

УДК 624.04

АНАЛИЗ ПРОГИБА АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

М.Н. КИРСАНОВ, д.ф.-м.н., профессор
Национальный исследовательский университет "МЭИ",
111250 Москва, Красноказарменная 14, c216@ya.ru

Геометрия плоской статически определимой фермы с двумя неподвижными шарнирными опорами задается длинами стержней, числом панелей в опорных частях и числом панелей в ригеле. Методом индукции по этим параметрам выводятся общие формулы для прогиба фермы под действием сосредоточенной и распределенной нагрузки. Символьные преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple. Найдены асимптотические свойства решений. Получены формулы для реакций опор и усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях фермы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ферма, решетка фермы, Maple, прогиб

Постановка задачи. Хорошо отлаженные и проверенные численные алгоритмы, встроенные в стандартные пакеты для расчетов строительных конструкций, дают решения для широкого класса задач о напряженном и деформированном состоянии конструкций. Лидирует здесь в основном метод конечных элементов. Современные компьютеры имеют достаточно большой запас точности и быстродействия, чтобы получить численное решение различных сложных задач строительной механики. Практически параллельно с численными, хотя с некоторым запозданием, развивались и аналитические методы расчета строительных конструкций. Не всегда такие расчеты приводили к компактным и обзримым формулам, пригодным как для экспресс оценки состояния сооружения, так и для его оптимизации на этапе проектирования [1]. Несмотря на то, что даже самым лучшим аналитическим решениям недоступны те решения, которые дают численные методы, определенные преимущества аналитических решений неоспоримы. Прежде всего, это простота, надежность и точность расчетов. К этому добавляется и возможность оптимизации систем с целью уменьшения веса и увеличения жесткости, где это необходимо. Для решения задач, содержащих не только размеры и нагрузки, но и некоторое натуральное число, характеризующее сложность сооружения, например, число панелей или стержней в фермах, весьма важна способность символьных решений преодолевать "проклятие размерности", проявляющееся в неизбежном накоплении ошибок округления численных методов.

Заметный прогресс в направлении получения аналитических решений произошел с появлением систем символьных вычислений (Reduce, Mathematica, Maple и др.). Методом индукции были получены решения задач о прогибе плоских [2-5] и пространственных регулярных ферм [6] с произвольным числом панелей. При этом, как правило, сложность геометрии фермы определялась лишь одним целочисленным параметром, например, числом панелей. Решенные задачи с двумя параметрами значительно сложнее и редки [7]. В настоящей работе предлагается схема статически определимой арочной фермы и выводится двухпараметрическая формула для прогиба.

Симметричная ферма (рис. 1) составлена из трех частей. Две боковые наклонные части имеют треугольную решетку и содержат по m панелей. Средняя горизонтальная часть с крестообразной решеткой содержит $2n$ панелей. Ставится задача вывести формулу для прогиба фермы в зависимости от числа панелей.

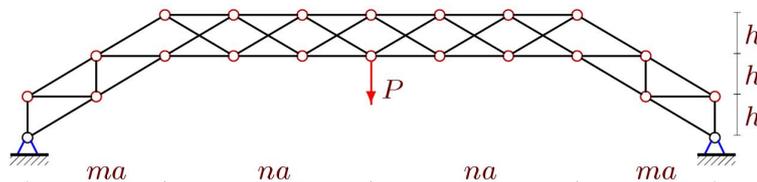


Рис. 1. Ферма, $n = 3, m = 2$

Вывод формул для прогиба. Воспользуемся программой [8] для определения усилий в стержнях в аналитической форме. В программе используется метод вырезания узлов. В исследуемой ферме $4(n+m)+2$ шарниров и $n_s = 8(n+m) + 4$ стержней вместе с четырьмя стержнями, моделирующими неподвижные опорные шарниры.

Конфигурация решетки фермы задается в программе специальными векторами, содержащими номера концов стержней. Матрица системы уравнений равновесия в проекциях на оси координат заполняется направляющими косинусами стержней, вычисляемыми по координатам узлов и векторам номеров концов стержней [2-7]. Из решения системы уравнений с помощью операторов Maple находят усилия в стержнях в символьной форме. Для ускорения счета используется метод обратной матрицы.

