейному закону с начальным модулем упругости в сжатой зоне и модулем $E_p = \sigma_o / \varepsilon_o$ в растянутой зоне.

Диаграммы деформирования арматуры в растянутой и сжатой зонах принимаются одинаковыми.

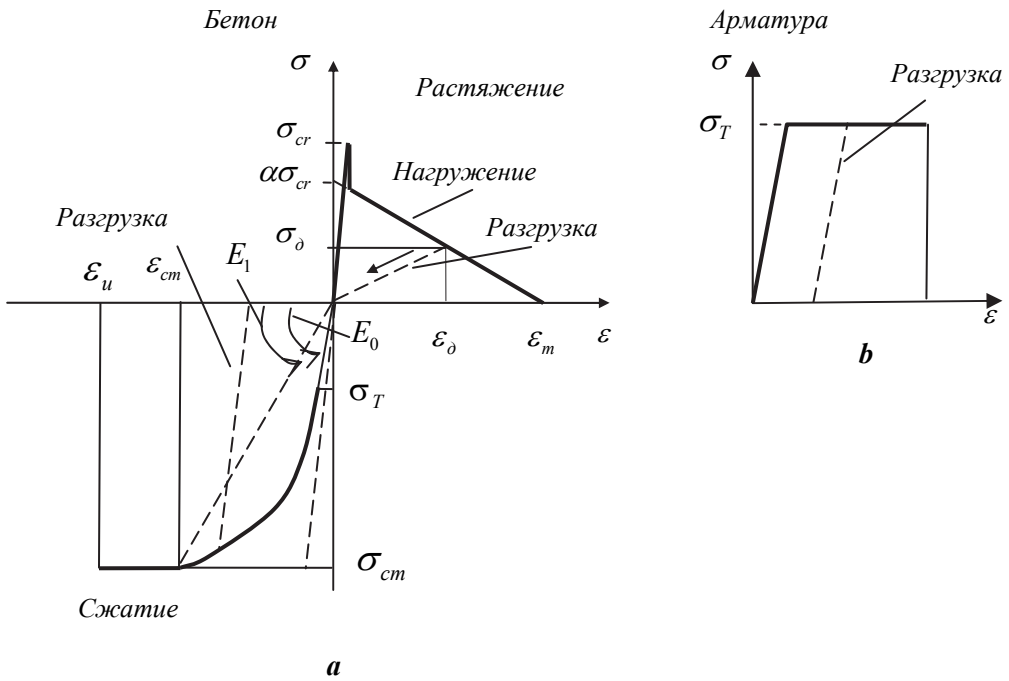


Рис. 1. Диаграммы деформирования бетона и арматуры
[Fig. 1. Diagrams of deformation of concrete and reinforcement]

Для двухмерного напряженного состояния графики рис. 1 трактуются как диаграммы зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

В интервале от σ_T до σ_{cm} для сжатой зоны бетона принимается закон деформирования, рекомендованный Еврокомиссией по бетону, имеющий вид [14]

$$\sigma = \frac{\frac{E_0}{E_1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{E_1} - 2\right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cm}}} \sigma_{cm} \quad \text{при } |\varepsilon| < |\varepsilon_{cm}|, \quad (9)$$

где σ и ε – напряжения и деформации в сжатой зоне бетона соответственно; E_0 – начальный модуль упругости; E_1 – секущий модуль от начала до пикового значения напряжения σ_{cm} ; ε_{cm} – деформация, соответствующая пиковому значению напряжения.

Используются многослойные конечные элементы изгибаемых пластин, построенные с использованием гипотезы Кирхгофа и подробно описанные в работе [15].

Для получения зависимости между приращениями напряжений и деформациями для сжатой и сжато-растянутой зон при $\sigma_1 < \sigma_{cr}$ используется теория пластического течения. Критерий текучести бетона сжатой зоны принимается в виде, предложенном в работе [16],

$$f(I_1, J_2) = [\beta(3J_2) + \alpha I_1]^{1/2} = \sigma_0, \quad (10)$$

где I_1 – первый инвариант тензора напряжений; J_2 – второй инвариант девиатора напряжений; α и β – коэффициенты, принимаемые с учетом экспериментов Купфера и др. [17] равными $\alpha = 0,355\sigma_0$ и $\beta = 1,355$.

