



Теория упругости

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-23-32

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

Н.Д. ЧАН*, В.В. ФИРСАНОВ**

*Государственный технический университет им. Ле Куи Дона, Ханой, Вьетнам
СРВ, Ханой, ул. Хоанг Куок Вьет, д. 236

** Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия
125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

Представлены два варианта уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольной ортотропной пластины. Уравнения состояния пластины представляются в виде трехмерных уравнений теории упругости. Компоненты напряженно-деформированного состояния в пластине принимаются полиномиальными функциями по нормальной к срединной плоскости пластины координате. Эти функции имеют степень на один и два порядка выше относительно используемых в классической теории Кирхгофа-Лява. Для получения двумерных уравнений и естественных граничных условий применяется принцип возможных перемещений. Формулируются модифицированные граничные условия для стандартных случаев крепления пластины. Расчет напряженно-деформированного состояния пластины проводится с помощью преобразования Лапласа, при этом вдвое сокращается число произвольных постоянных при интегрировании системы дифференциальных уравнений. Одна из отличительных особенностей уточненной теории состоит в прямом интегрировании уравнений равновесия трехмерной теории упругости при определении поперечных нормальных и касательных напряжений. В качестве примера в статье рассматривается расчет напряженно-деформированного состояния прямоугольной изотропной пластины при локальном нагружении. Сравниваются результаты, полученные по уточненной и классической теориям. Показан существенный вклад поперечных нормальных напряжений типа «пограничный слой» в общее напряженное состояние пластины. Полученные результаты могут быть использованы в расчетах и испытаниях на прочность и долговечность авиационных и ракетно-космических конструкций, а также машиностроительных объектов различного назначения.

Ключевые слова: *прямоугольная ортотропная пластина, два варианта уточненной теории пластин, вариационный принцип Лагранжа, преобразование Лапласа, напряженно-деформированное состояние «погранслоя», поперечные нормальные напряжения*

1. Введение

Применение в различных отраслях техники композиционных материалов, а также разработка новых методов расчета оболочечных конструкций из неоднородных материалов показали неправомочность использования [1], в той или иной степени, вариантов классической теории типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера.

Построение уточнённых теорий и методов определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) пластинок и оболочек позволить решить проблему расчёта на прочность таких конструкций, как силовые корпуса летательных аппаратов, различные переходные зоны и соединения, а также объектов других отраслей машиностроения и в строительном деле.

Учёт трёхмерности НДС в зонах искажения напряженного состояния в сочетании с методами механики разрушения даёт возможность оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах конструкций, более обоснованно выбрать тип конструкционного материала и рациональным образом распределить его вблизи концентраторов напряжений.

Один из возможных путей построения математически обоснованной теории пластин и оболочек состоит в применении метода прямого асимптотического интегрирования уравнения трёхмерной теории упругости. Применяя указанный метод, А.Л. Гольденвейзер [2] свел задачу определения НДС пластинок и оболочек постоянной толщины к построению трёх НДС, соответствующих в первом приближении внутреннему НДС, определяемому по классической теории, и двум дополнительным состояниям типа «погранслои», эквивалентным краевым кручению и плоской деформации.

Решение этих дополнительных краевых задач со специфическими граничными условиями связано с математическими трудностями, не позволяющими применять эти результаты в практике инженерных расчетов. В связи с этим, в работах [3,4] с помощью вариационно-асимптотического метода построена уточненная теория расчета НДС прямоугольных пластин из композиционных материалов, круглых пластин и цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины.

На основании расчетов тонких пластин и оболочек установлено, что вблизи жёстко защемленного края дополнительные напряжения краевых плоской деформации и кручения одного порядка с максимальными значениями наибольших напряжений основного НДС. С помощью этой теории разработан расчетный аппарат, оценки прочности непрерывных соединений (фланцевых, сварных), разностенных стыков при наличии в них дефектов в виде начальных трещин.

