

Численные методы расчета конструкций

УДК 539.3:534.1

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-6-49-54

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ ВЗРЫВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В.К. МУСАЕВ^{*,**}, доктор технических наук, профессор,

^{*}Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, Россия; musayev-vk@yandex.ru

^{**}Московский политехнический университет, 107023, г. Москва, ул. Б. Семеновская, 38, Россия; musayev-vk@yandex.ru

В работе приводится некоторая информация моделирования безопасности упругой полуплоскости при нестационарном волновом взрывном воздействии с помощью метода конечных элементов. Рассматривается волновая теория взрывной безопасности. Применяется техническое средство в виде вертикальных прямоугольных полостей для увеличения безопасности объекта при сосредоточенном вертикальном взрывном воздействии. Получена явная двухслойная схема. Рассмотрена постановка задачи с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) в полуплоскости при воздействии в виде дельта функции. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Взрывное воздействие моделируется в виде треугольного импульса. В пяти точках приводится изменение контурного напряжения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: численное моделирование, компьютерное моделирование, вычислительная механика, нестационарные упругие волны, динамика сплошных сред, волновая теория взрывной безопасности, фундаментальное воздействие, метод Галеркина, распространение волн, вертикальные прямоугольные полости, полуплоскость, неотражающие граничные условия, дельта функция, переходной процесс

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом. При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторая информация о рассматриваемом численном методе, алгоритме и комплексе программ моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах приведена в работах [1, 2, 5, 7, 8].

В работах [2, 3, 4, 7] приведена некоторая информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах различной формы с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений при различных (ударных, взрывных и сейсмических) воздействиях с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведено в работах [5, 6, 7, 8].

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в

начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma, \\ \sigma_x &= \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости, S ($S_1 \cup S_2$) – граничный контур тела Γ .

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости:

$$\bar{H}\ddot{\bar{\Phi}} + \bar{K}\bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0, \quad \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где \bar{H} – диагональная матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\bar{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) – система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2). Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду:

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\bar{\Phi}} + \bar{K}\bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \frac{d}{dt} \bar{\Phi} = \dot{\bar{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек:

$$\dot{\bar{\Phi}}_{i+1} = \dot{\bar{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\bar{\Phi}_i + \bar{R}_i), \quad \bar{\Phi}_{i+1} = \bar{\Phi}_i + \Delta t \dot{\bar{\Phi}}_{i+1}, \quad (4)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Для исследуемой области, состоящей из материалов с разными физическими свойствами, выбирается минимальный шаг по временной координате (5).

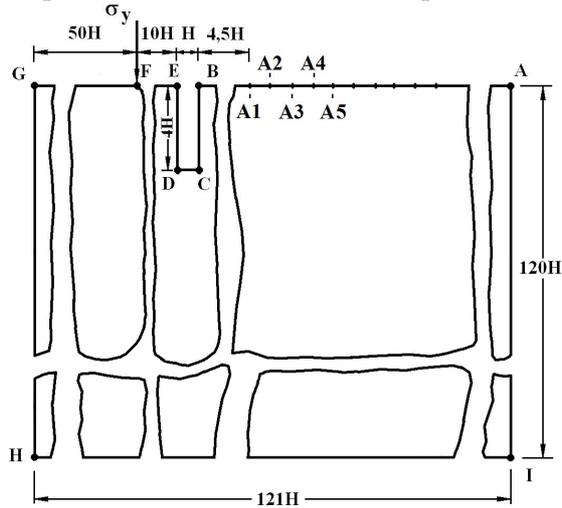


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

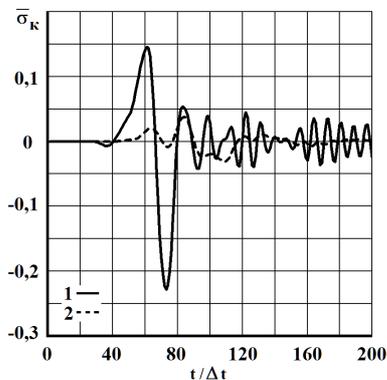


Рис. 2. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A1$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

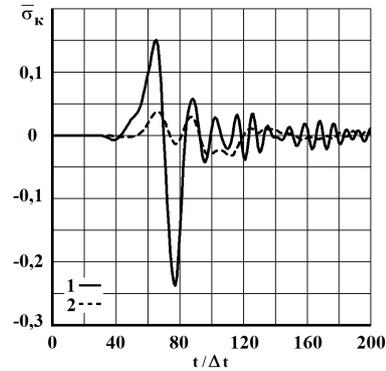


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A2$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$. Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) (рис. 1).