Отметим, что при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ условие (5) превращается в известный критерий пластичности Губера – Мизеса [17].

Физическая матрица находится при этом из соотношения (см., например, [13; 15; 18])

$$[C_{ep}] = \left[[C] - [C]\{a\} \frac{\{a\}^T [C]}{H' + \{a\}^T [C]\{a\}} \right],$$

где $[C]$ – матрица коэффициентов обобщенного закона Гука для плоского напряженного состояния; $\{a\}$ – вектор течения; H' – касательный модуль кривой «интенсивность напряжения – приращение интенсивности пластических деформаций».

Вектор течения находится дифференцированием функции течения по компонентам напряжений, т.е.

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \right\}^T.$$

В алгоритме, реализованном в программе ПРИНС, кривая $\sigma(\varepsilon)$ перестраивается по точкам в диаграмму $\sigma(\varepsilon_p)$, по которой и определяется параметр H' . Процесс перестроения иллюстрируется на рис. 2. Эта же диаграмма определяет и правило упрочнения.

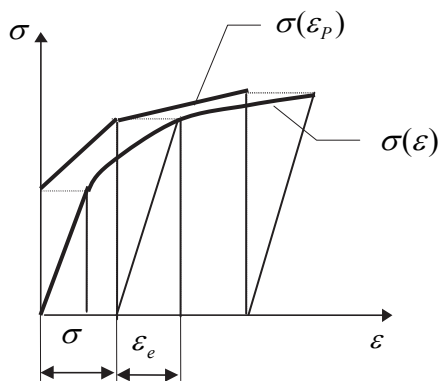


Рис. 2. Построение диаграммы «напряжение – пластическая деформация»
[Fig. 2. Construction of a stress–plastic strain diagram]

Зависимость между напряжениями и деформациями в растянутой зоне принимается линейной до возникновения трещины. Момент возникновения трещины фиксируется по главным напряжениям. При возникновении трещины модуль упругости в направлении, перпендикулярном трещине, принимается равным нулю, а модули сдвига в направлении, параллельном трещине, корректируются в соответствии с рекомендациями, приведенными в работе [16]. Используемые рекомендации учитывают агрегатное взаимодействие в зоне трещины,

нагильный эффект и другие факторы, влияющие на работу треснувшего бетона на сдвиг. Нормальные напряжения в направлении трещины скачком уменьшаются до величины, определяемой по диаграмме рис. 1,а для растянутой зоны.

Физические уравнения при возникновении трещины формируются сначала в главных осях, а затем пересчитываются к глобальным осям.

Физические уравнения для арматуры и для углеродной ткани с однонаправленными волокнами принимаются на основе диаграммы Прандтля по методике, описанной в работе [15].

Использование линейризованных уравнений на шаге нагружения приводит к нарушению условий равновесия. Поэтому в конце каждого шага нагружения вычисляется вектор P_σ узловых сил, статически эквивалентный полным значениям внутренних напряжений, находится вектор невязки как разность между полным вектором внешней нагрузки P и вектором P_σ , решение корректируется с учетом этой невязки.

Для иллюстрации возможностей предложенной методики рассчитан фрагмент железобетонной стены одного из сооружений атомной станции, в которой были обнаружены трещины и которой может потребоваться усиление. Оно может быть выполнено с использованием углеродных тканей [19]. Чтобы убедиться в достоверности получаемых результатов, в данной работе был рассчитан фрагмент стены в виде сильно вытянутой в одном направлении полосы, шарнирно опертой вдоль коротких сторон (рис. 3). Для сравнения был также выполнен расчет плиты без усиления композитом.

Конечно-элементная расчетная схема плиты приведена на рис. 4. Использовалась неравномерная сетка конечных элементов со сгущением к середине пролета. Сетка содержит три группы элементов 1, 2 и 3. Центральная группа 3 состоит из одного ряда элементов.

