



## Расчет тонких упругих оболочек

УДК 539.3:534.1

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-17-22

### НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ВЕЛАРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

М. ЖИЛЬ-УЛБЕ, А.С. МАРКОВИЧ, Т. ДАУ

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6

Большое количество исследований посвящено линейному анализу напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек классической формы: цилиндрической, сферической, полусферической и конической. Однако НДС тонких оболочек сложной геометрии исследовано недостаточно. Понятие оболочек сложной геометрии возникает тогда, когда коэффициенты первой и второй квадратичных форм их срединных поверхностей представляют собой довольно сложные функции криволинейных координат. В статье рассматривается материальная нелинейная устойчивость железобетонной синусоидальной велароидальной оболочки с внутренним радиусом  $r_0 = 1$  м, внешним радиусом  $R = 20$  м и числом волн  $n = 8$ . Оболочка нагружалась нагрузкой от собственного веса и снеговой равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $0,252$  т/м<sup>2</sup>. Численные расчеты проводились в программных комплексах LIRA-SAPR 2013 и STARK ES 2015. Конечноэлементная модель оболочки состоит из 6400 элементов и 3280 узлов, общее число узловых неизвестных – 18991. Для моделирования поверхности использовались плоские оболочечные элементы, имеющие шесть степеней свободы в узле. Граничные условия соответствовали шарнирному опиранию по наружному и внутреннему контурам. В результате расчетов были получены значения перемещений и формы потери устойчивости.

**Ключевые слова:** нелинейная устойчивость, компьютерное моделирование, синусоидальная велароидальная оболочка, устойчивость оболочки сложной формы, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность

Наибольшее количество исследований посвящено линейному анализу напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек классической формы: цилиндрической, сферической, полусферической, конической и некоторых других. Однако НДС тонких оболочек сложной геометрии исследовано недостаточно. Понятие оболочек сложной геометрии возникает тогда, когда коэффициенты первой и второй квадратичных форм их срединных поверхностей являются довольно сложными функциями их неортогональных криволинейных координат. Классические поверхности в большинстве случаев задаются, в основном, криволинейными поверхностными координатами в линиях кривизн. Энциклопедия [1] содержит сведения по аналитической и дифференциальной геометрии более 500 регулярных поверхностей, нашедших применение в различных отраслях науки и техники, в том числе в ней описываются параболические, синусоидальные и эллиптические велароиды. *Велароидальной* называется поверхность переноса на плоском прямоугольном плане с образующей кривой переменной кривизны [1]. Таким образом, поверхность ограничена четырьмя взаимно ортогональными контурными прямыми ( $k_x = k_y = 0$ ), лежащими в одной плоскости. Иногда эти поверхности в зарубежной литературе называют фуникулярными поверхностями [2].

Велароидальные поверхности в России в отличие от стран Западной Европы и Америки [3, 4] широкого применения не нашли, за исключением параболического велароида, форма которого была использована в покрытии «Дарбази» [5]. В работе [6], по-видимому, впервые предложили использовать велароиды на круговом плане. В отличие от велароидов на прямоугольном плане, вела-

роиды на круговом плане будем называть, соответственно, круговыми и кольцевыми велароидами [7].

В монографии [8] нелинейный анализ представляется как метод проектирования высокотехнологичных современных конструкций, а так же, как способ исследования остаточной прочности и жесткости элементов, имеющих начальные повреждения.

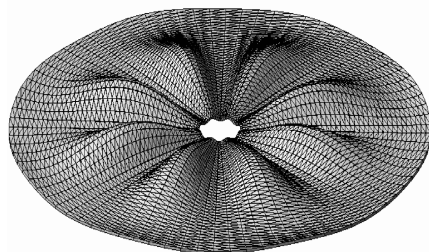


Рис. 1. Велароидальная оболочка с отверстием в центре ( $r_0 \neq 0$ )

В механике деформированного твердого тела существует несколько принципов классификации нелинейностей [9]. Однако в отечественной научной школе принято рассматривать три основных их вида: геометрическую, физическую и конструктивную. Особенности расчета большепролетных конструкций с учетом нелинейных эффектов приводятся, например, в статьях [10, 11].

Стоит отметить, что алгоритм нелинейного расчета реализуется с помощью различных итерационных методов, в виду чего высокая точность расчета связана с большим количеством итераций.

Впервые пример использования поверхности кольцевого синусоидального велароида для проектируемого сооружения был предложен в работе [12].

