УДК 539.3:534.1 *DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-33-37*

ЗАДАЧА ПО ДИНАМИКЕ ПОЛОЙ ПРИЗМЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

М.Б. РАСУЛОВ*, М.Г. АГАЯРОВ**

*Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана, Баку
AZ1143. Азербайджан, Баку, ул. Б. Вахабзаде 9,
**Сумгаитский государственный Университет, Сумгаит, Азербайджан
AZ5008, Азербайджан, Сумгаит, 43й квартал

В статье впервые исследуется процесс распространения нестационарных волн в полых прямоугольных полубесконечных призмах. Считается, что во всех 8-ми боковых сторонах действуют смешанные краевые условия, а удар производится по торцевой площадке этой призмы. В работах [1-3], с применением интегральных преобразований и заменой отыскиваемых величин (три компонента перемещений) через новые, удачно выбранные функции (потенциалы волн), система трехмерных уравнений Ляме сведена к системе Бесселевых уравнений. С другой стороны, хорошо известно, что выбранные смешанные условия на поверхности тела, позволяют разделить значения различных волн (продольных и поперечных) на этой же поверхности, т.е. все эти волны, распространяются независимо друг от друга. Эти два обстоятельства позволяют получить в отношении каждого потенциала-функции новую краевую задачу в отдельности. Получены решения этих краевых задач для сплошной призмы, и для выбранных краевых условий настоящей статьи (условия скользящего контакта). Был применен своеобразный метод, который позволил обобщить полученное решение для целой призмы в случае полой призмы.

Ключевые слова: *прямоугольная полая призма, уравнение Ляме, нестационарные волны, смешанные краевые условия*

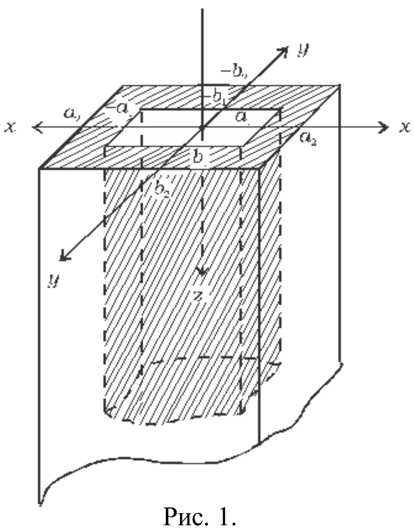

Рис. 1.

1. Введение

Динамика прямоугольных призм, являясь одной из интереснейших тем механики, издавна привлекает внимание большинства исследователей всего мира.

Процесс распространения волн в сплошных прямоугольных призмах изучен достаточно хорошо, особенно в работах Н.Б. Расуловой [1-3], где впервые исследованы нестационарные динамические процессы и построены аналитические решения некоторых задач, с позиции трехмерной теории упругости. Случай полой призмы не рассмотрен никем.

В настоящей работе впервые исследуется процесс распространения нестационарных упругих волн в полубесконечной прямоугольной полой призме, при наличии смешанных условий на всех 8-ми боковых поверхностях этой призмы.

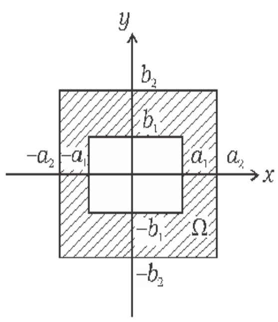

Рис. 2.

2. Постановка и решение задачи

Рассмотренный процесс происходит в пространстве между боковыми поверхностями двух параллельных призм полубесконечной длины, с одинаковой центральной осью (рис. 1), где $2a_1$, $2b_1$ - длины сторон внутренного, а $2a_2$, $2b_2$ – размеры внешнего контура поперечного сечения призмы (рис. 2). Вообще говоря, толщина стенок непостоянная величина, и равенство $b_2 - b_1 = a_2 - a_1$ не обязательно.