Другой подход [5], связанный с асимптотическим представлением искомого НДС тонких оболочек, базируется на безразмерных трехмерных уравнениях теории упругости в криволинейных координатах, решение которых строится с помощью модифицированного полуобратного метода Сен-Венана. В результате построены уравнения определения основного НДС, совпадающие с уравнениями равновесия классической теории, а также дополнительные уравнения для расчета НДС типа «погранслои», учитывающие сдвиговые деформации. Данная теория позволяет выполнить все граничные условия задачи без введения осредненных по толщине усилий и моментов.

Иной подход [6,7] к построению уточненной теории заключается в разложении перемещений в полиномиальные ряды по нормальной координате и последующем применении вариационного принципа Лагранжа. Особенность этого подхода состоит в том, что деформации оболочки находятся с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения определяются из соотношений закона Гука и поперечные напряжения получают интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Установлено, что уже при повышении на один-два порядка аппроксимирующих полиномов по отношению к классической теории, имеют место значительные дополнительные локальные напряжения. Следует отметить, что в рамках этого подхода краевые задачи для цилиндрических оболочек были обобщены на случай произвольных ортотропных оболочек, а также оболочек переменной толщины.

Здесь также следует отметить работы [8, 9], в которых рассматриваются методы уточненного расчета оболочек и пластин переменной толщины. В работе [8] оболочка представляется в виде ограниченного трехмерного континуума специальной структуры, допускающего расчленение объекта на совокупность оболочечных элементов. Наряду со стандартными условиями равновесия, используется дополнительное уравнение равновесия элемента в направлении его толщины. В качестве примера исследуются свободные колебания линейно-упругой пластинки, в частности, упругие волны в направлении толщины эле-

мента. Модели различной степени сложности для упругих призматических оболочек переменной толщины при температурном воздействии построены в работе [9]. Для понижения размерности задачи к фундаментальным уравнениям термоупругости для однородных изотропных тел применяется метод Векуа, основанный на преобразовании Фурье-Лежандра.

В данной работе применяется подход, представленный в [7]. Основные уравнения уточненной теории пластин получаются с помощью вариационного принципа Лагранжа и разложения перемещений по толщине. Такой прием позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней толщины. В качестве примера рассматривается расчет НДС прямоугольной изотропной пластины, находящейся под действием локальной нагрузки.

2. Основные уравнения уточненной теории пластин

Ортотропная пластина рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$ (рис.1). Координатные оси x , y совпадают с главными направлениями срединной поверхности пластины, а ось z направлена по наружной нормали к этой поверхности. Пластина находится под действием распределенной нагрузки $q(x,y)$, приложенной на верхней поверхности (рис. 1). Края пластины $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ могут быть любыми, т.е. свободными, шарнирно опертыми и жестко защемленными.

Перемещения пластины определяются следующими разложениями:

$$\begin{aligned} U_1(x,y,z) &= u_0(x,y) + u_1(x,y)z + u_2(x,y)\frac{z^2}{2!} + u_3(x,y)\frac{z^3}{3!}, \\ U_2(x,y,z) &= v_0(x,y) + v_1(x,y)z + v_2(x,y)\frac{z^2}{2!} + v_3(x,y)\frac{z^3}{3!}, \\ U_3(x,y,z) &= w_0(x,y) + w_1(x,y)zS_1 + w_2(x,y)\frac{z^2}{2!}S_2. \end{aligned} \quad (1)$$

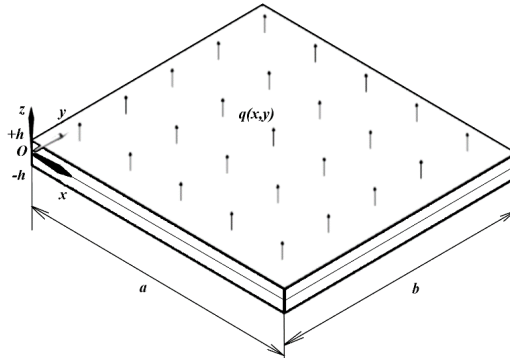


Рис. 1. Прямоугольная пластина

Параметры S_1 , S_2 в (1) принимают значения 0 или 1. Варьируя значения S_1 , S_2 , можно получить два варианта уточненной теории.

Геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial U_1 / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial U_2 / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial U_1 / \partial y + \partial U_2 / \partial x, \\ \gamma_{xz} &= \partial U_1 / \partial z + \partial U_3 / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial U_2 / \partial z + \partial U_3 / \partial y, \quad \varepsilon_{zz} = \partial U_3 / \partial z. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя разложения (1) в (2), находим деформации

$$\varepsilon_x = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_y = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{z^i}{i!}, \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_z = S_1 w_1 + S_2 w_2 z,$$

$$\gamma_{xz} = \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left(u_2 + S_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) z + \left(u_3 + S_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{z^2}{2!}, \quad (3)$$

$$\gamma_{yz} = \left(v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(v_2 + S_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) z + \left(v_3 + S_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2!}.$$

Уравнения связи напряжений и деформаций принимаются в следующем виде:

$$\sigma_x = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z, \quad \sigma_y = A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z, \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = A_{44}\gamma_{xy}, \quad \tau_z = A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = A_{55}\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = A_{66}\gamma_{yz},$$

где коэффициенты A_{ij} ($i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}$) представляют собой упругие постоянные ортотропного материала пластины.

Для получения основных уравнений теории пластин используется вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta U - \delta A = 0. \quad (5)$$

В уравнении (5) вариация потенциальной энергии деформации δU определяется как

$$\delta U = \iiint (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_x + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_y + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_z + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}) dx dy dz, \quad (6)$$

и δA - вариация работы внешней нагрузки, находится по формуле

$$\delta A = \iint q(x, y) \delta \left[w_0(x, y) + w_1(x, y)hS_2 + w_2(x, y)\frac{h^2}{2}S_2 \right] dx dy. \quad (7)$$

Подставляя формулы (6), (7) в (5) с учетом (1), (3) и (4), получим систему основных уравнений уточненной теории пластин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} &= p_z^0, \\ \frac{\partial M_x^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial y} - H_{xz}^i &= 0, i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial M_y^i}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial x} - H_{yz}^i &= 0, i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} - H_z^1 &= p_z^1, (S_1 = 1) \\ \frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} - H_z^2 &= p_z^2, (S_2 = 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \\ (M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{z^i}{i!} dz, \\ (H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i) &= \int_{-h}^{+h} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, p_z = qh^i / i!. \end{aligned}$$

Соответствующие краевые условия представляются на краях $x = 0, a$:

$$\begin{aligned} N_x = \bar{N}_x \vee u_0 = \bar{u}_0, N_{xy} = \bar{N}_{xy} \vee v_0 = \bar{v}_0, Q_{xz} = \bar{Q}_{xz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_x^i = \bar{M}_x^i \vee u_i = \bar{u}_i, M_{xy}^i = \bar{M}_{xy}^i \vee v_i = \bar{v}_i, i = 1, 2, 3, \\ M_{xz}^i = \bar{M}_{xz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, i = 1, 2, \text{ при } S_i = 1, \end{aligned} \quad (9)$$

на краях $y = 0, b$:

$$\begin{aligned} N_{xy} = \bar{N}_{xy} \vee u_0 = \bar{u}_0, N_y = \bar{N}_y \vee v_0 = \bar{v}_0, Q_{yz} = \bar{Q}_{yz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_{xy}^i = \bar{M}_{xy}^i \vee u_i = \bar{u}_i, M_y^i = \bar{M}_y^i \vee v_i = \bar{v}_i, i = 1, 2, 3, \\ M_{yz}^i = \bar{M}_{yz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, i = 1, 2. \text{ при } S_i = 1, \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что краевые условия (9), (10) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления пластины, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений в частных производных (8). Решая уравнения (8) с учетом краевых условий (9), (10), находим перемещения u_i, v_i и w_j . Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ определяются формулами (3), (4), а поперечные напряжения $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ получаются с помощью интегрирования уравнений равновесия теории упругости:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \tau_{yz} = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz, \\ \sigma_z = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz. \end{aligned}$$

3. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Далее полагаем, что пластина на рис.1 имеет шарнирные опоры на краях $y = 0, b$. Тогда разлагаем нагрузки и перемещения в ряды по тригонометрическим функциям вида:

$$\begin{aligned} q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \sin(\psi_m y), u_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(x) \sin(\psi_m y), \\ v_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(x) \cos(\psi_m y), w_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(x) \sin(\psi_m y), i = \overline{0, 3}, j = \overline{0, 2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\psi_m = \frac{m\pi}{b}$.

После подстановки разложений (11) в уравнения (8) и краевые условия (9), (10), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U_{im}, V_{im}, W_{jm}, i = \overline{0, 3}, j = \overline{0, 2}, m = 1, 2, 3, \dots$ и соответствующие краевые условия. Покажем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций U_{im}, V_{im}, W_{jm} :

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^3 \left(K^{(l)1s} + K_{11}^{(l)1s} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_{22}^{(l)1s} \right) U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_{12}^{(l)2s} \frac{d}{dx} V_{sm}(x) + \\ + K_1^{(l)30} \frac{d}{dx} W_{0m}(x) + S_1 K_1^{(l)31} \frac{d}{dx} W_{1m}(x) + S_2 K_1^{(l)32} \frac{d}{dx} W_{2m}(x) = 0, l = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=0}^3 \psi K_{12}^{(i)1s} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) + \sum_{s=0}^3 \left(K^{(i)2s} + K_{11}^{(i)2s} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_{22}^{(i)2s} \right) V_{sm}(x) - \\
 & + K_2^{(i)30} \psi W_{0m}(x) + S_1 K_2^{(i)31} \psi W_{1m}(x) + S_2 K_2^{(i)32} \psi W_{2m}(x) = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8, \\
 & \sum_{s=0}^3 K_1^{(j)1s} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_2^{(j)2s} V_{sm}(x) + \left(K^{(j)30} + K_{11}^{(j)30} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_{22}^{(j)30} \right) W_{0m}(x) + \\
 & + S_1 \left(K^{(j)31} + K_{11}^{(j)31} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_{22}^{(j)31} \right) W_{1m}(x) + \\
 & + S_2 \left(K^{(j)32} + K_{11}^{(j)32} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_{22}^{(j)32} \right) W_{2m}(x) = K_0^{(j)43} Q_m, \quad j = 9, 10, 11,
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь коэффициенты K с верхними и нижними индексами обозначают постоянные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных ортотропного материала пластины. Ввиду громоздкости соответствующих им выражений, они не приводятся.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (12) в ряде случаев может быть решена приближенными методами, например, с помощью одианных и двойных тригонометрических рядов. Однако расчет НДС оболочек, находящихся под действием локальных, в том числе сосредоточенных нагрузок, потребует удержания в этих рядах большого количества членов, что повышает трудоемкость вычислений. Поэтому для решения указанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается использовать операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа. Этот метод имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами. Во-первых, из-за автоматического выполнения граничных условий на одном из краев оболочки вдвое сокращается число произвольных постоянных; во-вторых, правые части системы уравнений, соответствующие нагрузочным членам, могут быть не только аналитическими функциями, но и функциями ступенчатого вида и иметь точки разрыва.

4. Исследование напряженно-деформированного состояния пластины под действием локальной нагрузки

Рассматривается пластина, находящаяся под действием локальной нагрузки:

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_1, \\ Q_0 \sin \frac{m\pi}{b} y, & x_1 \leq x \leq x_2, \quad Q_0 = const, \\ 0, & x_2 < x \leq a. \end{cases}$$

Тогда компоненты перемещений и соответствующих напряжений пластины определяются m -м слагаемым в разложении (11).