Для дальнейшего анализа НДС возьмем кольцевой велароид с внутренним радиусом  $r_0 = 1$  м, наружным радиусом  $R = 20$  м и числом волн  $n = 8$  (рис. 1). Предположим, что исследуемая оболочка изготовлена из железобетона.

Конечноэлементный анализ оболочки выполнялся в сертифицированных программных комплексах LIRA-SAPR 2013 и STARK ES 2015. Расчет производился в линейной и нелинейной постановках.

Конечно-элементная модель оболочки (рис. 2) состоит из 6400 элементов и 3280 узлов, общее число узловых неизвестных – 18991. Для моделирования поверхности использовались плоские оболочечные элементы, имеющие шесть степеней свободы в узле. Граничные условия соответствовали шарнирному опиранию по наружному и внутреннему контурам.

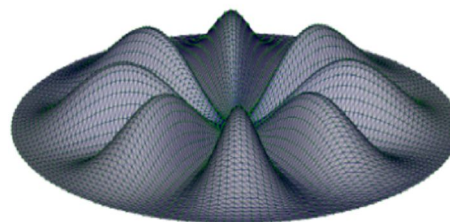


Рис. 2. Конечно-элементная модель круговой велароидальной оболочки

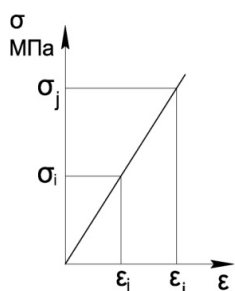


Рис. 3. К линейному расчету: диаграмма  $\sigma$  -  $\epsilon$  материала

Расчет на устойчивость проводился при различных толщинах оболочки (10, 15 и 20 см). В линейном расчете рассматривалась упругая работа материала (бетона) в соответствии с графиком, показанным на рис. 3. При этом не учитывалось перераспределение усилий и возможность образования трещины в оболочке.

Линейный расчет проводился при следующих параметрах материала (бетона): начальный модуль упругости  $E = 30000$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,18$ ; плотность  $\rho = 2,5$  т/м<sup>3</sup>.

Особый интерес представляет работа рассматриваемой оболочки с учетом неупругих свойств материала. В этой связи был проведен нелинейный расчет оболочки на основе модифицированного метода Ньютона – Рафсона.

Для того чтобы учесть реальные свойства материала использовались нелинейные законы деформирования бетона и арматурной стали (рис. 4).

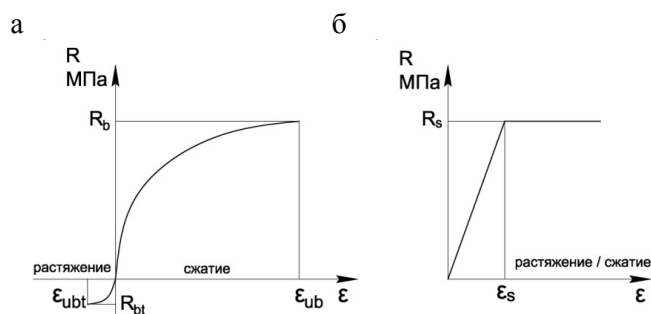


Рис. 4. Законы деформирования: а – для бетона; б – для арматуры (диаграмма Прандтля)

Закон деформирования бетона описывался функцией напряжений:

$$\sigma = R_b (1 - \exp(-\varepsilon E_0 / R_b)). \quad (1)$$

Циклы нелинейного расчета выполнялись для различной толщины оболочки (10, 15 и 20 см) с разным процентом армирования ( $p = 2\%$ ,  $p = 3\%$ ). На каждом цикле исследовались усилия, перемещения и коэффициенты устойчивости.

В расчете принимались следующие параметры материала:

$R_b$  – расчетное сопротивление бетона сжатию (бетон В30,  $R_b = 22,4$  МПа);

$R_{bt}$  – расчетное сопротивление бетона растяжению (бетон В30,  $R_{bt} = 1,84$  МПа);

$\varepsilon_{ub}$  – предельная относительная деформация сжатия ( $\varepsilon_{ub} = 0,002$ );

$\varepsilon_{ubt}$  – предельная относительная деформация растяжения ( $\varepsilon_{ubt} = 0,0002$ );

$R_s$  – предел текучести арматурной стали ( $R_s = 355$  МПа);

$\varepsilon_s$  – деформации арматуры, соответствующие пределу текучести, стали  $R_s$

Расчеты проводились на основное сочетание нагрузок:

$$q = g + S \text{ [т/м}^2\text{]}; \quad (2)$$

где  $g$  – собственный вес оболочки с учетом коэффициента надежности по нагрузке  $\gamma_f = 1,1$ ;  $S$  – снеговая нагрузка с учетом коэффициента надежности по нагрузке  $\gamma_f = 1,4$  ( $S = 0,252$  т/м<sup>2</sup>).