В момент $t = 0$ торцевая площадка подвергается осевым ударным нагрузкам извне, под действием которых в рассматриваемом теле, возникают возмущения, распространяющиеся по всему телу в различных направлениях.

Рассматриваемая задача требует решения следующей начально-краевой задачи математической физики.

Движение описывается системой трехмерных уравнений Ляме, которые в векторной форме имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) graddiv\vec{U} + \mu\Delta\vec{U}, \quad \vec{U} = \vec{U}(u, v, w) \tag{2.1}$$

и оно происходит в области пространства, находящейся между поверхностями:

$$\begin{cases} x = \pm a_1, \\ y = \pm b_1 \end{cases} \text{ с одной стороны и } \begin{cases} x = \pm a_2, \\ y = \pm b_2 \end{cases} \text{ с другой, и для } z \geq 0.$$

К этой системе присоединяются следующие начально-краевые условия:

$$\vec{U} = 0; \dot{\vec{U}} = 0 \ \text{ при } t \leq 0, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_0(x, y) f(t); u = 0; v = 0 \ \text{ при } z = 0, \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = 0; u = 0 \ \text{ при } x = \pm a_1 \text{ и } x = \pm a_2, \\ \sigma_{yz} = \sigma_{yx} = 0; v = 0 \ \text{ при } y = \pm b_1 \text{ и } y = \pm b_2 \end{aligned}\right\} \ (z > 0), \tag{2.4}$$

где $\vec{U}$ - вектор перемещения, $\{\sigma\}$- тензор напряжения, λ, μ - коэффициенты Ляме, t - время, ρ - плотность материала, а $\sigma_0(x, y)$ - симметричная функция в отношении обеих координат.

Следуя [1, 2], задача (2.1) - (2.4) сводится к интегрированию более простой системы:

$$\begin{gathered} H_0 H_1 \varphi = -\frac{\sigma_0 q}{\lambda + 2\mu} \bar{f}(p), \\ H_2 \psi_1 = 0, \\ H_0 H_2 \psi_2 = -\frac{\sigma_0}{\mu} \bar{f}(p). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь H_0, H_2 и H_2 - операторы Гельмгольца, а три новые функции φ, ψ_1 и ψ_2 связаны с двукратными преобразованиями трех компонентов перемещения (операторы Лапласа (p) и Фурье (q)), по формулам:

$$\begin{gathered} \bar{u}_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - q \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \\ \bar{v}_s = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - q \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \\ \bar{w}_s = q\varphi - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - q \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь, в левой части индекс s - соответствует $\sin$ и индекс c - $\cos$ преобразования Фурье,

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

$$H_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - q^2, \tag{2.7}$$

$$H_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(q^2 + \frac{\rho^2}{e^2}\right), i = 1{,}2.$$

Решение для целой полубесконечной призмы для одинаковых начальных, торцевых и боковых условий (2.2) - (2.4) легко можно получить из приведенного решения в [1].

Если взять

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}; \beta_m = \frac{\pi m}{b},$$

где a и b длины сторон поперечного сечения, то решение [1], точно будет удовлетворять всем условиям (2.4) на гранях призмы.

Следует отметить, что, в обоих случаях, (здесь и в (1)) боковые условия являются смешанными; они относятся к типам, называемым "условия перпендикулярных сечений" (cross section conditions):

$$u = \sum_k \sum_m \frac{\sigma_{km}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Omega_{km}^{(1)} c_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{\Omega_{km}^{(2)} c_2}{\mu} \right] \alpha_k \sin \alpha_k x \cdot \cos \beta_m y,$$

$$v = \sum_k \sum_m \frac{\sigma_{km}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Omega_{km}^{(1)} c_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{\Omega_{km}^{(2)} c_2}{\mu} \right] \beta_m \cos \alpha_k x \cdot \cos \beta_m y, \tag{2.8}$$

$$w = \sum_k \sum_m \frac{\sigma_{km}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\overline{\Omega}_{km}^{(1)} c_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{\overline{\Omega}_{km}^{(2)} c_2}{\mu} \right] \gamma_{km} \cos \alpha_k x \cdot \cos \beta_m y.$$