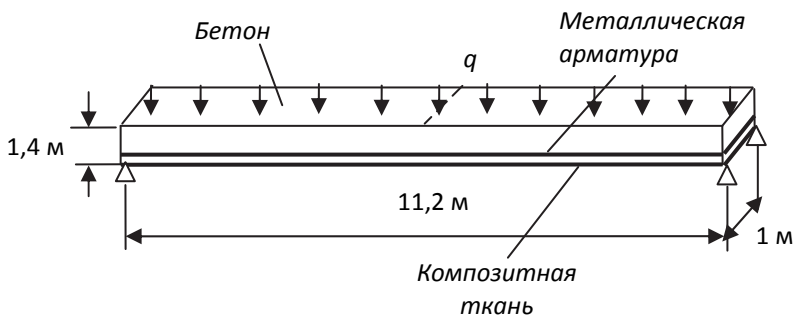


Рис. 3. Фрагмент железобетонной плиты, усиленной композитной тканью
 [Fig. 3. Fragment of reinforced concrete slab reinforced with composite fabric]

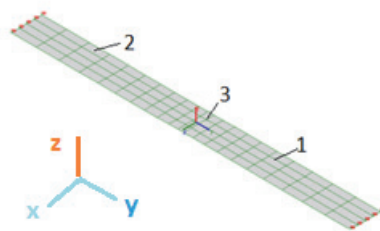


Рис. 4. Конечно-элементная расчетная схема плиты
 [Fig. 4. Finite element calculation scheme of slab]

Разбивка плиты на слои по толщине отражена в табл. 1. Слои 1, 12 и 29 имеют нулевую толщину. Слой 12 является базовым, а слои 1 и 29 – фиктивными. Фиктивные слои вводятся для получения возможности вывода напряжений на нижней и верхней поверхностях в постпроцессоре.

Таблица 1

**Характеристики слоев
[Layer characteristics]**

Номер слоя	Толщина, см	Материал
2–11	7	Бетон
13–22	6,25	Бетон
23	0,21	Сталь
24–25	3,5	Бетон
26–28	0,1	Композитная ткань

Использовались следующие материалы: бетон класса В20, арматура класса А400 и композитная ткань с однонаправленными волокнами. Для ткани принимались следующие характеристики: модуль упругости $E_K = 6,3 \times 10^7$ кПа, предел прочности $R_K = 7 \times 10^5$ кПа, остаточная деформация $\varepsilon_{ост} = 2\%$.

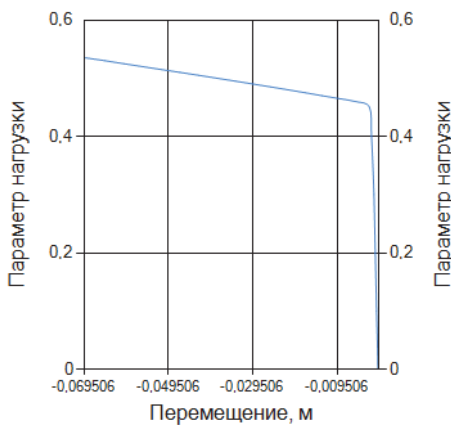
Плита нагружалась равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 100$ кПа. Множители нагрузки приведены в табл. 2.

Таблица 2

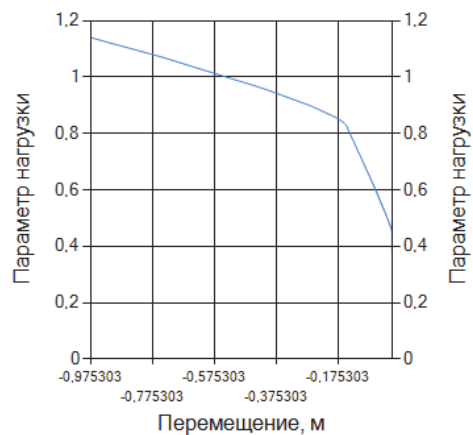
**Распределение нагрузки по шагам
[Load distribution by steps]**

Номер шага	1–16	17–32	33–40	41 и далее
Множитель нагрузки	0,1	0,05	0,025	0,01

На рис. 5 и 6 показаны кривые равновесных состояний для плиты без композитного усиления и с усилением.