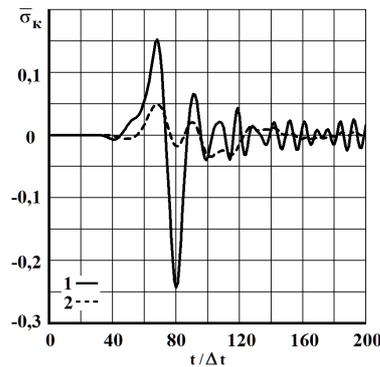


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A3$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

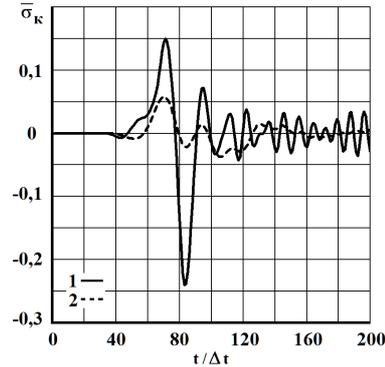


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A4$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

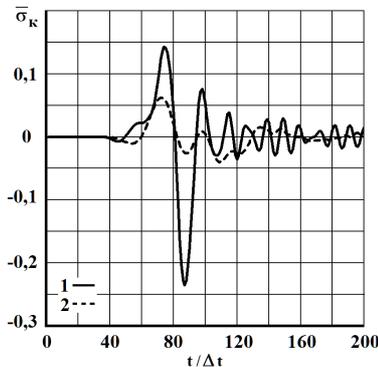


Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A5$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

В точке F перпендикулярно свободной поверхности $ABEFG$ приложено сосредоточенное нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $10 \leq n \leq 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)). Граничные условия для контура $GHIA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $GHIA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур $ABCDEFG$ свободен от нагрузок, кроме точки F , где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y . Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Результаты расчетов для контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) во времени n получены в точках $A1 - A5$ (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости.

На рис. 2-6 приведены контурные напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени n , которые получены в точках $A1 - A5$.

Выводы

1. Для оценки несущей способности и прогноза безопасности уникальных сооружений при взрывных воздействиях применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при взрывных воздействиях на сооружения. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

2. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных, для решения задач при взрывных воздействиях, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

3. На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической достоверности результатов численного решения полученных, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задач о распространении взрывных волн в деформируемых телах.

4. Решена задача о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем). Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Рассматриваются точки на свободной поверхности упругой полуплоскости.

5. Полученные результаты показывают уменьшение напряжений при приращении полости с соотношением ширины к высоте один к четырем.

6. Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи, о применении полостей для увеличения безопасности уникальных объектов по несущей способности (прочности) при взрывных воздействиях, с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

© Мусаев В.К. 2017

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28—32.

2. Мусаев В.К. Оценка достоверности численного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в областях сложной формы // Материалы Всероссийской конференции «Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Успехи, проблемы, перспективы». – М.: ИПРИМ РАН, 2015. – С. 94—103.

3. Акатьев С.В., Куранцов В.А., Денисенков А.Н., Черникова Н.Г., Кормилицин А.И. Сопоставление результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях с интерференцией плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIV. В 3 т. – Том 2. – Ростов-на-Дону: РГСУ, 2012. – С. 270—278.

4. Мусаев В.К., Дикова Е.В., Кормилицин А.И., Самойлов С.Н., Стародубцев В.В. Достоверность результатов численного метода в перемещениях при отражении упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. – № 4. – С. 57—61.

5. Мусаев В.К. Численное моделирование нестационарных волн напряжений в упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) при сосредоточенном взрывном воздействии // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 11-2. – С. 192—196.

6. Стародубцев В.В. Моделирование безопасности сосредоточенного нестационарного упругого взрывного воздействия на надземный нефтепровод с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXIV Международной конференции. – М.: РГГУ, 2016. – С. 251—254.

7. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Vol. 11, Iss. 1. – P. 135—146.

8. Musayev V.K. Mathematical modeling of seismic nonstationary elastic waves stresses in Kurpsai dam with a base (half-plane) // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016. – Vol. 12, Iss. 3. – P. 73—83.

Поступила в редакцию 15 ноября 2016 г. Прошла рецензирование 12 мая 2017 г.

Принята к публикации 18 июля 2017 г.

Об авторе: МУСАЕВ ВЯЧЕСЛАВ КАДЫРОВИЧ, доктор технических наук, профессор. Преподаёт одновременно в Московском государственном университете путей сообщения им. Императора Николая II, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, Россия; и Московском политехническом университете, 107023, Москва, ул. Б. Семеновская, 38, Россия. Научные интересы: динамика сплошных сред, волновая теория взрывной безопасности, численное моделирование.