Здесь обозначены функции:

$$\Omega_{km}^{(i)} = -f(t) * \int_0^{c_1 t} J_0\left(\gamma_{km}\sqrt{c_i^2 t^2 - \tau^2}\right)\left[e^{-\gamma_{km}(z+\tau)} + sign(z-\tau) e^{-\gamma_{km}|z-\tau|}\right] d\tau,$$

$$\overline{\Omega}_{km}^{(i)} = -f(t) * \int_0^{c_1 t} J_0\left(\gamma_{km}\sqrt{c_i^2 t^2 - \tau^2}\right)\left[e^{-\gamma_{km}(z+\tau)} + e^{-\gamma_{km}|z-\tau|}\right] d\tau,$$

$\gamma_{km} = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_m^2}$ а знак $(*)$ указывает на свертки функций, и

$$\sigma_{km} = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \sigma_0(x, y) \cos(\alpha_k x) \cdot \cos(\beta_m y) dx dy. \tag{2.9}$$

В таком случае зависимость искомых решений от поперечных координат x, y оказывается в виде произведения двух простых функций:

$$\cos(\alpha_k x) \cdot \cos(\beta_m y).$$

Поскольку $\cos x$ - функция периодическая, то этим свойством можно воспользоваться для удовлетворения боковых условий (2.4), т.к., по сути строения, эти условия заимствуют некую периодичность.

Сначала рассмотрим случай, когда

$$a_2 = na_1 \text{ и } b_2 = lb_1,$$

где n и l - некие целые числа. Тогда искомое решение в точности совпадает с решением (2.8), если принимать:

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{a_1} \text{ и } \beta_m = \frac{\pi m}{b_1}.$$

В остальных случаях очевидно, что поставленная задача требует нахождения двух характерных размеров, свойственных только парным числам $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$. Будем считать, что отношения этих размеров являются рациональными числами:

$$\frac{a_1}{a_2} = \eta; \frac{b_1}{b_2} = \xi, \tag{2.10}$$

если η и ξ - рациональные числа, то очевидно, что

$$\eta = \frac{n_1}{l_1}; \xi = \frac{n_2}{l_2},$$

где n_1, n_2, l_1, l_2 - некие целые числа.

Тогда получим:

$$\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{l_1} = d_1; \frac{b_1}{n_2} = \frac{b_2}{l_2} = d_2; \quad \text{и}$$

$$a_1 = n_1 d_1; b_1 = n_2 d_2; \quad a_2 = l_1 d_1; b_2 = l_2 d_2. \tag{2.11}$$

В таком случае решение (2.8) будет представлять и решение настоящей задачи при условии

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{d_1}; \text{ и } \beta_m = \frac{\pi m}{d_2}, \tag{2.12}$$

т.к. заодно будут удовлетворены и боковые условия (2.4), с выбором (2.12).

Естественно, в этом случае, чтобы сохранить обобщения с формулой (2.9), и с учетом вида области поперечного сечения (рис. 2), соответствующие коэффициенты разложения, на этот раз, могут быть определены следующим образом:

$$\sigma_{km} = \frac{1}{4(a_2 b_2 - a_1 b_1)} \int_{-a_2}^{a_2} \int_{-b_2}^{b_2} \sigma_0(x,y) \left\{ H(x^2 - a_1^2) H(b_1^2 - y^2) + H(y^2 - b_1^2) \right\} \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_m y) dxdy,$$

где $H(x)$ - функция Хэвисайда.

Таким образом, простыми приемами нам удалась построить решение одной нестационарной динамической задачи для полой призмы прямоугольного поперечного сечения.