**Рис. 5. Равновесная кривая для плиты без усиления
[Fig. 5. The equilibrium curve for plate without strengthening]**



**Рис. 6. Равновесная кривая для плиты с композитным усилением
[Fig. 6. The equilibrium curve for plate with composite strengthening]**

На рис. 7 и 8 приведены значения предельных моментов для двух вариантов расчета. Предельное состояние для плиты без усиления было достигнуто при нагрузке $q = 53$ кПа, а для усиленной плиты – при $q = 114$ кПа. Теоретическое значение изгибающих моментов при таких нагрузках составляет 831 кНм/м и 1788 кНм/м соответственно.

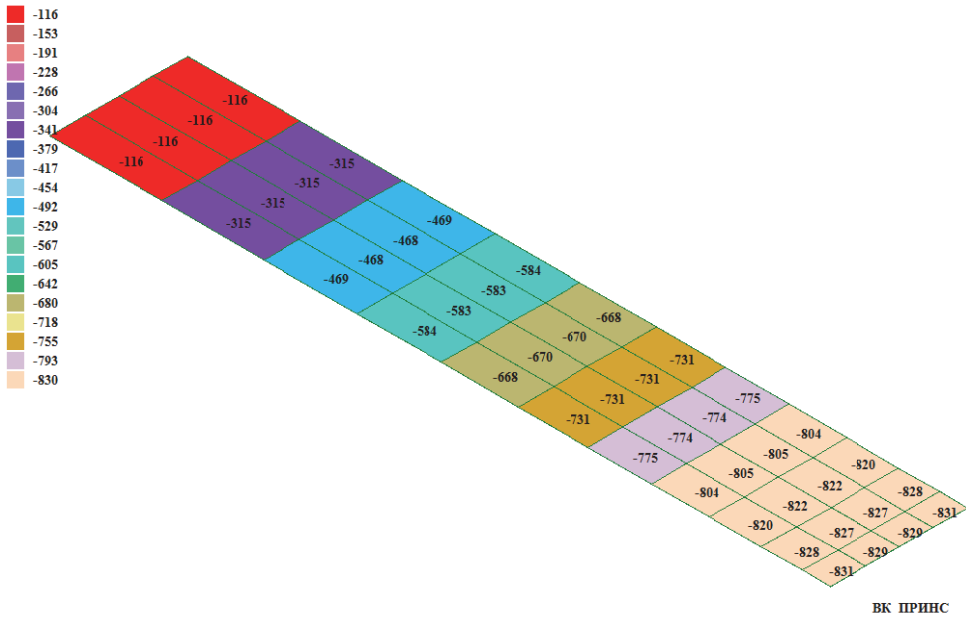


Рис. 7. Предельные изгибающие моменты для плиты без усиления
 [Fig. 7. Limit bending moments for a plate without strengthening]

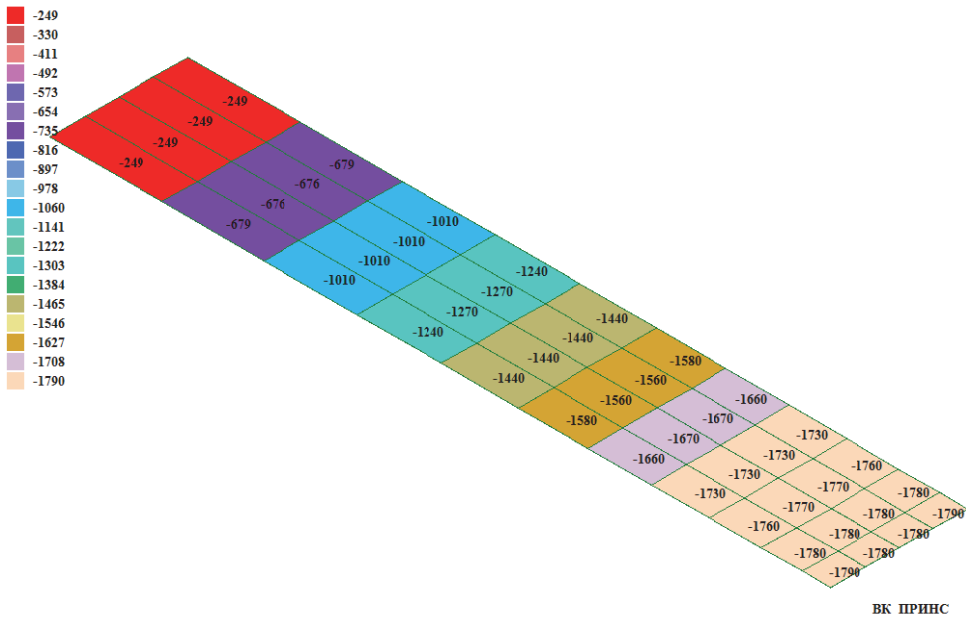


Рис. 8. Предельные изгибающие моменты для плиты с усилением
 [Fig. 8. Limit bending moments for a plate with strengthening]