В качестве примера рассматривается квадратная изотропная пластина со следующими параметрами: $a = b = 1(m)$, $h/a = 1/200$, $x_1 = a/20$, $x_2 = 19a/20$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений пластины, жестко защемленной на краях $x=0$, a , по двум вариантам уточненной теории представлены на рис. 2-5. Отметим, что на этих рисунках аббревиатура *General* соответствует варианту уточненной теории ($S_1 = S_2 = 1$) и вариант $S_1 = S_2 = 0$ следует рассматривать как соответствующей расчету по классической теории.

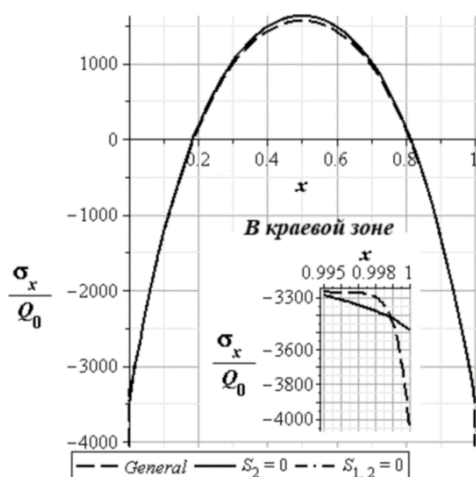


Рис. 2. Изменение σ_x по оси x

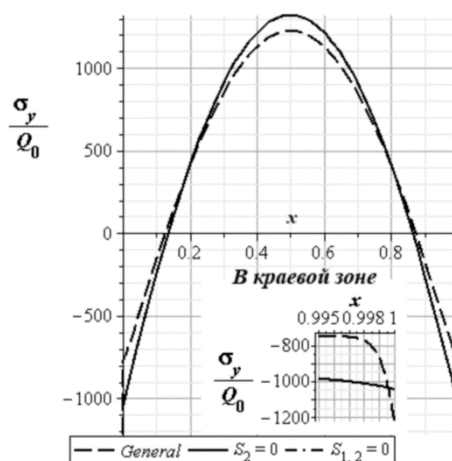


Рис. 3. Изменение σ_y по оси x

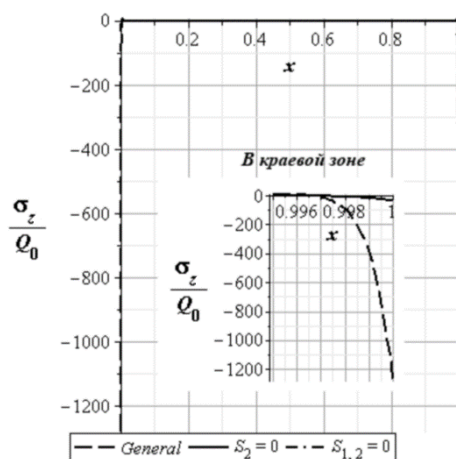


Рис. 4. Изменение σ_z по оси x

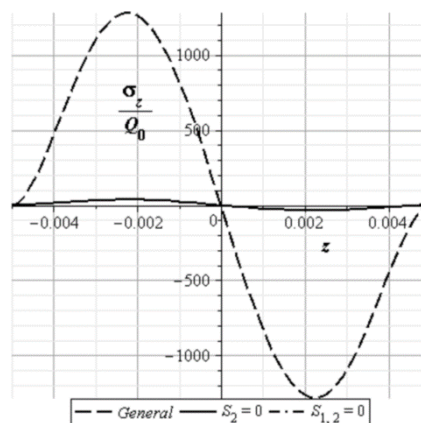


Рис. 5. Изменение σ_z по толщине на краю пластины

Анализ полученных результатов показывает, что вне краевой зоны значения напряжений, определенных по всем вариантам уточненной теории, сходятся. Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место при определении нормальных тангенциальных напряжений σ_y и составляет 7,6%. В краевой зоне результаты расчета по теориям $S_2=0$ и $S_1=S_2=0$ практически совпадают. При исследовании НДС пластины с помощью теории ($S_1=S_2=1$) напряжения в краевой зоне несколько