Основные результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчета		Толщина оболочки $h$ , см	Тип расчета		
			Линейный	Нелинейный	
				$p=2\%$	$p=3\%$
Максимальное перемещение $w$ , мм		10	79,10	-	379,48
		15	48,80	260,31	189,13
		20	34,40	204,03	152,55
Коэффициент устойчивости $K_s$	Форма 1	10	12,136	-	2,530
		15	32,219	6,040	8,313
		20	63,156	10,652	14,247
	Форма 2	10	12,170	-	2,537
		15	32,330	6,061	8,341
		20	64,459	10,876	14,546
	Форма 3	10	12,186	-	2,540
		15	32,363	6,067	8,350
		20	64,535	10,893	14,569

На рис. 5 показаны изополю вертикальных перемещений, соответствующие толщинам оболочки 10 см и 15 см.

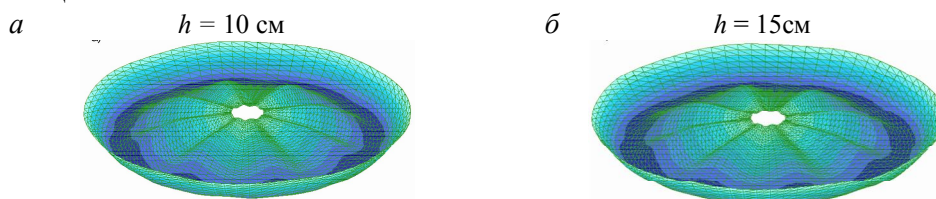


Рис. 5. Изополю вертикальных перемещений: *a* – при толщине оболочки  $h = 10$  см ( $w = 379,48$  мм), *б* – при толщине оболочки  $h = 15$  см ( $w = 189,13$  мм)

На рис. 6, 7 показаны формы потери устойчивости для оболочек с толщиной 20 см и 15 см и процентом армирования  $p = 3\%$ .

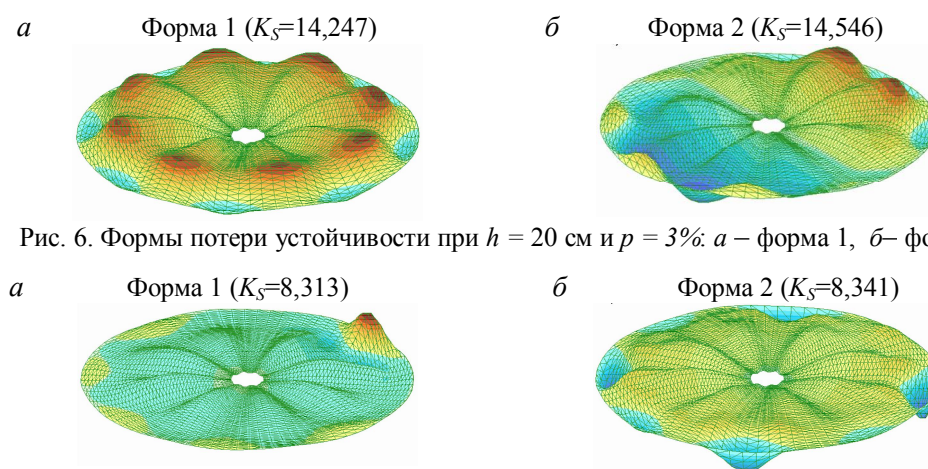


Рис. 6. Формы потери устойчивости при  $h = 20$  см и  $p = 3\%$ : *a* – форма 1, *б*– форма 2

*a* Форма 1 ( $K_5=8,313$ ) *б* Форма 2 ( $K_5=8,341$ )

Рис. 7. Формы потери устойчивости при  $h = 15$  см и  $p = 3\%$ : *a* – форма 1, *б* – форма 2

### Основные выводы

В результате проведенного исследования были выявлены определенные недостатки линейной постановки задачи, а именно, заниженные значения вертикальных перемещений и, как следствие, завышенные коэффициенты устойчивости. Так, перемещения, полученные в нелинейном расчете, в среднем, в 4 раза превышают соответствующие перемещения линейного расчета. Таким образом, коэффициент устойчивости для оболочки толщиной 20 см по первой форме, равный 63,156 (линейный расчет) уменьшился до 14,247 (нелинейный расчет,  $p = 3\%$ ). В виду этого, неправильная интерпретация результатов расчета может давать ложное представление об избыточной надежности конструкции.