Предельные значения моментов, найденные по программе ПРИНС, составили 830 кНм/м и 1790 кНм/м, что практически равно теоретическим значениям.

При принятом усилении плиты предельное значение изгибающего момента увеличилось по сравнению с исходным вариантом на 116%.

Следует отметить, что значения внутренних изгибающих моментов находятся в программе ПРИНС относительно срединной поверхности плиты.

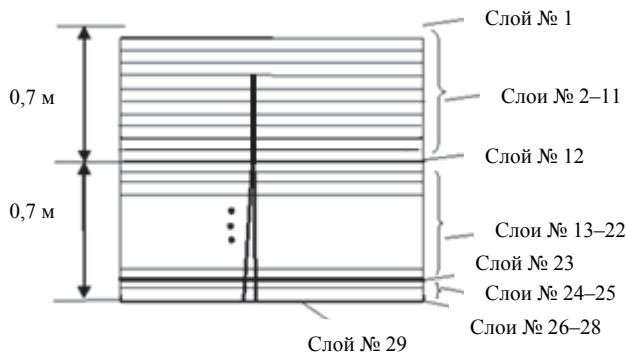


Рис. 9. Глубина трещины для плиты, усиленной композитом
[Fig. 9. The depth of a crack for a plate reinforced with a composite]

На рис. 9 показана глубина проникновения трещины для плиты, усиленной композитом, в состоянии, предшествующем разрушению.

При увеличении числа слоев композита в два раза предельная нагрузка достигла значения $q = 221$ кПа, т.е. увеличилась по сравнению с исходным вариантом на 93,8%.

В результате расчета определялись также усилия и напряжения в композитной ткани, исследовались процессы трещинообразования в бетоне и пластического деформирования арматуры. Размеры статьи не позволяют привести полученные результаты в полном объеме.

Выводы. Проведенные в настоящей работе исследования показали, что методика физически нелинейного расчета, реализованная в программе ПРИНС, дает возможность детально анализировать процессы деформирования железобетонных плит как с традиционным армированием, так и усиленных композитными тканями. Строгое соблюдение условий равновесия при сложном характере напряженного состояния, отмеченное в различных вариантах решения задач, свидетельствует о достоверности получаемых результатов. Программа ПРИНС доступна широкому кругу специалистов и может быть полезна при расчете и проектировании железобетонных плит.

© Агапов В.П., Николаев В.Б., Голованов Р.О., 2018

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. *Кальянова Е.Е.* Новые инновационные технологии: преимущества продуктов Sika // Строительство. 2014. № 8. С. 54–58.
2. FRP Repair Materials and Methods. Concrete International – 2005. Vol 27. № 1. P. 66.
3. *Cardolin A.* Carbon Fibre Reinforced Polymers for Strengthening of Structural Elements. Division of Structural Engineering, Department of Civil and Mining Engineering, Lulea University of Technology. Sweden, 2003. 194 p.

4. Чернявский В.Л., Аксельрод Е.З. Применение углепластиков для усиления железобетонных конструкций промышленных зданий // Промышленное и гражданское строительство. 2004. № 3. С. 37–38.

5. Рекомендации по применению тканевых композиционных материалов при ремонте железобетонных конструкций мостовых сооружений. Федеральное дорожное агентство (Росавтодор). М., 2013. 55 с.

6. Руководство по усилению железобетонных конструкций композитными материалами. М.: НИИЖБ, 2012. 48 с.

7. MSC NASTRAN 2016. Nonlinear User's Guide. SOL 400. MSC Software Corporation. 2016. 790 p.

8. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. М.: Изд-во «ДМК-Пресс», 2005. 637 с.

9. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia. 2011.