Список литературы

1. *Расулова Н.Б.* Распространение волн в призматическом брусе, подверженном действию осевых ударных сил // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 6. С. 176–179.

2. *Rassoulova N.B.* On dynamics of bar of rectangular cross section // Journal of APP Mech. July 2001. Vol. 68. Iss. 4. P. 662–666.

3. *Расулова Н.Б., Шамилова С.Р.* Распространение волн напряжений в прямоугольном брусе // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2016. № 4. С. 144–152.

История статьи:
Дата поступления в редакцию: 2 июня 2017 *Дата принятия к публикации: 6 октября 2017*

***Об авторах*:**

Расулов Мубариз Билал Оглы, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, отдел Волновой динамики, Институт Математики и Механики, НАН Азербайджана. *Контактная информация:* ул. Б. Вахабзаде 9, Баку, Азербайджан, AZ1143. E-mail: rasulova@gmail.com

Агаяров Матлаб Гусейнгулу Оглы, кандидат физико-математических наук, доцент, директор Центра дополнительного образования, доцент, Сумгаитский Государственный Университет. *Контактная информация:* AZ5008, 43й квартал, Азербайджан, Сумгайыт

Для цитирования:

Расулов М.Б., Агаяров М.Г. Задача по динамике полой призмы прямоугольного поперечного сечения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14, № 1. С. 33—37. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-33-37.

THE PROBLEM ON THE DYNAMICS OF A HOLLOW PRISM OF A RECTANGULAR CROSS SECTION

M.B. RASOULOV*, M.G. AGAYAROV**

*Institute Mathematics and Mechanics of NASA, Baku, Azerbaijan
B.Vahabzade Street, 9, Baku, Azerbaijan, AZ-1143
** Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan
43 quarter, Sumqait, Azerbaijan, AZ-50008

In the article, the process of propagation of non-stationary waves in hollow rectangular semi-infinite prisms is studied for the first time. It is believed that in all 8 sides there are mixed boundary conditions, and impact is made on the end face of this prism.

In the papers (1-3), using the integral transformations and replacing the sought values (three displacement components) through new successfully chosen functions (wave potentials), the system of three-dimensional Lame equations is reduced to the system of Bessel equations. On the other hand, it is well known that the selected mixed conditions on the surface of the body allow us to separate the values of different waves (longitudinal and transverse) on the same surface, i.e. all these waves propagate independently of each other.

These two circumstances make it possible to obtain a new boundary value problem for each potential-function, separately. Solutions of these boundary-value problems for a whole prism are obtained, and for the selected boundary conditions of this article (sliding contact conditions).

A kind of method was used that made it possible to generalize the resulting solution for the entire prism in the case of a hollow prism.

Keywords: *hollow rectangular prism, Lame equations, non-stationary waves, mixed boundary conditions*

References

1. Rasoulova, N.B. (1997). Propagation of waves in a prismatic beam, subjected to axial impact forces. *Mechanics of a Solid Body,* (6), 176–179. (In Russ.).
2. Rasoulova, N.B. (2001). On dynamics of bar of rectangular cross section. *Journal of APP Mech.,* 68 (4), 662–666.
3. Rasoulova, N.B., Shamilova, S.R. (2016). Propagation of stress waves in a rectangular bar. *Izv. RAN. Mechanics of a Solid Body,* (4), 144–152. (In Russ.).

Article history: *Received: June 2, 2017 Revised: September 17, 2017 Accepted: October 6, 2017*

About the authors:

Mubariz B. Rasoulov , PhD of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan. *Contact information:* e-mail: rasulova@gmail.com

Matlab G. Agayarov, PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Sumqait State University, Head of Additional Education Center. *Contact information:* e-mail: rasulova @gmail.com

For citation:

Rasoulov, M.B., Agayarov, M.G. (2018). The problem on the dynamics of a hollow prism of a rectangular cross section. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(1), 33—37. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-33-37.