Для цитирования: Мусаев В.К. Численное моделирование нестационарных волн напряжений в упругой полуплоскости с прямоугольной полостью при сосредоточенном вертикальном взрывном воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 6. – С. 49—54. Doi: 10.22363/1815-5235-2017-6-49-54.

References

1. MUSAEV, V.K. (2014). Modelirovanie nestacionarnykh uprugikh voln naprjazhenij v deformiruemykh oblastjakh s pomoshh'ju metoda konechnykh jelementov v peremeshhenijah. *Sovremennye naukoemkie tehnologii*. 12 (1). 28—32. (In Russ.)
2. MUSAEV, V.K. (2015). Ocenka dostovernosti chislenного modelirovanija nestacionarnykh uprugikh voln naprjazhenij v oblastjakh slozhnoj formy. *Materialy Vserossijskoj konf. «Mehanika i nanomehanika strukturno-slozhnyh i geterogennyh sred. Uspehi, problemy, perspektivy»*, М.: IPRIM RAN. 94—103. (In Russ.)
3. AKAT'EV, S.V., KURANCOV, V.A., DENISENKOV, A.N., CHERNIKOVA, N.G., KORMILICIN, A.I. (2012). Sopostavlenie rezul'tatov chislenного metoda MUSAeva V.K. v peremeshhenijah s interferenciej ploskih prodol'nykh uprugikh voln naprjazhenij v vide del'ta funkcii. *Tehnosfernaja bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, jenergo i resursosberezhenie: T38. Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii*. Vypusk XIV. V 3 t. Tom 2. Rostov-na-Donu: RGSU. 270—278. (In Russ.)
4. MUSAEV, V.K., DIKOVA, E.V., KORMILICIN, A.I., SAMOJLOV, S.N., STARODUBCEV, V.V. (2016). The accuracy of the numerical method results in the displacement in the elastic reflection of stress waves in the form of a triangular pulse from the free surface of the plate. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, No 4. 57—61. (In Russ.)
5. MUSAEV, V.K. (2016). Chislennoe modelirovanie nestacionarnykh voln naprjazhenij v uprugoj poluploskosti s polost'ju (sootnoshenie shiriny k vysote odin k chetyrem) pri sosredotochenном vzryvном vozdejstvii. *Mezhdunarodnyj Zhurnal Jeksperimental'nogo Obrazovanija*. No 11—2. 192—196. (In Russ.)
6. STARODUBCEV, V.V. (2016). Modelirovanie bezopasnosti sosredotochenного nestacionarnого uprugogo vzryvного vozdejstvija na nadzemnyj nefteprovod s pomoshh'ju chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm MUSAeva V.K. *Problemy Upravljenija Bezopasnost'ju Slozhnyh Sistem*. Materialy XXIV Mezhdunarodnoj konferencii, Moscow: RGGU. 251—254. (In Russ.)
7. MUSAYEV, V.K. (2015). Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Vol. 11, Iss. 1. 135—146.
8. MUSAYEV, V.K. (2016). Mathematical modeling of seismic nonstationary elastic waves stresses in Kurpsai dam with a base (half-plane). *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Vol. 12, Iss. 3. 73—83.

NUMERICAL SIMULATION OF TRANSIENT STRESS WAVES IN ELASTIC HALF PLANE WITH A RECTANGULAR CAVITY WHILE CENTERING THE VERTICAL EXPLOSIVE IMPACT

V.K. MUSAYEV

The paper provides some information modeling safety elastic half plane in the case of non-stationary wave explosive impact using the finite element method. Considered the wave theory of explosive safety. Applicable technical tool in the form of vertical rectangular cavities to increase the security of the object when focused vertical explosive impact. The explicit two-layer scheme. Reviewed the problem statement with the cavity (ratio of width to height of one to four) in a half-plane when exposed in the form of Delta functions. Solve the system of equations of 59048 unknown. Explosive impact is modeled as a triangular pulse. Five points is a change in the grid voltages.

KEY WORDS: numerical simulation, computer simulation, computational mechanics, non-stationary elastic waves, dynamics of continuous media, the wave theory of explosive safety, fundamental effect, the method of Galerkin, wave propagation, vertical rectangular cavity, the half-plane, non-reflecting boundary conditions, the Delta function.

Article history: Received: November 15, 2016. Revised: May 12, 2017. Accepted: July 18, 2017.

For citation: Musayev V.K. (2017) Numerical simulation of transient stress waves in elastic half plane with a rectangular cavity while centering the vertical explosive impact. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No 6. 49—54. Doi: 10.22363/1815-5235-2017-6-49-54. (In Russ.)