10. Nabil F. Grace, Singh S.B. Durability Evaluation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthened Concrete Beams: Experimental Study and Design // ACI Structural Journal. January-February, 2005. Vol 102. No 1. P. 40–53.

11. Бокарев С.А., Смердов Д.Н. Нелинейный анализ железобетонных изгибаемых конструкций, усиленных композиционными материалами // Вестник ТГАСУ. 2010. № 2. С. 113–125.

12. Cedolin L., Deipoli S. Finite element studies of shear-critical R/C beams // ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division. June 1977. Vol. 103. No. EM3. P. 395–410.

13. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p.

14. Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code, 1990. Thomas Telford House, London, 1993.

15. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: АСВ, 2005. 245 с.

16. Owen D.R.J., Figueiras J.A., Damjanic F. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1983. 41. P. 323–366.

17. Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H., Behavior of concrete under biaxial stresses // ACI Journal Proceedings. August 1969. Vol. 66. No. 8. P. 656–666.

18. Chen W.F. Plasticity in Reinforced Concrete. McGraw-Hill. New York, 1982. 261 p.

19. Руководство по ремонту бетонных и железобетонных конструкций и гидротехнических сооружений атомных станций. ОАО «Концерн Росэнергоатом». М., 2012. 114 с.

Об авторах:

Агапов Владимир Павлович – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики и математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* расчет конструкций на прочность, устойчивость и колебания методом конечных элементов; разработка программного обеспечения прочностных расчетов. *Контактная информация:* e-mail – agarovpb@mail.ru

Николаев Валерий Борисович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, АО «Атомэнергопроект». *Область научных интересов:* теория массивных железобетонных конструкций энергетических сооружений. *Контактная информация:* e-mail – agarovpb@mail.ru

Голованов Роман Олегович – кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной механики и математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* экспериментальные и расчетные исследования пространственных стержневых систем неканонической формы. *Контактная информация:* e-mail – agarovpb@mail.ru

Для цитирования:

Агапов В.П., Николаев В.Б., Голованов Р.О. Расчет железобетонных плит, усиленных композитными тканями, методом конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 120–131. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-120-131.

THE ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE SLABS STRENGTHENED BY COMPOSITE FABRICS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

V.P. AGAPOV*, V.B. NIKOLAEV**, R.O. GOLOVANOV*

* Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

**AO “Atomenergoproekt”
7 Bakuninskaya St., bldg. 1, Moscow, 107996, Russian Federation

(received: December 02, 2017; accepted: March 05, 2018)

The finite element method of calculation of reinforced concrete slabs strengthened with composite fabrics based on carbon fibers, implemented in the PRINS program, is considered. The method is designed for analyzing the stress-strain state of reinforced concrete structures when cracks in concrete and plastic deformations in the reinforcement arise. The calculation is carried out in increments, and at each stage of loading a variable stiffness matrix is used. Its constant part represents the stiffness matrix at the beginning of the loading stage, and the variable one is calculated taking into account the stress-strain state at the end of the current iteration. The variable part of the stiffness matrix, multiplied by the displacement vector found at the previous iteration, is transferred to the right side of the equation system and is considered to be an additional load. When cracks occur or when plastic strains appear, the stresses are corrected in accordance with the specified deformation diagrams. Therefore, at the end of the loading step the equilibrium conditions are checked. If necessary, the external and internal forces are balanced. When considering plastic deformations in concrete and reinforcement, the theory of plastic flow and the Huber – Mises yield criterion, modified taking into account the experimental studies of Kupfer et al., are used. An example of the reinforced concrete slab analysis with different variants of strengthening by composite and without strengthening is given. The results of the calculation are analyzed. The possibility of studying the stress-strain state throughout the entire path of loading of reinforced concrete slabs up to destruction is shown.