уточняются, для нормальных тангенциальных напряжений σ_x - на 12,5%, а для σ_y - на 14%. Нормальные поперечные напряжения σ_z , соответствующие уточненной теории, в краевой зоне пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения (рис. 5). Здесь надо отметить, что нормальные поперечные напряжения σ_z , определяемые по уточненной теории $S_2=0$ и классической теории $S_1=S_2=0$, сравнительно малы.

Графики изменения перемещений на верхней поверхности пластины, рассчитанные по теории ($S_1=S_2=1$) показаны на рис. 6-7.

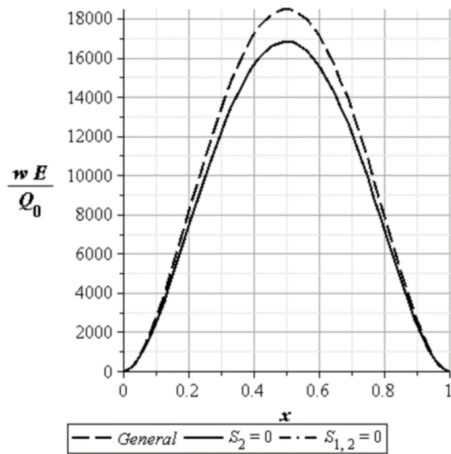


Рис. 6. Изменение прогиба w

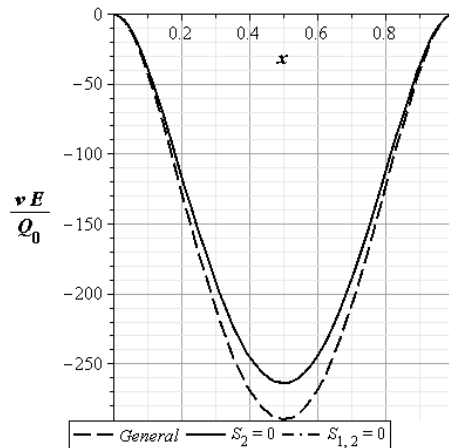


Рис. 7. Изменение перемещения v

Из графиков рис. 6, 7 следует, что максимальные величины перемещений в центре пластины уточняются на 15%.

Результаты расчета пластины, жестко защемленной на краю $x=0$ и свободной на краю $x=a$, по уточненной теории представлены на рис. 8-9.

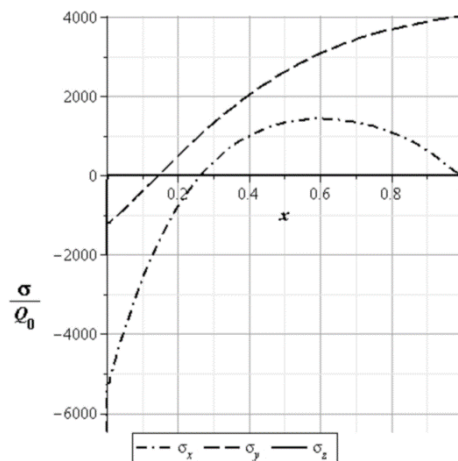


Рис. 8. Изменение $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ по оси x

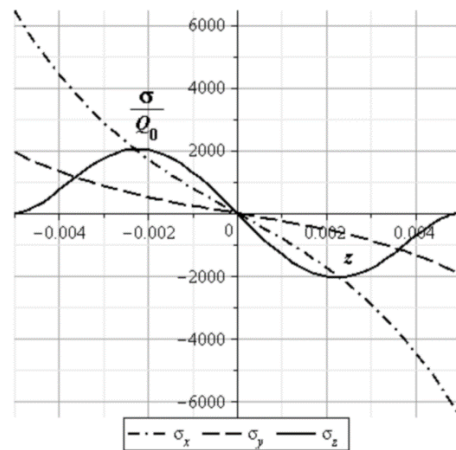


Рис. 9. Изменение $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ по толщине на защемленном краю

Очевидно, что все нормальные напряжения, включая и поперечные, на защемленном краю пластины представляют собой величины одного порядка.