Выражение для прогиба по найденным усилиям получается с помощью интеграла Мора. За контрольную точку прогиба принят средний узел нижнего пояса. Рассмотрим сначала нагружение фермы одной силой в этой точке. Согласно интегралу Мора имеем следующую сумму:

$$EF\Delta = P \sum_{i=1}^{n_s-4} S_i^2 l_i, \text{ где } S_i \text{ — усилия от действия единичной внешней нагрузки. Здесь обозначено: } l_i \text{ — длины стержней, } EF \text{ — жесткость стержней. Жесткость принимается одинаковой для всех стержней.}$$

Общий вид решения для прогиба при различных m и n имеет вид:

$$\Delta_{n,m} EF = P(A_{n,m}a^3 + B_{n,m}h^3 + C_{n,m}c^3) / h^2, \tag{1}$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, EF — жесткость стержней, принятая одинаковой для всех стержней фермы. Заметим, что вид формулы прогиба для рассматриваемой фермы не меняется для различных m и n , различаясь лишь величинами коэффициентов. Это

справедливо не для всех регулярных конструкций. Например, для ферм с трапециевидным очертанием верхнего пояса это не выполняется, с ростом числа панелей формула удлиняется, увеличивая число слагаемых. Определение коэффициентов как функций m и n — главная часть поставленной задачи.

Для того, чтобы получить формулу с произвольными числами m и n , необходимо провести индукцию в два этапа. На первом этапе при фиксированном числе панелей в боковых частях (сначала $m = 1$) получаются формулы для прогиба ферм с различным числом $n = 1, 2, 3, \dots$. Коэффициенты в этих формулах образуют последовательности, для которых с помощью оператора `rgf_findrecur` системы Maple находятся соответствующие однородные линейные рекуррентные уравнения. Например, для $A_{n,m}$ имеем уравнение седьмого порядка при любом m :

$$A_{n,m} = A_{n-1,m} + 3A_{n-2,m} - 3A_{n-3,m} - 3A_{n-4,m} + 3A_{n-5,m} + A_{n-6,m} - A_{n-7,m}. \quad (2)$$

Решения этих уравнений, выявляющие закономерность образования коэффициентов, дает оператор `rsolve`. Получается зависимость коэффициентов $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ и $C_{n,m}$ от n при $m=1$. Затем процедура повторяется для $m=2, 3, 4, \dots$ и получаются соответствующие формулы:

$$A_{n,1} = n^3 / 3 + (1 - 3(-1)^n)n^2 / 4 + (11 - 3(-1)^n)n / 12 + (1 - (-1)^n) / 4,$$

$$A_{n,2} = n^3 / 3 + (1 - 5(-1)^n)n^2 / 8 + (35 - 3(-1)^n)n / 48 + (1 - (-1)^n) / 4,$$

$$A_{n,3} = n^3 / 3 + (1 - 7(-1)^n)n^2 / 12 + (25 - (-1)^n)n / 36 + (1 - (-1)^n) / 4,$$

....

$$A_{n,8} = n^3 / 3 + (1 - 17(-1)^n)n^2 / 32 + (515 - 3(-1)^n)n / 768 + (1 - (-1)^n) / 4.$$

На втором этапе также с помощью тех же операторов находится обобщение полученных формул по числу m . Здесь уже составляются последовательности коэффициентов при степенях n . В данном случае получаем следующее окончательное выражение для коэффициента при a^3 :

$$A_{n,m} = n^3 / 3 + (1 - (2m + 1)(-1)^n)n^2 / (4m) + (1 + (8/3)m^2 - (-1)^n)n / (4m^2) + (1 - (-1)^n) / 4.$$

Аналогично получаются и другие коэффициенты формулы (1):

$$B_{n,m} = (1 - (-1)^n) / (4m), \quad C_{n,m} = (6n + (1 + 5m^2) / m + (m^2 - 1)(-1)^n / m) / 12.$$

Равномерная нагрузка. Несколько сложнее, но по этой же методике получается решение для равномерной нагрузки по верхнему поясу (рис. 2).

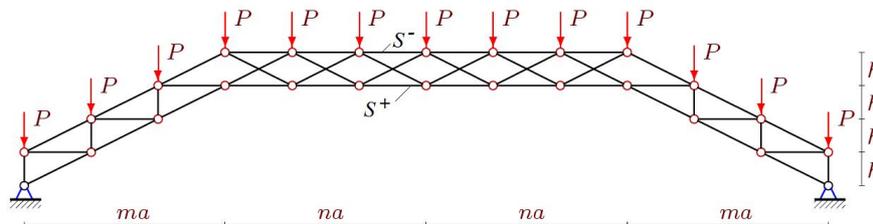


Рис. 2. Равномерная нагрузка, $n = m = 3$

Формула для прогиба схожа с выражением (1), однако для вывода закономерностей образования коэффициентов требуется большая длина последовательностей и значительно большая мощность компьютера, работающего в символьной моде на пределе своих возможностей:

$$\Delta_n EF = P(A_n a^3 + B_n h^3 + C_n c^3) / (4h^2 n). \quad (3)$$

Наибольший порядок рекуррентного уравнения получился для A_n

$$A_n = A_{n-1} + 6A_{n-2} - 6A_{n-3} - 15A_{n-4} + 15A_{n-5} + 20A_{n-6} - 20A_{n-7} - \\ - 15A_{n-8} + 15A_{n-9} + 6A_{n-10} - 6A_{n-11} - A_{n-12} + A_{n-13}. \quad (4)$$

Интересно отметить, что уравнения (2) и (4) образованы биномиальными коэффициентами. Решения рекуррентных уравнений дает следующие закономерности:

$$A_n = (10n^5 - 2(4(-1)^n + 3)n^4 + 2((-1)^n + 18)n^3 - (9 + 13(-1)^n)n^2 + \\ + 4(2 - 5(-1)^n)n + 9(1 - (-1)^n)) / 6,$$

$$B_n = (1 - (-1)^n)(1 + 3n),$$

$$C_n = -(n^4(1 - (-1)^n) - 4n^3(8 + (-1)^n) + 10n^2 + 2n(1 + 2(-1)^n) + 2((-1)^n - 1)) / 6.$$

Для проверки полученного решения применялась та же программа [8], но в численной моде, дающей результаты практически мгновенно и не имеющей в системе Maple ограничений по числу уравнений.

Усилия в критических стержнях и асимптотика. Для оценки устойчивости и прочности фермы требуются формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Методом индукции получаем, что наиболее растянутый стержень (S^+) в ферме под действием распределенной нагрузки (рис. 2) будет стержень в середине нижнего пояса: $S^+ = P((n^3 - 2n^2 + 2n + 1)a / (2nh))$, наиболее сжатый — в середине верхнего пояса: $S^- = -Pn(n + 1)a / (2h)$.

Выражения для вертикальных реакций опор очевидны $R_{vert} = P(4n + 1) / 2$, горизонтальные же реакции из обычных уравнений равновесия фермы найти нельзя. Для их определения приходится рассчитывать усилия во всех стержнях. Методом индукции по восьми фермам с $n=1, 2, \dots, 8$ получаем $R_{horiz} = P(3n^2 - n - 1) / (2hn)$.

Имея аналитическое решение, можно получить асимптотику решения для прогиба фермы. Для решения (1) при условии фиксированного пролета $L=2(n+m)a$ и общей нагрузке $P_s = (2n + 2m + 1)P$ имеются два предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Delta} = h / (4L), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\Delta} = h(5 + (-1)^n) / (24L).$$

Здесь введен безразмерный прогиб $\bar{\Delta} = \Delta EF / (P_s L)$. Для решения (3) асимптотик нет.

Выводы. Получены аналитические решения для внешне статически неопределимой арочной фермы. В отличие от аналогичных точных решений [9-13] в рассмотренной постановке, помимо геометрических параметров, имеется два параметра, определяющие пропорции конструкции. Поэтому для получения более общего решения при выводе зависимостей коэффициентов итоговой формулы от числа па-

нелей потребовалась индукция по двум параметрам, что привело к значительным трудностям при выполнении символьных преобразований. Наиболее общее решение удалось получить для задачи о нагружении фермы сосредоточенной силой. В случае действия распределенной нагрузки найдено решение при $n=m$. Решение выявило наличие горизонтальных асимптот. Получены формулы для реакций опор и усилий в критических стержнях. Построенные решения позволяют проводить оптимизацию конструкции.

© Кирсанов М.Н. 2017

Список литературы

1. Рыбаков Л.С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела. 1999. №4. С. 174—189.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2—5.
3. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "STAR" в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 36—41.
4. Popatayeva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С. 257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
5. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 10—12
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52—58.
7. Кирсанов М.Н., Астахов С.В. Двухпараметрическая индукция для вывода зависимости прогиба фермы от числа панелей // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций». Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. С. 151—155.
8. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
9. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С. 238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
10. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 4-3(8). С. 7—8.
11. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66—73.
12. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35—44.
13. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Vol. 1, No 3. Pp. 14—17.

Поступила в редакцию 5 июня 2017 г. Прошла рецензирование 14 июня 2017 г.

Принята к публикации 18 июня 2017 г.