Keywords: reinforced concrete slabs, composite fabrics, finite element method, software

R e f e r e n c e s

1. Kalyanova E.E. (2014). Novyie innovatsionnyie tehnologii: preimuschestva produktov Sika [New innovative technologies: advantages of Sika products]. *Stroitelstvo*. No 8, 54–58. (In Russ.)
2. FRP Repair Materials and Methods. *Concrete International*. (2005), 27 (1), 66.
3. Cardolin A. (2003). Carbon Fibre Reinforced Polymers for Strengthening of Structural Elements. Division of Structural Engineering, Department of Civil and Mining Engineering, Lulea University of Technology, Sweden, 194. (In Russ.)
4. Chernyavskiy V.L., Akselrod E.Z. (2004). Primenenie ugleplastikov dlya usileniya zhelezobetonnyih konstruksiy promyshlennyih zdaniy [The use of carbon plastics to reinforce the reinforced concrete structures of industrial buildings]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo*, No 3, 37–38. (In Russ.)
5. Rekomendatsii po primeneniyu tkanevyih kompozitsionnyih materialov pri remonte zhelezobetonnyih konstruksiy mostovyih sooruzheniy. Federalnoe Dorozhnoe Agentstvo (Rosavtodor) [Recommendations on the use of fabric composite materials for the repair of reinforced concrete structures of bridge structures. Federal Road Agency (Rosavtodor)]. Moscow, 2013, 55. (In Russ.)

6. Rukovodstvo po usileniyu zhelezobetonnykh konstruktsiy kompozitnymi materialami [Guidelines for reinforcing reinforced concrete structures with composite materials]. NIIJB, (2012). Moscow, 48. (In Russ.)
7. MSC NASTRAN (2016). Nonlinear User's Guide. SOL 400. MSC Software Corporation, 790.
8. Basov K.A. (2005). ANSYS: Spravochnik polzovatelya [ANSYS. User's guide]. Moscow: "DMK-Press" Publ., 637. (In Russ.)
9. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia. 2011.
10. Nabil F. Grace and Singh S.B. (2005). Durability Evaluation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthened Concrete Beams: Experimental Study and Design. *ACI Structural Journal*. 102 (1), 40–53.
11. Bokarev S.A., Smerdov D.N. (2010). Nelineyniy analiz zhelezobetonnykh izgibaemykh konstruktsiy, usilennykh kompozitsionnymi materialami [Nonlinear analysis of reinforced concrete bending structures reinforced with composite materials]. *Vestnik TGASU*, No 2, 113–125. (In Russ.)
12. Cedolin L. and Deipoli S. (June 1977). Finite element studies of shear-critical R/C beams. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 103 (EM3), 395–410.
13. Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. (2005). The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 631.
14. Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code, 1990. Thomas Telford House, London, 1993.
15. Agapov V.P. (2005). Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti konstruktsiy [Finite Element Method in Static, Dynamics and Stability of Constructions]. Moscow: ASV Publ., 245. (In Russ.)
16. Owen D.R.J., Figueiras J.A. and Damjanic F. (1983). Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 41, 323–366.
17. Kupfer H., Hilsdorf H.K. and Rusch H. (August 1969). Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal Proceedings*. 66 (8), 656–666.
18. Chen W.F. (1982). *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, New York, 261.
19. Rukovodstvo po remontu betonnykh i zhelezobetonnykh konstruktsii i gidrotekhnicheskikh sooruzhenii atomnykh stantsii. OAO «Kontsern Rosenergoatom» [Guide to repair of concrete and reinforced concrete structures and hydraulic facilities of nuclear power plants. Rosenergoatom Concern]. (2012), Moscow, 114. (In Russ.)

About the author:

Vladimir P. Agapov – Dr. Sc. (Technical), Prof., Department of Applied Mechanics and Mathematics. Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). Russia. *Research interests:* static, buckling and dynamic analysis of structures by finite element method; development of software for strength analysis. *Contact information:* e-mail – agapovpb@mail.ru

Valerii B. Nikolaev – Dr. Sc. (Technical), Prof., Chief Researcher, Atomenergoproekt. *Research interests:* theory of solid reinforced concrete structures. *Contact information:* e-mail – agapovpb@mail.ru

Roman O. Golovanov – Cand. Sc. (Technical), Associate Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering. *Research interests:* experimental and computational studies of spatial rod systems of noncanonical form. *Contact information:* e-mail – agapovpb@mail.ru

For citation:

Agapov, V.P., Nikolaev, V.B. Golovanov, R.O. (2018). The analysis of reinforced concrete slabs strengthened by composite fabrics by the finite element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2), 120–131. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-120-131.