© Жиль-улбе Матъе, Маркович А.С., Дау Т., 2017

### Список литературы

1. *Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Encyclopedia of Analytical Surfaces. Cham : Springer International Publishing Switzerland, 2015. 752 p.
2. *Friaa Ahmed, Zenzri Hatem.* On funicular shapes in structural analysis and applications // Eur. J. Mech. A. 1996. Vol. 15. № 5. P. 901—914.
3. *Mihailescu M., Horvath I.* Velaroidal shells for covering universal industrial halls // Acta Techn. Acad. Sci. Hung. 1977. 85(1-2). P. 135—145.
4. *Krivoshapko S.N., Gil-Oulbe M.* Geometry and Strength of a Shell of Velaroidal Type on Annulus Plan with Two Families of Sinusoids // International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE). 2013. Vol. 3. Iss. 3. P. 71—73.

5. *Гогоберидзе Я.А.* Перекрытия «Дарбази». Тбилиси : Техника да шрома. 1950. 278 с.
6. *Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л.* Исследование поверхностей велароидального типа с двумя семействами синусоид на кольцевом плане // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 4. С. 9—12.
7. *Krivoshapko S., Shambina S.* Forming of velaroidal surfaces on ring plan with two families of sinusoids // 16<sup>th</sup> Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics : Abstracts. Baška : Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia, September 9-13, 2012. P. 19.
8. *Reddy J.N.* An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Toronto : Oxford University Press - Canada. 2004. 463 p.
9. *Nam-Ho Kim.* Introduction to nonlinear finite element analysis. Springer New York Heidelberg Dordrecht London. Springer Science + Business 2015. DOI 10.1007/978-1-4419-1746-1.
10. *Аганов В.П., Айдемиров К.Р.* Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 11. С. 4—7.
11. *Trushin S.I., Zhavoronok S.I.* Nonlinear analysis of multilayered composite shells using finite difference energy method // Proc. of the Fifth International Conference on Space Structures, the University of Surrey, Guildford, UK. 2002. P. 1527—1533.
12. *Шамбина С.Л., Непорада В.И.* Велароидальные поверхности и их применение в строительстве и архитектуре // Праці ТДАТУ. 2012. Т. 53. Вип. 4. С. 168—173.

**История статьи:**

*Дата поступления в редакцию: 7 сентября 2017*

*Дата принятия к публикации: 9 ноября 2017*

**Об авторах:**

*Жиль-Улбе Матье*, кандидат технических наук, доцент департамента архитектуры и строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва. *Научные интересы:* теория тонких упругих оболочек, нелинейная устойчивость оболочек, компьютерное моделирование. *Контактная информация:* e-mail: gil-oulbem@hotmail.com

*Маркович Алексей Семенович*, кандидат технических наук, доцент департамента архитектуры и строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва. *Научные интересы:* строительная механика, численные методы расчета сооружений, компьютерное моделирование. *Контактная информация:* e-mail: markovich.rudn@gmail.com

*Дау Тьеколо*, кандидат технических наук, старший преподаватель департамента архитектуры и строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва. *Научные интересы:* железобетонные и каменные конструкции, планирование и управление строительством, компьютерная технология в управление проектами. *Контактная информация:* e-mail: daout88@gmail.com

**Для цитирования:**

*Жиль-улбе М., Маркович А.С., Дау Т.* Нелинейная устойчивость синусоидальной велароидальной оболочки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 1. С. 17—22. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-17-22.