5. Заключение

На основании полученных результатов можно установить следующее:

1. На основании вариационного принципа Лагранжа и разложения компонентов перемещений в полиномиальные ряды по толщине на один-два порядка выше по отношению к классической теории построены два варианта уточненной теории прямоугольных пластин.

2. Учет трехмерности НДС в пластине показал, что поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, в краевой зоне («пограничный слой») оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения; этот результат имеет важное значение, так как позволяет достоверно оценить прочность и трещиностойкость

элементов конструкций летательных аппаратов, а также других объектов машиностроения, в том числе, выполненных из композиционных материалов.

3. Проведено сравнение результатов расчета НДС пластины при использовании двух вариантов уточненной теории. Установлено, что при исследовании НДС в краевых зонах пластины следует использовать уточненную теорию, соответствующую варианту $S_1 = S_2 = 1$. В расчетах перемещений разница между двумя вариантами уточненной теории составляет около 10%.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта РФФИ №17-08-00849\17)

© Чан Н.Д., Фирсанов В.В., 2017

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Пиккуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Изв. АН. МГТ. 2000. № 2. С. 153–168.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 1. С. 28–64.
4. Фирсанов В.В. Напряженное состояние типа «пограничной слой» – краевое кручение прямоугольной пластинки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 44–51.
5. Зверев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 33. 24 с. doi: 10.20948/prepr-2016-33. Режим доступа: http://keldysh.ru/papers/2016/prep2016_33.pdf
6. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МГТ. 1990. № 2. С. 158–167.
7. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 49–54.
8. Dicarolo A., Podio-Guidugli P., Williams W.O. Shells with thickness distension // Intern. J. of Solids and Structures. 2001. Vol. 38. Iss. 6-7. P. 1201–1225.
9. Jaiani G. Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures // ZAMM (Journal of Mathematics and Mechanics). 2015. Vol. 95. Iss. 1. P. 77–90.

История статьи:

Дата поступления в редакцию 12 мая 2017

Дата принятия к публикации 1 ноября 2017

Об авторах:

Чан Нгок Доан, кандидат технических наук, заведующий кафедрой Системного проектирования летательных аппаратов, Государственный технический университет им. Ле Куи Дона, Ханой, СРВ. *Научные интересы:* динамика и прочность конструкций из композиционных материалов; аэроупругость летательных аппаратов; разработка уточнённых методов расчёта напряженно-деформированного и динамического состояния пластинок и оболочек. *Контактная информация:* e-mail: ngocdoanmai@gmail.com

Фирсанов Валерий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Машиноведение и детали машин, Московский авиационный институт (НИИ). *Научные интересы:* разработка неклассической теории ортотропных пластинок и оболочек постоянной и переменной толщины на основе более точного решения трехмерных уравнений теории упругости вариационно-асимптотическим методом; расчетно- экспериментальные методы анализа динамического нагружения и деформирования конструкций летательных аппаратов в аварийных ситуациях, приводящих к среднескоростному соударению с преградами, имеющими различные механические свойства. *Контактная информация:* e-mail: kaf906@mai.ru

Для цитирования:

Чан Н.Д., Фирсанов В.В. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных пластин на основе уточненной теории // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 1. С. 23–32. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-23-32.