Об авторе:

КИРСАНОВ МИХАИЛ НИКОЛАЕВИЧ, профессор Национального исследовательского университета "МЭИ", профессор МГУ им. М.В. Ломоносова. Закончил Воронежский государственный университет (1977) и аспирантуру МГУ (1981). Автор десяти монографий и учебных пособий по математике и механике, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. Научные интересы: строительная механика, аналитические решения, Maple, дифференциальные уравнения, дискретная математика, методы искусственного интеллекта, реология. 111250, Москва, Красноказарменная 14, c216@ya.ru

Для цитирования:

Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 5. – С. 50—55, DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-50-55.

References

1. Rybakov, L.S. (1999). Linejnaya teoriya ploskoj ortogonal'noj reshetki [Linear theory of plane orthogonal grid]. *Izvestiya Rossijskoj Akademii nauk. Ser. Mekhanika tverdogo tela*, No 4, 174—189 (in Russian).
2. Kirsanov, M.N. (2016). Analiticheskij raschet balochnoj fermy s reshetkoj tipa «Butterfly». *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*, No 4 (267), 2—5 (in Russian).
3. Gorbunova, A.S., Kirsanov, M.N., Lepetyuha, V.A. (2017). Raschet progiba simmetrichnoj fermy s reshetkoj "STAR" v analiticheskoj forme. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii*, No 1 (14), 36—41 (in Russian).
4. Ponamareva, M.A. (2016). The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. *Science Almanac*, N 4-3(18), 257-259, DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
5. Voropai, R.A., Kazmiruk, I.Yu. (2016). Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. *Bulletin of Scientific Conferences*, No 2-1(6), 10—12.
6. Kirsanov, M. N. (2016). Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*, No 4, 52 – 58, DOI: 10.5862/MCE.64.5 (in Russian).
7. Kirsanov, M.N., Astahov, S.V. (2017). Dvuhparametricheskaya indukciya dlya vyvoda zavisimosti progiba fermy ot chisla panelej. *Materialy Vserossijskoj Nauchno-Prakticheskoy Konferencii «45 Let Otraski Legkih Metallokonstrukcij. Pyatigorsk: Izdatel'stvo PF SKFU*, 151—155 (in Russian).
8. Kirsanov, M. N. (2012). *Maple i Maplet. Resheniya Zadach Mekhaniki*, SPb.: Izd-vo Lan', 512 p.
9. Voropai, R.A. (2016). Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice. *Science Almanac*, No 4-3(18), 238-240, DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
10. Bolotina, T. D. (2016). The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*, No 4-3(8), 7—8.
11. Tinkov, D.V. (2015). Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennyh konstrukcij. *Inzhenerno-Stroitel'nyj Zhurnal*, No 5(57), 66—73 (in Russian).
12. Kirsanov, M.N. (2016). O vliyanih naklona podvizhnoj opory na zhestkost' balochnoj fermy. *Vestnik MGSU*, Np 10, 35—44 (in Russian).
13. Kirsanov, M.N. (2016). An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*, Vol. 1, No 3, 14—17.

ANALYSIS OF THE DEFLECTION OF THE ARCHED TRUSS

M. N. KIRSANOV, DSc, Professor
National Research University "MPEI",
111250 Moscow, Krasnokazarmennaya, 14; c216@ya.ru

The geometry of the flat statically determinate truss with two fixed hinge supports is specified by the lengths of the rods, the number of panels in supporting parts and the number of panels in the bolt. By induction on these parameters the General formulas for the deflection of the trusses under the action of concentrated and distributed load are obtained. Symbol conversions are performed in the system of computer mathematics Maple. The asymptotic properties of solutions are found. Formulas for reactions of supports and efforts in the most compressed and stretched the rods of the truss are found.

KEY WORDS: truss, lattice, Maple, deflection

Article history: Received: June 5, 2017. Revised: June 14, 2017. Accepted: June 18, 2017.

About the author:

KIRSANOV Mikhail Nikolaevich, Professor, National research University "Moscow power engineering Institute", Professor of M. V. Lomonosov Moscow State University. Graduated from Voronezh State University (1977) and Moscow State University graduate school (1981). Author of ten monographs and textbooks on mathematics and mechanics, member of the Russian National Committee on theoretical and applied mechanics. Research interests: structural mechanics, analytical solutions, Maple, differential equations, discrete mathematics, artificial intelligence methods, rheology.
14, Krasnokazarmennaya Str., 111250, Moscow, Russian Federation. Email: , c216@ya.ru

For citation: Kirsanov M.N. (2017) Analysis of the deflection of the arched truss. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No 5. 50—55, DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-50-55.