## NONLINEAR STABILITY OF SINUSOIDAL VELAROIDAL SHELL

M. GIL-OULBE, A.S. MARKOVICH, T. DAOU

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya Street, Moscow, 117198, Russian Federation

The nonlinear analysis of thin-walled shells is not a rarity, particularly the nonlinear strength one. Many works are devoted to linear and nonlinear analyses of shells of classical form: cylindrical, spherical, hemispherical, shallow, conical. The concept of shells of complex geometry appears when the coefficients of the first and second quadratic forms of their middle surfaces are functions of the curvilinear coordinates. Concerning nonlinearity, it is generally accepted that four different sources of nonlinearity exist in solid mechanics: the geometric nonlinearity, the material nonlinearity and the kinetic nonlinearity. The above theoretical aspect of the nonlinearity, applied to a sinus-



oidal velaroidal shell with the inner radius  $r_0=1\text{m}$ , the outer radius  $R=20\text{m}$  and the number of waves  $n=8$ , will give rise to the investigation of its nonlinear buckling resistance. The building material is a concrete. The investigation emphasizes more on the material and the geometric nonlinearities, which are more closed to the reality. Finite element model of the shell consists of 6400 elements and 3280 nodes, the total number of nodal unknown – 18991. For surface modelling was used flat shell elements with six degrees of freedom in the node. The boundary conditions correspond to hinged bearing on the outer and inner contours. The result of the investigation is the buckling force of the shell under self-weight and uniformly vertically distributed load on its area, the corresponding numerical values of displacements and the buckling mode.

**Keywords:** *nonlinear stability, computer modeling, sinusoidal velaroidal shell, stability of shells of complex geometry, material nonlinearity, geometric nonlinearity*

### References

1. Krivoschapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Cham: Springer International Publishing Switzerland. 752.
2. Friaa Ahmed, Zenzri Hatem. (1996). On funicular shapes in structural analysis and applications. *Eur. J. Mech. A.*, 15(5), 901—914.
3. Mihailescu, M., Horvath, I. (1977). Velaroidal shells for covering universal industrial halls. *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.*, 85(1-2), 135—145.
4. Krivoschapko, S.N., Gil-Oulbe, M. (2013). Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids. *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCIE)*, 3(3), 71—73.
5. Gogoberidze, Ya.A. (1950). *Perekrytiya "Darbazi" [Covering "Darbazi"]*. Tbilisi: Tehnika da Shroma publ. 278 p. (In Russ.).
6. Krivoschapko, S.N., Shambina, S.L. (2009). Investigation of surfaces of velaroidal type with two families of sinusoids on annular plan. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (4), 9—12.
7. Krivoschapko, S.N., Shambina, S.L. (2012). Forming of velaroidal surfaces on ring plan with two families of sinusoids. In. *16<sup>th</sup> Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics*. Baška, September 9-13, 2012, 19.
8. Reddy, J.N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Toronto: Oxford University Press- Canada. 463.
9. Nam-Ho Kim (2015). *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London. Springer Science + Business 2015. DOI 10.1007/978-1-4419-1746-1.
10. Agapov, V.P., Aydemirov, K.R. (2016). An analysis of trusses by a FEM with taking into account geometric nonlinearity. *Industrial and Civil Engineering*, (11), 4—7. (In Russ.).
11. Trushin, S.I., Zhavoronok, S.I. (2002). Nonlinear analysis of multilayered composite shells using finite difference energy method. *Proc. of the Fifth International Conference on Space Structures*, the University of Surrey, Guildford, UK. 1527—1533.
12. Shambina, S.L., Neporada, V.I. (2012). Velaroidal surfaces and their application in building and architecture. *Prazi TDATU*, 53(4), 168—173. (In Russ.).

#### Article history:

Received: September 7, 2017    Revised: October 16, 2017

Accepted: November 9, 2017

#### About the authors:

*Gil-Oulbe Mathieu*, Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of architecture and civil engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow. *Scientific interests:* theory of thin elastic shells, nonlinear stability of shells of complex geometry, computer modeling. *Contact information:* e-mail: gil-oulbem@hotmail.com

*Alexey S. Markovich*, Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of architecture and civil engineering, Engineering Academy, RUDN University, Moscow. *Scientific interests:* construction mechanics, numerical methods for calculating structures, computer modeling. *Contact information:* e-mail: markovich.rudn@gmail.com

*Daou Tiekolo*, Candidate of Technical Science, Assistant Professor, Department of architecture and civil engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow. *Scientific interests:* reinforced concrete and stone structures, organization, planning and management of construction, project management, computer technology in project management. *Contact information:* e-mail: daout88@gmail.com

#### For citation:

Gil-Oulbe, M., Markovich, A.S., Daou, T. (2018). Nonlinear stability of sinusoidal velaroidal shell. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(1), 17—22. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-17-22.