STRESS-STRAIN STATE OF THE RECTANGULAR PLATES ON THE BASIS OF REFINED THEORY

N.D. TRAN*, V.V. FIRSANOV**

*Le Quy Don Technical University in Hanoi, Vietnam
236 Hoang Quoc Viet, Hanoi, Vietnam

**Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation

Two variants of a refined theory for calculation of the rectangular orthotropic plates stress-strain state are represented. The plate's state equations are presented in the form three-dimensional equations of elasticity theory. The components of the plate's stress-strain state are received as the polynomial functions on the coordinate which is normal to the middle plane. These functions are one or two degree higher than in the Kirchhoff-Love theory are used. The virtual displacements principle is applied to obtain the two-dimensional equations and its natural boundary conditions. The modified boundary conditions for standard cases of the plate mounting are formulated. Calculation of plate stress-strain is carried out by using Laplace transform, and then the number of arbitrary constants in the integration of differential equations systems thus is twice reduced. One of the refined theory distinctive features consist in direct integration of the three dimensional elasticity problems equilibrium equations at transverse normal and tangential stresses determination.

As an example, the paper considers the calculation of a rectangular isotropic plate's stress-strain under a local load. The results obtained by the refined theories and by the classical theory are compared. The essential contribution of normal transverse stress of type "boundary layer" to the general stress-strain state of a plate is shown. The received results can be used in calculations and at tests for strength and durability of aviation and space-rocket and also engineering structures of different destination.

Keywords: Rectangular orthotropic plate, Two versions of Refined theory of plates, Lagrange variational principle, Laplace transform, Deflected mode of "boundary layer", normal transverse stress

References

1. Picul, V.V. (2000). The modern condition of theory shells and the perspectives their progress, *Izvestiya RAN, Mechanics of Solids*, (2), 153–168. (In Russ.).
2. Goldenveizer, A.L. (1976). *Theory of Elastic Thin Shells*. Moscow: Nauka publ. 512. (In Russ.).
3. Firsanov, V.V. (2002). Refined theory of rectangular composite plates. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 8 (1), 28–64. (In Russ.).
4. Firsanov, V.V. (2016). Stress state called as "boundary layer" is boundary torsion of the rectangular plate. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (6), 44–51. (In Russ.).
5. Zveriaev, E.M. (2016). *Constructive Theory of Thin Elastic Shells*. doi: 10.20948/prepr-2016-33. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2016/prep2016_33.pdf (In Russ.).
6. Vasiliev, V.V., Lurye, S.A. (1990). Problem of developing nonclassical theory of plates. *MTT Mechanics of Solid*, (2), 158–167. (In Russ.).
7. Firsanov, V.V., Tran, N.D., (2011). Energy-Consistent theory of cylindrical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 40 (6), 543–548. (In Russ.).
8. Dicarolo, A., Podio-Guidugli, P., Williams, W.O. (2001). Shells with thickness distension. *Intern. J. of Solids and Structures*, 38 (6-7), 1201–1225.
9. Jaiani, G. (2015). Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures. *ZAMM (Journal of Mathematics and Mechanics)*, 95 (1), 77–90.

Article history: Received: May 12, 2017 Revised: July 27, 2017 Accepted: November 1, 2017

About the authors:

Tran Ngoc Doan, Phd, Head of the department "System Design of Aircraft" of Le Quy Don Technical University in Hanoi, Vietnam. *Scientific interests:* dynamics and strength of composite structures, aeroelasticity of aircraft, development of definite the stress-strain state calculation methods of plates and shells. *Contact information:* e-mail: ngocdoanmai@gmail.com

Valery V. Firsanov, Doctor of Engineering Sciences, Professor, head of the Department Theory of machines and machine components of the Moscow Aviation Institute (National Research University). *Scientific interests:* development of orthotropic plates and shells with a constant and variable thickness non-classical theory on the basis of more exact solution of three-dimensional elasticity theory equations variation-asymptotic method. *Contact information:* e-mail: kaf906@mai.ru

For citation:

Tran, N.D., Firsanov, V.V. (2018). Investigating of deflected mode of plates by using refined theories including the effects of shear and normal deformation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14 (1), 23–32. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-23-32.